ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 4.

УДК: 517.9 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-288-301

Классификация кубических многочленов в нелинейном методе угловых пограничных функций

А. И. Денисов, И. В. Денисов

Денисов Алексей Игоревич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: den_tspu@mail.ru
Денисов Игорь Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: den_tspu@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются нелинейные сингулярно возмущенные параболические уравнения в областях с угловыми точками границы. Для построения асимптотики решения применяется нелинейный метод угловых пограничных функций. Предполагается, что в задачах, определяющих главные члены угловой части асимптотики решения, нелинейности представляют собой кубические многочлены. Существование решений этих задач основано на методе верхних и нижних барьеров, построение которых представляет основную трудность. В частности, эта трудность связана с разнообразием поведения кубических многочленов. В работе предложена классификация, основанная на выделении промежутков определенного характера монотонности и направления выпуклости.

Ключевые слова: нелинейные краевые задачи, барьерные функции, функциональные неравенства.

Библиография: 32 названия.

Для цитирования:
Денисов, А. И., Денисов. И. В. Классификация кубических многочленов в нелинейном методе угловых пограничных функций // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 288–301.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 4.

UDC: 517.9 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-288-301

Classification of cubic polynomials in the nonlinear method of angular boundary functions

A. I. Denisov, I. V. Denisov

Denisov Alexey Igorevich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: den_tspu@mail.ru
Denisov Igor Vasil'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: den_tspu@mail.ru

Abstract

Nonlinear singularly perturbed parabolic equations in domains with angular boundary points are considered. The nonlinear method of angular boundary functions is used to construct the asymptotics of the solution. It is assumed that in problems determining the main terms of the angular part of the asymptotics of the solution, the nonlinearities are cubic polynomials. The existence of solutions to these problems is based on the method of upper and lower barriers, the construction of which is the main difficulty. In particular, this difficulty is related to the diversity of behavior of cubic polynomials. The paper proposes a classification based on the allocation of intervals of a certain nature of monotonicity and direction of convexity.

Keywords: nonlinear boundary value problems, barrier functions, functional inequalities.

Bibliography: 32 titles.

For citation:

Denisov, A. I., Denisov, I. V. 2025, “Classification of cubic polynomials in the nonlinear method of angular boundary functions” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 288–301.

1. Введение

В прямоугольнике $\Omega = \{(x,t)\,|\,0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рассматривается начально-краевая задача вида

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u,x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,0,\varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2}$$

$$u(0,t,\varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1,t,\varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

где ε– малый положительный параметр.

Предполагаются выполненными следующие стандартные условия.

Условие 1. *Функции $F(u,x,t,\varepsilon)$, $\varphi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими и в угловых точках прямоугольника Ω выполняются условия согласованности начально-краевых значений*

$$\varphi(0) = \psi_1(0), \quad \varphi(1) = \psi_2(0).$$

Условие 2. *Вырожденное уравнение $F(u,x,t,0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$ имеет решение, которое обозначается как $u = \overline{u}_0(x,t)$.*

Условие 3. *Производная $F'_u(\overline{u}_0\,(x,t),x,t,0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$.*

Условие 4. *Начальная задача*

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\overline{u}_0(x,0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x,0) = \varphi(x) - \overline{u}_0(x,0),$$

имеет решение $\Pi_0(x,\tau)$ при $\tau \geqslant 0$, удовлетворяющее условию $\Pi_0(x,\infty) = 0$ (здесь параметр $x \in [0,1]$).

Условие 5. *Для систем*

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2 \frac{dz_2}{dy} = F(\overline{u}_0(k,t) + z_1, k, t, 0), \tag{4}$$

прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \overline{u}_0(k,t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1,z_2) = (0,0)$ при $y \to \infty$ (здесь t - параметр, $k = 0$ или 1).

