

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 4.

УДК: 539.3

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-302-315

**Разработка и верификация методики конкретизации  
определяющего соотношения Мурнагана<sup>1</sup>**

В. В. Козлов, А. В. Филатова

**Козлов Виктор Вячеславович** — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: vvkozlovtsu@mail.ru*

**Филатова Александра Вячеславовна** — магистр, лаборант-исследователь, Тульский педагогический университет имени Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: filatovasasha-1@mail.ru*

**Аннотация**

В статье описана методика конкретизации определяющего соотношения Мурнагана, включающего в себя пять материальных констант, с помощью задачи об одноосном растяжении (сжатии) образца, выполненного из нелинейно-упругого материала. Предлагаемая методика основана на использовании экспериментально наблюдаемых значений осевой нагрузки и поперечных удлинений призматического образца в зависимости от его осевого удлинения. Экспериментальные кривые аппроксимируются теоретическими зависимостями, следующими из решения задачи растяжения-сжатия в рамках рассматриваемого определяющего соотношения. Из требования минимальных отличий между экспериментальными и теоретическими данными с помощью метода наименьших квадратов определяются материальные константы. В работе описано автоматизированное с помощью языка программирования python проведение численного эксперимента, данные которого использовались для демонстрации выполнения предложенной конкретизации определяющего соотношения Мурнагана. Численный эксперимент был проведен в отечественном пакете прочностного анализа CAE Fidesys. Осуществлена проверка корректности предложенной методики с помощью сравнения экспериментальных данных и теоретических, полученных для материальных констант, определенных в рамках представленных алгоритмов конкретизации определяющего соотношения Мурнагана.

**Ключевые слова:** методика конкретизации определяющего соотношения, материал Мурнаган, одноосное растяжение, нелинейно-упругий материал, CAE Fidesys, python, численный эксперимент.

**Библиография:** 28 названий.

**Для цитирования:**

Козлов, В. В. Филатова, А. В. Разработка и верификация методики конкретизации определяющего соотношения Мурнагана // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 302–315.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024 тема научного исследования «Теоретико-численные методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике».

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 4.

UDC: 539.3

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-302-315

**Development and verification of a methodology for Murnaghan's defining relation concretization**

V. V. Kozlov, A. V. Filatova

**Kozlov Victor Vyacheslavovich** — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

*e-mail: vvkozlovtsu@mail.ru*

**Filatova Alexandra Vyacheslavovna** — master of sciences, research laboratory assistant, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: filatovasasha-1@mail.ru*

**Abstract**

In paper the methodology of concretization of five-constant Murnaghan's defining relation is described, using the problem of homogeneous uniaxial tension (compression) of a sample made of a nonlinear elastic material. The methodology is based on the use of experimentally observed values of axial load and transverse elongation of a prismatic sample as a function of its axial elongation. The experimental curves are approximated by theoretical dependences following from the solution of the tensile-compression problem within the framework of the considered constitutive relation. Material constants are determined from the requirement of minimal differences between experimental and theoretical data using the least squares method. An automated numerical experiment using the python programming language is described. The collected data was used to demonstrate the performance of the proposed concretization of Murnaghan's defining relation. The numerical experiment was carried out in the local strength analysis package CAE Fidesys. The correctness of the proposed methodology was verified by comparing experimental data and theoretical data obtained for material constants determined within the framework of the presented algorithms for the concretization of the Murnaghan's defining relation.

**Keywords:** methodology of concretization of the defining relation, Murnaghan's material, uniaxial tension, nonlinear elastic material, CAE Fidesys, python, numerical experiment.

**Bibliography:** 28 titles.

**For citation:**

Kozlov, V. V., Filatova, A. V. 2025, "Development and verification of a methodology for Murnaghan's defining relation concretization", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 302–315.

**1. Введение**

Нелинейно-упругие изотропные материалы занимают важное место в современном мире в силу их широкого распространения [1, 2]. Требование корректного отражения их механических свойств при моделировании поведения под различными нагрузками имеет ключевое значение при определении рамок и условий эксплуатации соответствующих образцов. Решение данной задачи связано с одной из центральных проблем нелинейной теории упругости - выбором определяющего соотношения [3-7], для изотермических процессов сводящегося к взаимосвязи между напряжениями и деформациями [8-10] и используемого для описания поведения нелинейно-упругого материала [11-14].

Возможность применения при моделировании определяющего соотношения для конкретного материала связана с задачей определения значений входящих в него материальных констант – конкретизации материала. Проблеме разработки соответствующих методик посвящено ряд исследований [15-17]. Данная работа расширяет существующие методики, представляя методику конкретизации определяющего соотношения Мурнагана [18, 19] с помощью задачи об однородном одноосном растяжении (сжатии) образца, выполненного из нелинейно-упругого материала. Решение задачи в рамках определяющего соотношения Мурнагана приводит к модельным зависимостям, содержащими связи между экспериментально наблюдаемыми характеристиками процесса. Из требования соответствия модельных уравнений экспериментальным данным решается задача конкретизации определяющего соотношения с помощью метода наименьших квадратов [20-22].