Для построения асимптотики решения применяется нелинейный метод угловых пограничных функций (см. [1]). Решение задачи (1)–(3) ищется в виде асимптотического ряда по параметру $\varepsilon \to 0$, состоящего из шести частей:

$$u(x,t,\varepsilon) = \overline{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*). \tag{5}$$

Здесь $\overline{u}$– регулярная часть асимптотики, играющая роль внутри прямоугольника Ω, Π, Q и Q^*– погранслойные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника Ω соответственно $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$, P и P^*– угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника Ω соответственно $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

Формальная процедура построения регулярной части асимптотики и погранслойных функций хорошо отработана и подробно описана в [2]. Основные трудности связаны с задачей определения главного члена угловой части асимптотики $P_0(\xi, \tau)$, которая ставится в первой четверти $\mathbb{R}^2_+$ плоскости растянутых переменных (ξ, τ) и имеет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_0}{\partial \tau} = F\left(\overline{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0\right) - F\left(\overline{u}_0 + \Pi_0\right) - F\left(\overline{u}_0 + Q_0\right), \tag{6}$$

$$P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau), \quad P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \tag{7}$$

$$P_0(\xi, \tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty, \tag{8}$$

где

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$$

– растянутые переменные. Для краткости использованы обозначения

$$F(u) = F(u, 0, 0, 0), \quad \overline{u}_0 = \overline{u}_0(0, 0), \quad \Pi_0 = \Pi_0(0, \tau), \quad Q_0 = Q_0(\xi, 0).$$

При исследовании задачи (7)–(9) удобно пользоваться обозначением

$$L(Z) := a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F\left(\overline{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z\right) + F\left(\overline{u}_0 + \Pi_0\right) + F\left(\overline{u}_0 + Q_0\right).$$

Тогда задача принимает вид

$$L(P_0) = 0 \quad \text{в области} \quad \mathbb{R}^2_+, \tag{9}$$

$$P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau), \quad P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \tag{10}$$

$$P_0(\xi, \tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty. \tag{11}$$

Решение задачи (9)–(11) основано на методе верхних и нижних барьеров (см. [3–5]), который заключается в том, что задача

$$L(Z) = 0 \quad \text{в области} \;\; D,$$

$$Z = h \quad \text{на границе} \;\; \partial D$$

имеет решение Z в границах

$$Z_- \leqslant Z \leqslant Z_+,$$

если в области D выполняются неравенства

$$L(Z_+) \leqslant 0, \quad L(Z_-) \geqslant 0, \quad Z_- \leqslant Z_+,$$

а на ее границе

$$Z_- \leqslant h \leqslant Z_+.$$

Построение барьеров представляет основную трудность и зависит от вида функции $F(u)$. В дополнение к условиям 1–5 предполагаем, что в задачах (9)–(11) нелинейности $F(u)$ представляют собой кубические многочлены.

2. Классификация кубических многочленов в окрестностях угловых точек границы

Поведение кубических многочленов в окрестностях угловых точек границы может быть весьма разнообразным. На разрешимость задачи (9)–(11) существенное влияние оказывает характер монотонности и выпуклости функции $F(u)$, поэтому именно эти свойства возьмем за основу классификации.

Прежде всего отметим, что $\overline{u}_0$ является корнем функции $F(u)$. Нас интересуют кубические многочлены, которые возрастают и не меняют направления выпуклости на промежутке от корня $\overline{u}_0$ до граничного значения φ, причем $\overline{u}_0 < \varphi$. Таким образом, функция $F(u)$ должна удовлетворять следующим условиям:

1. Функция $F(u)$ является кубическим многочленом с корнем $\overline{u}_0$:
$$F(u) = A(u-\overline{u}_0)\left(u^2+pu+q\right). \qquad (12);$$

2. Функция $F(u)$ возрастает на промежутке от корня $\overline{u}_0$ до граничного значения φ, причем $\overline{u}_0 < \varphi$;

3. Единственная точка перегиба функции $F(u)$ не принадлежит промежутку $[\overline{u}_0, \varphi]$.

Кроме этого будем учитывать два индикатора: знак старшего коэффициента многочлена $F(u)$ и наличие точек экстремума. Перечисленные свойства и индикаторы приводят к следующим возможным случаям.