В работе также описывается автоматизированное с помощью языка программирования python проведение численного эксперимента, данные которого используются для осуществления проверки предложенной методики. Для численного моделирования был применен САЕ пакет прочностного анализа Fidesys [23, 24], в котором используется метод конечных элементов [25].

Ожидается, что результаты данной работы будут полезны при изучении нелинейно-упругих материалов.

## 2. Об определяющем соотношении

Рассмотрим принципы построения определяющих соотношений (связей между напряжениями и деформациями) нелинейно-упругих изотропных материалов. Известно [26, 27], что характеристики как напряженного, так и деформированного состояния входят в выражение работы элементарных внешних сил  $d'A^{(e)}$ . Запишем основное термомеханическое соотношение [12, 28]

$$d\psi + \eta dT - d'A^{(e)} \equiv 0, \quad (2.1)$$

где  $\psi$  — удельная свободная энергия,  $\eta$  — удельная энтропия,  $T$  — температура.

Для изотропного нелинейно-упругого материала свободная энергия считается функцией инвариантов выбранной деформационной меры и температуры. Пусть в качестве такой меры выступает тензор деформаций Коши-Грина  $\tilde{\varepsilon}$  [27]

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \overset{\circ}{\nabla} + \overset{\circ}{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{u} \overset{\circ}{\nabla} \right), \quad (2.2)$$

где  $\overset{\circ}{\nabla} = \vec{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  — оператор Гамильтона,  $\vec{u}$  — вектор перемещений.

Тогда, если обозначить алгебраические инварианты тензора деформаций Коши-Грина как  $J_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , свободная энергия  $\psi$  примет вид

$$\psi = \psi(J_1, J_2, J_3, T). \quad (2.3)$$

Тензор  $\tilde{\varepsilon}$  сопряжен с энергетическим тензором напряжений  $\tilde{T}$  [11, 12], следовательно, работу внешних сил можно представить формулой

$$d'A^{(e)} = \tilde{T} \cdot \cdot d\tilde{\varepsilon}. \quad (2.4)$$

Подставив (3), (4) в (1) и произведя ряд преобразований [7], получим взаимосвязь

$$\begin{aligned} T_{\sim} &= \left( \frac{\partial \psi}{\partial J_1} + J_1 \frac{\partial \psi}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial \psi}{\partial J_3} \right) E_{\sim} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial J_2} + J_1 \frac{\partial \psi}{\partial J_3} \right) \varepsilon_{\sim} + \frac{\partial \psi}{\partial J_3} \varepsilon_{\sim}^2, \\ \eta &= -\frac{\partial \psi}{\partial T}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $E_{\sim}$  — единичный тензор.

Ограничимся изучением изотермических процессов  $T \equiv T_0$  и опустим в дальнейшем зависимость свободной энергии от температуры и второе уравнение (5).

Рассмотрим конкретные представления свободной энергии (3), наиболее простым выражением которой можно считать форму, предлагаемую в работе Гузя [18]

$$\psi = c_1 J_1^2 + c_2 J_2. \quad (2.6)$$

Также в [18] приведена свободная энергия в форме Мурнагана

$$\psi = c_1 J_1^2 + c_2 J_2 + c_3 J_1^3 + c_4 J_1 J_2 + c_5 J_3. \quad (2.7)$$

Из выражения (5) и свободной энергии Гузя (6) получим аналогичную закону Гука форму

$$T_{\sim} = (2c_1 + c_2) J_1 E_{\sim} - c_2 \varepsilon_{\sim} = \lambda J_1 E_{\sim} + 2\mu \varepsilon_{\sim}. \quad (2.8)$$

Определяющее соотношение, полученное из (5) для свободной энергии Мурнагана (7), является расширением (8)

$$\begin{aligned} T_{\sim} &= [(2c_1 + c_2) J_1 + (3c_3 + c_4) J_1^2 + c_5 J_2] E_{\sim} - \\ &\quad - [c_2 + (c_4 + c_5) J_1] \varepsilon_{\sim} + c_5 \varepsilon_{\sim}^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Далее рассмотрим методику конкретизации определяющего соотношения (9).

### 3. Конкретизация определяющего соотношения

При малых деформациях можно принять, что энергетический тензор напряжений равен тензору истинных напряжений, тогда (9) асимптотически вырождается в закон Гука

$$S_{\sim} = (2c_1 + c_2) J_1 E_{\sim} - c_2 \varepsilon_{\sim} = \lambda J_1 E_{\sim} + 2\mu \varepsilon_{\sim}.$$

Отсюда следует, что константы  $c_1, c_2$  могут быть определены следующей связью с параметрами Ламе

$$\begin{cases} c_1 = \mu + \frac{\lambda}{2}, \\ c_2 = -2\mu. \end{cases} \quad (3.1)$$

Для нахождения остальных констант, входящих в (9), рассмотрим задачу однородного одноосного растяжения прямоугольного параллелепипеда в направлении оси  $Ox_1$ . Схематически процесс показан на рис. 1.