Случай (A). *Многочлен $F(u)$ удовлетворяет условиям 1), 2), его старший коэффициент положителен и точка перегиба γ расположена левее корня $\overline{u}_0$.*

Случай (B). *Многочлен $F(u)$ удовлетворяет условиям 1), 2), не имеет точек экстремума, его старший коэффициент положителен и точка перегиба γ расположена правее граничного значения φ.*

Случай (C). *Многочлен $F(u)$ удовлетворяет условиям 1), 2), имеет точки экстремума, его старший коэффициент положителен и точка перегиба γ расположена правее граничного значения φ.*

Случай (D). *Многочлен $F(u)$ удовлетворяет условиям 1), 2), его старший коэффициент отрицателен и точка перегиба γ расположена левее корня $\overline{u}_0$.*

Случай (E). *Многочлен $F(u)$ удовлетворяет условиям 1), 2), его старший коэффициент отрицателен и точка перегиба γ расположена правее граничного значения φ.*

В случае (A) во всей области $\xi > 0$, $\tau > 0$ работают барьеры
$$-2\sqrt{\Pi_0(0,\tau)Q_0(\xi,0)} \le P_0(\xi,\tau) \le 0$$
(см. [1, 6]).

В случае (B) в качестве представителя рассмотрен многочлен
$$F(u) = u^3 - \overline{u}_0^3, \quad \textit{где} \quad \overline{u}_0 < 0, \quad \textit{и} \quad \gamma = 0.$$

При условии на граничное значение φ:
$$\overline{u}_0 < \varphi \le \frac{\overline{u}_0}{2} < 0,$$
во всей области $\xi > 0$, $\tau > 0$ работают барьеры
$$-C\exp(-k(\xi+\tau)) \le P_0(\xi,\tau) \le -\frac{\Pi_0(0,\tau)Q_0(\xi,0)}{\varphi-\overline{u}_0},$$

где C и k – некоторые положительные числа (см. [7]).

Если же

$$\frac{\overline{u}_0}{2} < \varphi < 0,$$

то для построения и нижнего и верхнего барьеров область $\xi > 0$, $\tau > 0$ приходится разбивать на части, в каждой подобласти строить свои барьеры с учетом непрерывности на общих частях границы, а затем проводить сглаживание кусочно-непрерывных барьеров (см. [8]).

3. Построение барьерных функций в случае (C)

В случае (C), когда многочлен $F(u)$ удовлетворяет условиям 1), 2), имеет точки экстремума, его старший коэффициент положителен и точка перегиба γ расположена правее граничного значения φ, имеем

$$F(u) = A(u-\overline{u}_0)\left(u^2+pu+q\right), \quad A>0, \quad \overline{u}_0 < \varphi < u_1 < \gamma = \frac{\overline{u}_0 - p}{3} < u_2.$$

Здесь u_1 – точка максимума, а u_2 – точка минимума, которые можно определить, приравняв нулю производную

$$F'(u) = A\left[3u^2 + 2(p-\overline{u}_0)u + q - \overline{u}_0 p\right].$$

Дискриминант выражения, стоящего в квадратных скобках, должен быть положительным:

$$D = 4(p-\overline{u}_0)^2 - 12(q-\overline{u}_0 p) = 4\left[(p-\overline{u}_0)^2 - 3(q-\overline{u}_0 p)\right] > 0.$$

Нули производной определяют две точки экстремума

$$u_1 = \frac{\overline{u}_0 - p - \sqrt{(p-\overline{u}_0)^2 - 3(q-\overline{u}_0 p)}}{3} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{\overline{u}_0 - p + \sqrt{(p-\overline{u}_0)^2 - 3(q-\overline{u}_0 p)}}{3}.$$

Таким образом, случай (C) предполагает рассмотрение кубических многочленов вида

$$F(u) = A(u-\overline{u}_0)\left(u^2+pu+q\right), \quad A>0, \quad \overline{u}_0 < \varphi < \frac{\overline{u}_0 - p - \sqrt{(p-\overline{u}_0)^2 - 3(q-\overline{u}_0 p)}}{3}, \tag{13}$$

где

$$(p-\overline{u}_0)^2 - 3(q-\overline{u}_0 p) > 0.$$

Предложение 1. *В случае (C) функция*

$$Z_+(\xi,\tau) = -\frac{\Pi_0(0,\tau)Q_0(\xi,0)}{\varphi - \overline{u}_0}$$

является верхним барьером решения задачи (9)–(11) тогда и только тогда, когда граничное значение φ удовлетворяет дополнительному условию

$$\overline{u}_0 < \varphi \le \overline{u}_0 + \frac{\overline{u}_0^2 + p\overline{u}_0 + q}{-2(2\overline{u}_0 + p)}.$$