Задачу удобно решать в декартовой прямоугольной системе координат. Гипотеза однородности напряженно-деформированного состояния рассматриваемого тела предполагает независимость соответствующих мер от материальных координат. Также следуют равенство  $\lambda_2 = \lambda_3$

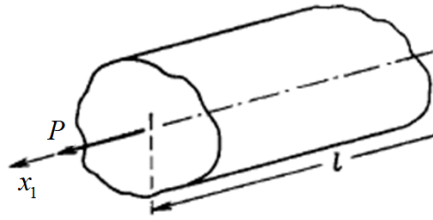


Рис. 1: Схема процесса одноосного однородного растяжения

из изотропии и отсутствие изменений углов между материальными волокнами. Тогда компоненты аффинора деформации в матричной форме примут вид

$$\Phi_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Из (11) легко определить полярное разложение аффинора

$$\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{E},$$

где  $\underset{\sim}{U}$  — левая мера искажения,  $\underset{\sim}{R}$  — тензор поворота.

Компоненты меры Коши-Грина  $\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{U}^2$  имеют вид

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Из (12) найдем тензор Коши-Грина, который, помимо определения (2), можно найти из выражения  $\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\underset{\sim}{G} - \underset{\sim}{E})$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 & \varepsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

где  $\lambda_i = \sqrt{2\varepsilon_{ii} + 1}$ .

Для тензора Коши-Грина (13) представим энергетический тензор напряжений (9)

$$\underset{\sim}{T} = T_{ii} \vec{e}_i \vec{e}_i, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} T_{11} &= (2c_1 + c_2)(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{33}) + (3c_3 + c_4)(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{33})^2 + c_5(2\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}^2) - \\ &\quad - [c_2 + (c_4 + c_5)(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{33})]\varepsilon_{11} + c_5\varepsilon_{11}^2, \\ T_{22} = T_{33} &= (2c_1 + c_2)(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{33}) + (3c_3 + c_4)(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{33})^2 + c_5(2\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}^2) - \\ &\quad - [c_2 + (c_4 + c_5)(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{33})]\varepsilon_{33} + c_5\varepsilon_{33}^2. \end{aligned}$$

Используем связь энергетического тензора напряжений и тензора истинных напряжений Коши  $\underset{\sim}{S}$  [26]

$$\underset{\sim}{S} = \sqrt{\frac{g}{G}} \underset{\sim}{\Phi}^T \cdot \underset{\sim}{T} \cdot \underset{\sim}{\Phi}, \quad (3.6)$$

где  $G = \det (G_{ij}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = \lambda_1^2 \lambda_3^4$ .

В рассматриваемой постановке тензор  $S_{\sim}$  определится с учётом (14) формулой

$$S_{\sim} = \frac{\lambda_i^2 T_{ii}}{\lambda_1 \lambda_3^2} \vec{e}_i \vec{e}_i.$$

Запишем не обращающиеся тождественно в ноль компоненты тензора  $S_{\sim}$

$$s_{11} = \frac{2\lambda_1}{\lambda_3^2} \left[ \left( 6c_3 + 2c_4 + \frac{c_5}{2} \right) + [(6c_3 + c_4) \varepsilon_{11} + 2c_1 + c_2] \varepsilon_{33} + \varepsilon_{11} \left( \frac{3\varepsilon_{11}c_3}{2} + c_1 \right) \right]. \quad (3.7)$$

$$s_{22} = s_{33} = \varepsilon_{11} \frac{(3c_3 + c_4) \varepsilon_{11} + (12c_3 + 3c_4 + c_5) \varepsilon_{33} + 2c_1 + c_2}{\lambda_1} + \frac{\varepsilon_{33} [(12c_3 + 2c_4) \varepsilon_{33} + 4c_1 + c_2]}{\lambda_1}. \quad (3.8)$$

Для рассматриваемого процесса справедливо

$$s_{22} = 0, s_{33} = 0,$$

что с учётом (17) приводит к требованию

$$\varepsilon_{11} [(3c_3 + c_4) \varepsilon_{11} + (12c_3 + 3c_4 + c_5) \varepsilon_{33} + 2c_1 + c_2] + \varepsilon_{33} [(12c_3 + 2c_4) \varepsilon_{33} + 4c_1 + c_2] = 0. \quad (3.9)$$

Если принять  $\Sigma_0$  в качестве площади поперечного сечения тела в начальном состоянии, а  $\Sigma$  – соответствующей площади в деформированном, то при использовании (16) можно записать условное напряжение  $P$  как отношение растягивающей силы к  $\Sigma_0$

$$P = \frac{s_{11}\Sigma}{\Sigma_0} = \frac{s_{11}\lambda_3^2\Sigma_0}{\Sigma_0} = s_{11}\lambda_3^2 = 2\lambda_1 \left[ \left( 6c_3 + 2c_4 + \frac{c_5}{2} \right) \varepsilon_{33}^2 + [(6c_3 + c_4) \varepsilon_{11} + 2c_1 + c_2] \varepsilon_{33} + \varepsilon_{11} \left( \frac{3\varepsilon_{11}c_3}{2} + c_1 \right) \right]. \quad (3.10)$$

Пусть в эксперименте получена зависимость удлинений материальных волокон  $\lambda_3^e (\lambda_1^e)$ . Тогда по формуле (13) могут быть найдены экспериментальные компоненты тензора Коши-Грина  $\varepsilon_{ii}^e$ , а константы  $c_i$  в соответствии с (18) должны удовлетворять равенству

$$\varepsilon_{11}^e [(3c_3 + c_4) \varepsilon_{11}^e + (12c_3 + 3c_4 + c_5) \varepsilon_{33}^e + 2c_1 + c_2] + \varepsilon_{33}^e [(12c_3 + 2c_4) \varepsilon_{33}^e + 4c_1 + c_2] = 0 \quad (3.11)$$

для всех точек  $j = 1, \dots, n$  зависимости  $\lambda_3^e (\lambda_1^e)$  с координатами  $((\lambda_1^e)_j; (\lambda_3^e)_j)$ .

Примем во внимание, что  $c_1, c_2$  определены (10) и необходимо найти только константы  $c_3, c_4, c_5$ .

В соответствии с методом и равенством (20) сформулируем функцию

$$f(c_3, c_4, c_5) = \sum_{j=1}^n \left( (\varepsilon_{11})_j [(3c_3 + c_4) (\varepsilon_{11})_j + (12c_3 + 3c_4 + c_5) (\varepsilon_{33})_j + 2c_1 + c_2] + (\varepsilon_{33})_j [(12c_3 + 2c_4) (\varepsilon_{33})_j + 4c_1 + c_2] \right)^2. \quad (3.12)$$

Неизвестные константы определим, найдя оптимальные минимальные значения функции (21) при условии  $\frac{\partial f}{\partial c_i} = 0$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial c_3} &= 2 \sum_{j=1}^n \left\{ \left[ 3 (\varepsilon_{11}^e)_j^2 + 12 (\varepsilon_{11}^e)_j (\varepsilon_{33}^e)_j + 12 (\varepsilon_{33}^e)_j^2 \right] \cdot \left( (3c_3 + c_4) (\varepsilon_{11})_j^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[ (12c_3 + 3c_4 + c_5) (\varepsilon_{33})_j + 2c_1 + c_2 \right] (\varepsilon_{11})_j + (\varepsilon_{33})_j \left[ (12c_3 + 2c_4) (\varepsilon_{33})_j + 4c_1 + c_2 \right] \right) \right\}, \\
\frac{\partial f}{\partial c_4} &= 2 \sum_{j=1}^n \left\{ \left[ (\varepsilon_{11}^e)_j^2 + 3 (\varepsilon_{11}^e)_j (\varepsilon_{33}^e)_j + 2 (\varepsilon_{33}^e)_j^2 \right] \cdot \left( (3c_3 + c_4) (\varepsilon_{11})_j^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[ (12c_3 + 3c_4 + c_5) (\varepsilon_{33})_j + 2c_1 + c_2 \right] (\varepsilon_{11})_j + (\varepsilon_{33})_j \left[ (12c_3 + 2c_4) (\varepsilon_{33})_j + 4c_1 + c_2 \right] \right) \right\}, \\
\frac{\partial f}{\partial c_5} &= 2 \sum_{j=1}^n \left\{ (\varepsilon_{11}^e)_j (\varepsilon_{33}^e)_j \cdot \left( (3c_3 + c_4) (\varepsilon_{11})_j^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[ (12c_3 + 3c_4 + c_5) (\varepsilon_{33})_j + 2c_1 + c_2 \right] (\varepsilon_{11})_j + (\varepsilon_{33})_j \left[ (12c_3 + 2c_4) (\varepsilon_{33})_j + 4c_1 + c_2 \right] \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Решив полученную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (22) относительно неизвестных  $c_i$ , конкретизируем определяющее соотношение (9). СЛАУ (22) можно расширить, добавив в функцию (21) в соответствии с методом наименьших квадратов условие (19).