Доказательство. Необходимо доказать неравенство

$$F\left(\overline{u}_0 + s + t - \frac{st}{\varphi - \overline{u}_0}\right) - \left(1 - \frac{s}{\varphi - \overline{u}_0}\right)F(\overline{u}_0 + t) - \left(1 - \frac{t}{\varphi - \overline{u}_0}\right)F(\overline{u}_0 + s) \ge 0, \tag{14}$$

где $s = \Pi_0(0,\tau)$ и $t = Q_0(\xi,0)$ принадлежат промежутку $(0, \varphi - \overline{u}_0]$.

Трансформируем функцию $F(u)$ в функцию $g(x)$:

$$g(x) = F\left(\varphi - (\varphi - \overline{u}_0)x\right) =$$
$$= A(\varphi - (\varphi - \overline{u}_0)x - \overline{u}_0)\left[(\varphi - (\varphi - \overline{u}_0)x)^2 + p(\varphi - (\varphi - \overline{u}_0)x) + q\right] =$$
$$= -A(\varphi - \overline{u}_0)^3(x-1)\left[x^2 - \frac{2\varphi + p}{\varphi - \overline{u}_0}x + \frac{q + p\varphi + \varphi^2}{(\varphi - \overline{u}_0)^2}\right].$$

Таким образом, имеем

$$g(x) = -A(\varphi - \overline{u}_0)^3(x-1)(x^2 + p_1 x + q_1),$$

где

$$p_1 = -\frac{2\varphi + p}{\varphi - \overline{u}_0}, \quad q_1 = \frac{\varphi^2 + p\varphi + q}{(\varphi - \overline{u}_0)^2}.$$

Здесь $\varphi^2 + p\varphi + q > 0$, так как в противном случае $F(\varphi) = A(\varphi - \overline{u}_0)(\varphi^2 + p\varphi + q) \leq 0$, что противоречит возрастанию функции $F(u)$ на промежутке $[\overline{u}_0, \varphi]$. Поэтому $q_1 > 0$.

При трансформации функции $F(u)$ в функцию $g(x)$ точка $\overline{u}_0$ переходит в точку 1, а точка φ – в точку 0. Соответственно, отрезок $[\overline{u}_0,\, \varphi]$, меняя ориентацию, переходит в отрезок $[0,\, 1]$. Положительность производной $F'(u)$ на промежутке $[\overline{u}_0,\, \varphi]$ влечет отрицательность производной $g'(x)$ на промежутке $[0,\, 1]$. Направление выпуклости функции $g(x)$ на промежутке $[0,\, 1]$ оказывается таким же, как у функции $F(u)$ на промежутке $[\overline{u}_0,\, \varphi]$. Многочленам $F(u)$, у которых точка перегиба γ расположена правее граничного значения φ, соответствуют многочлены $g(x)$ с точкой перегиба λ, расположенной левее точки $x = 0$.

У функции $g(x)$ будет две точки экстремума:

$$x_1 = \frac{1 - p_1 - \sqrt{(p_1 - 1)^2 - 3(q_1 - p_1)}}{3}$$

– точка минимума и

$$x_2 = \frac{1 - p_1 + \sqrt{(p_1 - 1)^2 - 3(q_1 - p_1)}}{3}$$

– точка максимума. Здесь подкоренное выражение

$$(p_1 - 1)^2 - 3(q_1 - p_1) > 0.$$

Ноль, как образ граничного значения, должен быть больше этих точек экстремума:

$$\frac{1 - p_1 + \sqrt{(p_1 - 1)^2 - 3(q_1 - p_1)}}{3} < 0.$$

Последнее неравенство приводит к условию

$$1 < p_1 < q_1,$$

а положительность подкоренного выражения эквивалентна условию

$$1 < p_1 < 1 + \sqrt{3(q_1 - p_1)}.$$

Неравенство (14) переходит в неравенство

$$g(xy) - xg(y) - yg(x) \geqslant 0, \quad x, y \in [0, 1). \tag{15}$$

Для доказательства неравенства (15) величина старшего коэффициента многочлена $g(x)$ не имеет значения. Поэтому можно считать, что старший коэффициент равен -1. Собирая все вместе, получаем функцию

$$g(x) = -(x-1)(x^2+p_1x+q_1), \quad \text{где} \quad 1 < p_1 < \min\left(q_1, 1+\sqrt{3(q_1-p_1)}\right). \tag{16}$$

В неравенстве (15) делаем замену переменных

$$u = x+y, \quad v = xy.$$

Левая часть неравенства принимает вид

$$g(xy) - xg(y) - yg(x) = g(v) + v(u^2-2) + (p_1-1)uv + 2(q_1-p_1)v - q_1u.$$

В результате замены переменных единичный квадрат $0 \leqslant x,\ y < 1$ переходит в область D плоскости $(u,\,v)$. Границей области D являются образы границы треугольника, ограниченного прямыми $y=0$, $x=1$ и $y=x$:

1) сторона $y=0,\ 0 \leqslant x < 1$ переходит в линию $v=0,\ u=y$, или $v=0,\ 0 \leqslant u < 1$;

2) сторона $x=1,\ 0 \leqslant y < 1$ переходит в линию $u=1+y,\ v=y$, или $v=u-1,\ 1 \leqslant v < 2$;

3) сторона $y=x,\ 0 \leqslant x < 1$ переходит в линию $u=2x,\ v=x^2$, или $v=u^2/4,\ 0 \leqslant u < 2$.

Таким образом, получается область область D, ограниченная линиями

$$\begin{cases} 0 \leqslant u < 1, & v = 0 \\ v = u-1, & 1 \leqslant u < 2 \\ v = u^2/4, & 0 \leqslant u < 2 \end{cases}.$$

Точки (x,y) и (y,x), симметричные относительно диагонали $y=x$, переходят в одну и ту же точку (u,v). Образом единичного квадрата $0 \leqslant x,\ y < 1$ является область D, накрываемая дважды.

В области D нужно доказать неравенство

$$h(u,v) = g(v) + v(u^2-2) + (p_1-1)uv + 2(q_1-p_1)v - q_1u \geqslant 0.$$

Исследуем функцию $h(u,v)$ на экстремум в области D. Вычисляем производные:

$$\frac{\partial}{\partial u}h(u,v) = 2uv + (p_1-1)v - q_1, \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2}h(u,v) = 2v,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}h(u,v) = g'(v) + u^2 - 4v + (p_1-1)u + 2(q_1-p_1), \quad \frac{\partial^2}{\partial v^2}h(u,v) = g''(v) - 4.$$

Производная $g''(x) < 0$ при $x > 0$, поэтому в области D производные

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}h(u,v) > 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial v^2}h(u,v) < 0,$$

и функция $h(u,v)$ не имеет точек экстремума.

На границе области D функция $h(u,v)$ принимает следующие значения. На участке $0 \leqslant u \leqslant 1, \quad v=0$, значения:

$$h(u,0) = g(0) - q_1u \geq g(0) - q_1 = g(0) - g(0) = 0.$$

На участке $u = v+1, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1$, значения:

$$h(v+1,v) = g(v) + v((v+1)^2 - 2v) + (p_1-1)(v+1)v + 2(q_1-p_1)v - q_1(v+1) =$$

$$= g(v) + \left(v^3 + (p_1-1)v^2 - q_1\right) = g(v) - g(v) = 0.$$

На участке $v = u^2/4, \quad 0 \leqslant u \leqslant 2$, значения:

$$h\left(u, \frac{u^2}{4}\right) = g\left(\frac{u^2}{4}\right) + \left(u^2 - 2\frac{u^2}{4}\right)\frac{u^2}{4} + (p_1-1)u\frac{u^2}{4} + 2(q_1-p_1)\frac{u^2}{4} - q_1 u =$$

$$= -\left(\frac{u^2}{4} - 1\right)\left(\left(\frac{u^2}{4}\right)^2 + p_1\left(\frac{u^2}{4}\right) + q_1\right) + \frac{1}{8}u(u-2)\left(u^2 + 2p_1 u + 4q_1\right) =$$