## 4. Численное моделирование

Проверка работоспособности предложенной методики требует наличия экспериментальных данных, представленных в виде зависимости  $\lambda_3^e(\lambda_1^e)$ . Пусть в качестве таких выступают данные численного эксперимента, осуществленного с помощью моделирования процесса одноосного одноосного растяжения в системе прочностных расчётов CAE Fidesys и выборки из результатов расчета кривой  $\lambda_3^e(\lambda_1^e)$ .

Очевидно, что реализация и вид определяющих соотношений, используемых в CAE Fidesys для нелинейно-упругих расчетов, может отличаться от исследуемого в работе определяющего соотношения Мурнагана. Учитывая данный факт и не требуя полного совпадения всех характеристик напряженно-деформируемого состояния между теоретическим и численным расчётах, в численном эксперименте выберем определяющее соотношение, задаваемое классическими модулями упругости и асимптотически вырождающееся в закон Гука при малых деформациях. Данный выбор обусловлен также вхождением модулей упругости в качестве известных констант в определяющее соотношение Мурнагана и тем, что данное соотношение также вырождается в закон Гука при малых деформациях.

Для оценки корректности предложенного метода была написана программа на языке программирования python, с помощью которой проведен численный эксперимент. В автоматизированном запуске на первом этапе происходило численное моделирование рассматриваемой задачи, формировались входные экспериментальные данные для предлагаемой методики конкретизации, затем осуществлялось решение СЛАУ (22) и вывод значений итоговых материальных констант.

Численный эксперимент проводился в отечественном пакете прочностного анализа CAE Fidesys. Было рассмотрено удлинение куба со стороной 0.1 вдоль оси Oх на 0.07 (рис. 2). Материал – резина, характеризующая параметром Ламе  $\lambda = 9.866e7$ , модулем сдвига  $\mu = 2.013e6$ . Граничные условия:  $u_y|_{ABEF} = 0$ ,  $u_x|_{EFGH} = 0$ ,  $u_z|_{AEHD} = 0$ ,  $u_x|_{ABCD} = 0.07$ . Параметры модели приведены в безразмерных величинах. Сетка: 8 гексаэдров второго порядка (81 узел). Настройки расчета: статика, упругость, геометрическая нелинейность, 50 шагов нагружения.

Соответствующий набор команд в CAE Fidesys представлен ниже:

```

reset
brick x 0.1
volume 1 size0.05
mesh volume 1
create material 1
modify material 1 set property 'LAME_MODULUS' value 9.866e7
modify material 1 set property 'SHEAR_MODULUS' value 2.013e6
block 1 add volume 1
block 1 material 1 cs 1 element solid order 2
create displacement on surface 2 dof 3 fix
create displacement on surface 3 dof 2 fix
create displacement on surface 4 dof 1 fix
create displacement on surface 6 dof 1 fix 0.07
analysis type static elasticity findefs dim3
nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 50 startloadsteps 50 maxloadsteps 1000
tolerance 0.00001 targetiter 5

```

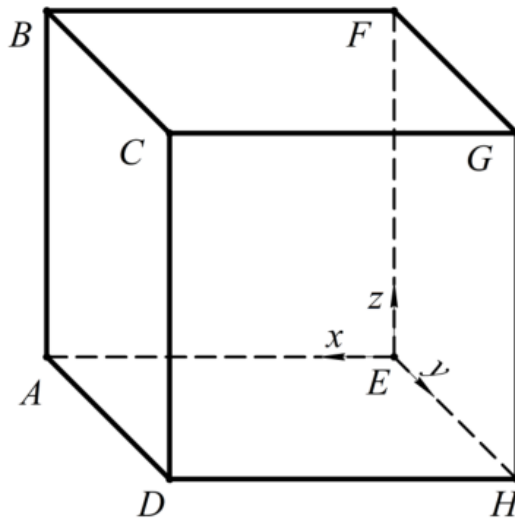


Рис. 2: Геометрическая модель численного эксперимента

С помощью Fidesys Python Api выполнялись последовательно запуск задачи на расчет с помощью представленного набора команд и считывание полученных результатов для компонент тензора деформаций  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{33}$  для каждого шага нагружения. Из полученных данных вычислялись соответственно экспериментальные значения  $\lambda_1$ ,  $\lambda_3$ . Затем с применением библиотеки `sympy` решалась СЛАУ (22), в результате чего были получены неизвестные константы  $c_i$ ,  $i = 3, 4, 5$ . Вывод результатов разработанной программы:



Start at 2024-11-18 20:21:24.626373

Running task in CAE Fidesys...

Extracting calculation results...

Equation 1: Eq(10.2179373260\*x + 4.87991703918\*y - 2.78290480165\*z + 768622280.754413, 0)

Equation 2: Eq(4.87991703918\*x + 2.33611280175\*y - 1.34652941099\*z + 372125246.047291, 0)

Equation 3: Eq(-2.78290480165\*x - 1.34652941099\*y + 0.814024093363\*z - 225555009.691007, 0)

Determinant: 6.30046065737133e-5

c3: -12588850.6353443, c4: 41027550.6382964, c5: 301915191.958035

Finish at 2024-11-18 20:21:39.705914. Elapsed time: 0:00:15.079541 s.