$$= -\frac{1}{64}\left(u^2-4\right)\left(u^4 + 4p_1u^2 + 16q_1\right) + \frac{1}{8}u(u-2)\left(u^2 + 2p_1u + 4q_1\right) =$$

$$= -\frac{1}{64}(u-2)^2\left(u^4 + 4u^3 + 4p_1u^2 - 16q_1\right).$$

Значения $h(u,\, u^2/4) \geq 0$ тогда и только тогда, когда

$$\psi(u) = -\left(u^4 + 4u^3 + 4p_1u^2 - 16q_1\right) \geq 0.$$

Производная

$$\psi'(u) = -4u\left(u^2 + 3u^2 + 2p_1\right) < 0$$

при $u \in [0,2]$. Поэтому $\psi(u)$ убывает на промежутке $[0,2]$ и значения

$$\psi(u) \geq \psi(2) = -16(3 + p_1 - q_1).$$

Таким образом, значения $h(u,\, u^2/4) \geq 0$ тогда и только тогда, когда $-16(3+p_1-q_1) \geq 0$, то есть когда $q_1 - p_1 \geq 3$.

Имеем

$$q_1 - p_1 = \frac{q + p\varphi + \varphi^2}{(\varphi - \overline{u}_0)^2} + \frac{2\varphi + p}{\varphi - \overline{u}_0} = \frac{q + p\varphi + \varphi^2 + (2\varphi+p)(\varphi - \overline{u}_0)}{(\varphi - \overline{u}_0)^2} \geq 3.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству

$$q + p\varphi + \varphi^2 + (2\varphi + p)(\varphi - \overline{u}_0) \geq 3(\varphi - \overline{u}_0)^2,$$

или

$$2(p + 2\overline{u}_0)(\varphi - \overline{u}_0) + \overline{u}_0^2 + p\overline{u}_0 + q \geq 0. \tag{17}$$

Так как

$$\gamma = \frac{\overline{u}_0 - p}{3} > \overline{u}_0,$$

то $p + 2\overline{u}_0 < 0$ и неравенство (17) эквивалентно неравенству из условия предложения 1:

$$\varphi - \overline{u}_0 \leq \frac{\overline{u}_0^2 + p\overline{u}_0 + q}{-2(2\overline{u}_0 + p)}.$$

Здесь $\overline{u}_0^2 + p\overline{u}_0 + q > 0$, так как в противном случае значения функции

$$F(u) = A(u - \overline{u}_0)\left(u^2 + pu + q\right), \quad A > 0,$$

при $u > \overline{u}_0$ и достаточно близких к $\overline{u}_0$ будут отрицательными. *Предложение 1 доказано.* □

4. Построение барьерных функций в случае (D)

В случае (D), когда многочлен $F(u)$ удовлетворяет условиям 1), 2), его старший коэффициент отрицателен и точка перегиба γ расположена левее корня $\overline{u}_0$, возможен единственный случай:

$$F(u) = -A(u-\beta)(u-\overline{u}_0)(u-\alpha), \quad A > 0, \quad \beta < u_1 < \gamma < \overline{u}_0 < \varphi < u_2 < \alpha, \tag{18}$$

где u_1– точка минимума, а u_2– точка максимума:

$$u_1 = \frac{\overline{u}_0 + \alpha + \beta - \sqrt{D}}{3}, \quad u_2 = \frac{\overline{u}_0 + \alpha + \beta + \sqrt{D}}{3},$$

$$D = (\overline{u}_0 + \alpha + \beta)^2 - 3(\alpha\beta + \alpha\overline{u}_0 + \beta\overline{u}_0) > 0.$$

Предложение 2. *В случае (D) функция*

$$Z_+(\xi, \tau) = -\frac{\Pi_0(0,\tau)Q_0(\xi, 0)}{\varphi - \overline{u}_0}$$

является верхним барьером решения задачи (9)–(11) при любом значении граничного значения φ из промежутка $(\overline{u}_0, u_2)$, где u_2– точка максимума функции $F(u)$.