Рассмотрим, как сочетаются исходные экспериментальные данные с теоретическими для рассчитанного набора констант. Для этого необходимо получить для всех точек  $j = 1, \dots, 50$  зависимости  $\lambda_3^e(\lambda_1^e)$  с координатами  $((\lambda_1^e)_j; (\lambda_3^e)_j)$ . Используя экспериментальные значения  $\lambda_1$ , решается уравнение (17) относительно  $s_{22}$ , в результате чего определяются теоретические значения для  $\lambda_3$ .

В таб. 1 приведены полученные результаты для выборки точек  $j = 1, 18, 36, 50$ , а также вычислены соответственно относительные погрешности, которые не превышают 0.01%.

Таблица 1: Зависимости  $\lambda_3(\lambda_1)$

Экспериментальные значения для $\lambda_1$	Экспериментальные значения для $\lambda_3$	Теоретические значения для $\lambda_3$	Относительная погрешность, %
1	0.993210696873648	0.99321114490846	4.511e-5
1.25	0.895722855364317	0.89572469498660	2.054e-4
1.5	0.818744046975864	0.81874448715122	5.376e-5
1.7	0.771044603726549	0.77103530040715	1.207e-3

Таким образом, получили зависимости  $\lambda_3^e(\lambda_1^e)$  и  $\lambda_3^{theory}(\lambda_1^e)$ , представленные на рис.3.

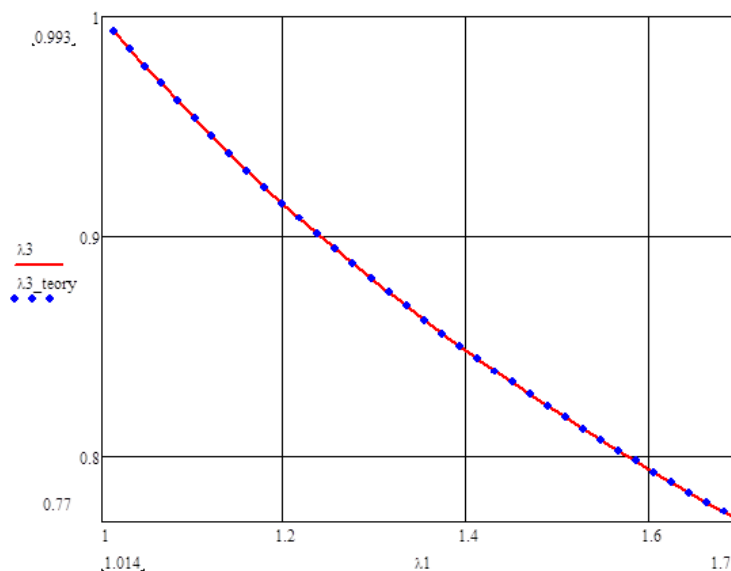


Рис. 3: Графическое представление полученных зависимостей  $\lambda_3^e(\lambda_1^e)$  и  $\lambda_3^{theory}(\lambda_1^e)$

Из рис. 3 и таб. 1 видно, что полученные зависимости численного эксперимента и теоретических вычислений хорошо сочетаются. Следовательно, методика корректна.

## 5. Заключение

В работе предложена методика конкретизации определяющего соотношения нелинейной теории упругости, основанного на представлении свободной энергии функцией Мурнагана. Методика построена на минимизации отклонения теоретической кривой, определяемой зависимостью поперечных удлинений от осевых в опыте на одноосное однородное растяжение, от экспериментальной. Осуществлена проверка предложенной методики на данных численного эксперимента, полученных в результате применения системы прочностных расчетов САЕ Fidesys. Предложенная методика может быть расширена с помощью минимизации отклонения экспериментальных и теоретических зависимостей условного напряжения от осевого удлинения.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cowley J., Mulholland A., Gachagan A. A nonlinear elasticity approach to modelling the collapse of a shelled microbubble // IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications). 2017. V. 82. P. 781-801. <https://doi.org/10.1093/imamat/hxx013>
2. Andreeva Y. Y., Zhukov B. A. Exact analytical solutions of a problem of the nonlinear theory of elasticity for two potentials of deformation energy of an incompressible material // University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2018. Vol. 2, № 46. P. 64-76. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2018-2-7>
3. Толоконников Л. А., Маркин А. А. Определяющие соотношения при конечных деформациях // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Межвузов. сб. трудов / Калинин. политех. ин-т. Калинин: Изд-во КГУ, 1986. С. 49-57.