Доказательство. Как и в случае (C) необходимо доказать неравенство (14). С этой целью трансформируем функцию $F(u)$ в функцию $g(x)$:

$$g(x) = F\left(\varphi - (\varphi - \overline{u}_0)x\right) =$$

$$= -A(\varphi - (\varphi - \overline{u}_0)x - \overline{u}_0)(\varphi - (\varphi - \overline{u}_0)x - \alpha)(\varphi - (\varphi - \overline{u}_0)x - \beta) =$$

$$= A(\varphi - \overline{u}_0)^3(x-1)\left(x - \frac{\varphi - \alpha}{\varphi - \overline{u}_0}\right)\left(x - \frac{\varphi - \beta}{\varphi - \overline{u}_0}\right).$$

Имеем

$$g(x) = A(\varphi - \overline{u}_0)^3(x-a)(x-1)(x-b),$$

где параметры подчинены условиям

$$A > 0, \quad a = \frac{\varphi - \alpha}{\varphi - \overline{u}_0}, \quad b = \frac{\varphi - \beta}{\varphi - \overline{u}_0}.$$

Точка максимума функции $g(x)$ имеет координату

$$\frac{1 + a + b - \sqrt{D_1}}{3}, \quad \text{где} \quad D_1 = (1 + a + b)^2 - 3(a + b + ab) > 0.$$

Функция $g(x)$ по построению убывает на промежутке $[0;1]$ и

$$a < \frac{1 + a + b - \sqrt{D_1}}{3} < 0 < 1 < b.$$

Нас интересует выполнение неравенства (15). Из-за его однородности многочлен $g(x)$ можно рассматривать с единичным коэффициентом. Собирая все вместе, получаем функцию

$$g(x) = (x-a)(x-1)(x-b) \tag{19}$$

с условиями

$$a = \frac{\varphi - \alpha}{\varphi - \overline{u}_0}, \quad b = \frac{\varphi - \beta}{\varphi - \overline{u}_0}, \qquad a < \frac{1 + a + b - \sqrt{D_1}}{3} < 0 < 1 < \lambda < b,$$

где λ– точка перегиба:

$$\lambda = \frac{1+a+b}{3}.$$

Представим многочлен $g(x)$ по степеням x:

$$g(x) = x^3 - (1+a+b)x^2 + (a+b+ab)x - ab.$$

По условию производная на промежутке $[0,1]$ должна быть отрицательной:

$$g'(x) = 3x^2 - 2(1+a+b)x + (a+b+ab) < 0,$$

в частности,

$$g'(0) = a+b+ab < 0.$$

Вторая производная

$$g''(x) = 6x - 2(1+a+b)$$

принимает нулевое значение в единственной точке перегиба

$$\lambda = \frac{1+a+b}{3}.$$

Используя обозначения $\mu = g'(0)$ и λ, функцию $g(x)$ можно записать в виде

$$g(x) = x^3 - (1+a+b)x^2 + (a+b+ab)x - ab = x^3 - 3\lambda x^2 + \mu x - ab.$$

Необходимо доказать неравенство (15):

$$g(xy) - xg(y) - yg(x) \geqslant 0, \quad x, y \in [0,1).$$

Его левая часть представляет собой симметрический многочлен $h(u,v)$ относительно переменных $u = x+y,\ v = xy$:

$$h(u,v) = g(xy) - x(y^3 - 3\lambda y^2 + \mu y - ab) - y(x^3 - 3\lambda x^2 + \mu x - ab) =$$
$$= g(xy) - xy(x^2+y^2) + 3\lambda xy(x+y) - 2\mu xy + ab(x+y) =$$
$$= g(v) - v(u^2 - 2v) + 3\lambda uv - 2\mu v + abu =$$
$$= g(v) - u^2v + 2v^2 + 3\lambda uv + abu - 2\mu v.$$

В результате замены переменных единичный квадрат $0 \leqslant x,\ y < 1$ перейдет в область D, ограниченную линиями

$$\begin{cases} 0 \leqslant u < 1, & v = 0 \\ v = u - 1, & 1 \leqslant u < 2 \\ v = u^2/4, & 0 \leqslant u < 2 \end{cases}.$$

Вместо неравенства (15) для многочлена 6-й степени, перейдя к переменным (u,v), нужно проверить в области D неравенство для многочлена 3-й степени:

$$h(u,v) = g(v) - u^2v + 2v^2 + 3\lambda uv + abu - 2\mu v \geqslant 0.$$

Для функции $h(u,v)$ производная

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} = -2v < 0,$$

поэтому в области D могут быть только точки максимума, а наименьшие значения функция $h(u,v)$ будет принимать на границе области D.