4. Бровко Г. Л. Определяющие соотношения механики сплошной среды: Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.: Наука, 2017. 432 с. ISBN: 978-5-02-040054-2
5. Anand L. A constitutive model for compressible elastomeric solids // Computational Mechanics. 1996. Vol. 18. P. 339–355. <https://doi.org/10.1007/BF00376130>
6. Коробейников С. Н., Олейников А. А. Лагранжева формулировка определяющих соотношений материала Генки // Дальневосточный математический журнал. 2011. Т. 11. № 2. С. 155–180. ISSN: 1608-845X
7. Козлов В. В., Маркин А. А. Анализ определяющих соотношений изотропных нелинейно-упругих сжимаемых материалов // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 133-143. ISSN: 2071-6176
8. Толоконников Л. А. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейной теории упругости // ПММ. 1956. Т. 20. С. 439–444.
9. Latorre M., Montans F. J. On the interpretation of the logarithmic strain tensor in an arbitrary system of representation // International Journal of Solids and Structures. 2014. 51. P. 1507–1515. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.041>
10. Rajagopal K. R., Rodriguez C. A mathematical justification for nonlinear constitutive relations between stress and linearized strain // Mathematical Physics. 2024. 2405.20977. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.20977>
11. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
12. Маркин А. А., Христич Д.В. Нелинейная теория упругости: учеб. пособие: 2-е изд. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007 г. 92 с. ISBN: 5-7679-1118-9: 4500.00
13. Fu Y. B., Ogden R. W. Nonlinear Elasticity: Theory and Applications. Cambridge: CUP, 2001. P. 525. ISBN 10: 0521796954
14. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
15. Маркин А. А., Козлов В. В. Вопросы конкретизации определяющих соотношений нелинейной теории упругости на основе рассмотрения одноосного однородного растяжения // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. Вып. 4. С. 137-143.
16. Чиков В. С. Экспериментальные методики конкретизации определяющих соотношений с использованием цилиндрических образцов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 2(36). С. 38–49. ISSN: 2073-5499
17. Астапов В. Ф., Маркин А. А., Соколова М. Ю. Определение упругих свойств материалов из опытов на сплошных цилиндрах // Известия РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 104–111.
18. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 270 с.
19. Murnaghan F. D. Finite deformation of an elastic solid. John Wiley & Sons, Inc., 1951. 140 p.
20. Charnes A., Frome E. L., Yu P. L. The Equivalence of Generalized Least Squares and Maximum Likelihood Estimates in the Exponential Family // Journal of the American Statistical Association. 1976. Vol. 71, № 353. P. 169-171. <https://doi.org/10.1080/01621459.1976.10481508>

21. Wolberg J. Data Analysis Using the Method of Least Squares: Extracting the Most Information from Experiments. Heidelberg: Springer Berlin, 2006. P. 250. <https://doi.org/10.1007/3-540-31720-1>
22. Aldrich J. Doing Least Squares: Perspectives from Gauss and Yule // International Statistical Review. 1998. Vol. 66, № 1. P. 61-81. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1998.tb00406.x>
23. Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В. Прочностной анализ: Фидесис в руках инженера. М.: ЛЕНАНД, 2015. 408 с. ISBN: 9785971025252
24. Левин В. А., Вершинин А. В. Нелинейная вычислительная механика прочности. Том 2. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. Под общ. ред. В. А. Левина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. 544 с. ISBN: 9785922116329
25. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Fox D. D. The finite element method for solid and structural mechanics. 7-th edition. Elsevier, 2014. P. 624. ISBN: 9781856176347
26. Маркин А. А., Сотников К. Ю. Механика сплошной среды: Учеб. пособие. Тула: Тул. гос. ун-т, 2003. 132 с.
27. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды: Учебник, 3-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
28. Brugger K. Thermodynamic Definition of Higher Order Elastic Coefficients // Physical Review. 1964. 133(6A). A1611. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.133.A1611>

## REFERENCES

1. Cowley, J., Mulholland, A. & Gachagan, A. 2017, "A nonlinear elasticity approach to modelling the collapse of a shelled microbubble", *IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications)*, vol. 82, pp. 781-801. <https://doi.org/10.1093/imat/hxx013>
2. Andreeva, Y. Y. & Zhukov B. A. 2018, "Exact analytical solutions of a problem of the nonlinear theory of elasticity for two potentials of deformation energy of an incompressible material", *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*, vol. 2, no. 46, pp. 64-76. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2018-2-7>
3. Tolokonnikov, L. A. & Markin, A. A. 1986, "Determining relations at finite deformations", *Problems of deformable solid mechanics. Interuniversity collection of works / Kalinin Polytechnic Institute. Kalinin: Izd-vo KSU*, pp. 49-57.
4. Brovko, G. L 2017. *Defining relations of continuum mechanics: Development of mathematical apparatus and foundations of the general theory*. Nauka, Moscow, pp. 432. ISBN: 978-5-02-040054-2
5. Anand, L. 1996, "A constitutive model for compressible elastomeric solids", *Computational Mechanics*, vol. 18, pp. 339-355. <https://doi.org/10.1007/BF00376130>
6. Korobeinikov, S. N. & Oleinikov, A. A. 2011, "Lagrangian formulation of the defining relations of the Genki material", *Far Eastern Mathematical Journal*, vol. 11, no. 2, pp. 155-180. ISSN: 1608-845X

7. Kozlov, V. V. & Markin, A. A. 2014, “Analysis of the determining relations of isotropic nonlinear-elastic compressible materials”, *Izvestiya Tula State University. Natural Sciences*, vol. 1, no. 1, pp. 133-143. ISSN: 2071-6176
8. Tolokonnikov, L. A. 1956, “On the relation between stresses and strains in the nonlinear theory of elasticity”, *PMM*, vol. 20, pp. 439-444.
9. Latorre, M. & Montans, F. J. 2014, “On the interpretation of the logarithmic strain tensor in an arbitrary system of representation”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, pp. 1507–1515. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.041>
10. Rajagopal, K. R. & Rodriguez, C. 2024, “A mathematical justification for nonlinear constitutive relations between stress and linearized strain”, *Mathematical Physics*, 2405.20977. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.20977>
11. Lurie, A. I 1980. *Nonlinear Theory of Elasticity*. Nauka, Moscow, pp. 512.
12. Markin, A. A. & Khristich, D. V 2007. *Nonlinear theory of elasticity: textbook: 2nd ed.* Izd-vo TulSU, Tula, pp. 92. ISBN: 5-7679-1118-9: 4500.00
13. Fu, Y. B. & Ogden R. W 2001. *Nonlinear Elasticity: Theory and Applications*. CUP, Cambridge, pp. 525. ISBN 10: 0521796954
14. Novozhilov, V. V 1948. *Fundamentals of Nonlinear Theory of Elasticity*. Gostekhizdat, Moscow, pp. 211.
15. Markin. A. A. & Kozlov, V. V. 2015, “Questions of concretization of the defining relations of the nonlinear theory of elasticity on the basis of consideration of uniaxial homogeneous stretching”, *Izvestiya Tula State University. Natural Sciences*, vol. 4, pp. 137-143.
16. Chikov, V. S. 2018, “Experimental methods of specifying the defining relations using cylindrical specimens”, *Bulletin of I. Y. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of limit state*, no. 2(36), pp. 38-49. ISSN: 2073-5499
17. Astapov, V. F., Markin, A. A. & Sokolova, M. Yu. 2002, “Determination of elastic properties of materials from experiments on solid cylinders”, *Izvestia RAS. MTT*, no. 1, pp. 104-111.
18. Guz, A. N. 1973. *Stability of elastic bodies under finite deformations*. Nauk. dumka, Kyiv, pp. 270.
19. Murnaghan F. D 1951. *Finite deformation of an elastic solid*. John Wiley & Sons, Inc., pp. 140.
20. Charnes, A., Frome, E. L. & Yu P. L. 1976, “The Equivalence of Generalized Least Squares and Maximum Likelihood Estimates in the Exponential Family”, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 71, no. 353, pp. 169-171. <https://doi.org/10.1080/01621459.1976.10481508>
21. Wolberg, J. 2006. *Data Analysis Using the Method of Least Squares: Extracting the Most Information from Experiments*. Springer Berlin, Heidelberg, pp. 250. <https://doi.org/10.1007/3-540-31720-1>
22. Aldrich, J. 1998, “Doing Least Squares: Perspectives from Gauss and Yule”, *International Statistical Review*, vol. 66, no. 1, pp. 61-81. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1998.tb00406.x>
23. Morozov, E. M., Levin, V. A. & Vershinin, A. V 2015. *Strength analysis: Fidesys in the hands of an engineer*. LENAND, Moscow, pp. 408. ISBN: 9785971025252

- 
24. Levin, V. A. & Vershinin, A. V 2015. *Nonlinear Computational Mechanics of Strength. Vol. 2. Numerical Methods. Parallel Computing on Computers*. FIZMATLIT, Moscow, pp. 544. ISBN: 9785922116329
  25. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. & Fox D. D 2014. *The finite element method for solid and structural mechanics. 7-th edition*. Elsevier, pp. 624. ISBN: 9781856176347
  26. Markin, A. A. & Sotnikov K. Yu 2003. *Mechanics of Continuous Medium: Textbook*. Tula State University, Tula, pp. 132.
  27. Илyшин, А. А. 1990. *Mechanics of Continuous Medium: Textbook*. 3rd ed. Izd-vo MSU, Moscow, pp. 310.
  28. Brugger, K. 1964, "Thermodynamic Definition of Higher Order Elastic Coefficients", *Physical Review*, vol. 133(6A), A1611. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.133.A1611>

Получено: 27.02.2025

Принято в печать: 17.10.2025