На участке $0 \leqslant u \leqslant 1$, $v = 0$ значения функции $h(u,v)$:

$$h(u,0) = g(0) + abu = -ab + abu = -ab(1-u) \geqslant 0.$$

На участке $v = u - 1$, $1 \leqslant u \leqslant 2$, или, что то же самое, $u = v + 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$ значения функции $h(u,v)$:

$$h(v+1,v) = g(v) - v^3 + 3\lambda v^2 - abv + ab = (a+b)v \geq 0,$$

так как условие

$$\lambda = \frac{1+a+b}{3} > 1$$

влечет справедливость неравенства $a + b > 2$.

На участке $v = u^2/4$, $0 \leqslant u \leqslant 2$ значения функции $h(u,v)$ представляются в виде

$$h\left(u, \frac{u^2}{4}\right) = g\left(\frac{u^2}{4}\right) - \frac{u^4}{8} + \frac{3\lambda u^3}{4} - \frac{\mu u^2}{2} + abu =$$

$$= \frac{1}{64}u^6 - \frac{2+3\lambda}{16}u^4 + \frac{3\lambda}{4}u^3 - \frac{\mu}{4}u^2 + abu - ab =$$

$$= \frac{1}{64}\left[u^6 - 4(3+a+b)u^4 + 16(1+a+b)u^3 - 16(a+b+ab)u^2 - 64abu - ab\right].$$

Докажем, что выражение в квадратных скобках:

$$\psi(u) = u^6 - 4(3+a+b)u^4 + 16(1+a+b)u^3 - 16(a+b+ab)u^2 - 64abu - ab,$$

– неотрицательно. Для этого вычислим производные:

$$\psi'(u) = 6u^5 - 16(3+a+b)u^3 + 48(1+a+b)u^2 - 32(a+b+ab)u - 64ab,$$

$$\psi''(u) = 30u^4 - 48(3+a+b)u^2 + 96(1+a+b)u - 32(a+b+ab),$$

$$\psi'''(u) = 120u^3 - 96(3+a+b)u + 96(1+a+b),$$

$$\psi^{IV}(u) = 360u^2 - 96(3+a+b).$$

Критические точки $\psi^{IV}(u)$ получаются из условия

$$\psi^{IV}(u) = 360u^2 - 96(3+a+b) = 0$$

и выражаются как

$$u = \pm\sqrt{\frac{96(3+a+b)}{360}} = \pm\frac{2}{15}\sqrt{15(3+a+b)}.$$

Промежутку $0 \leqslant u \leqslant 2$ принадлежит единственная критическая точка

$$u = \sqrt{\frac{96(3+a+b)}{360}} = \frac{2}{15}\sqrt{15(3+a+b)}.$$

В этой точке $\psi^{IV}(u)$ достигает локального минимума:

$$\psi^{IV}\left(\sqrt{\frac{96(3+a+b)}{360}}\right) = 360 \cdot \frac{96(3+a+b)}{360} - 96(3+a+b) = 0$$

и, таким образом, на промежутке $0 \leqslant u \leqslant 2$ значения $\psi^{IV}(u) \geq 0$. Это влечет возрастание функции $\psi'''(u)$ и неравенство
$$\psi'''(0) \leq \psi'''(u) \leq \psi'''(2).$$

Значение
$$\psi'''(0) = 96(1 + a + b) > 0,$$
так как $a + b > 2$. Таким образом, на промежутке $0 \leqslant u \leqslant 2$ значения $\psi'''(u) \geq 0$. Это влечет возрастание функции $\psi''(u)$ и неравенство
$$\psi''(0) \leq \psi''(u) \leq \psi''(2).$$

Значение
$$\psi''(0) = -32(a + b + ab) > 0,$$
так как $a + b + ab = g'(0) < 0$. Таким образом, на промежутке $0 \leqslant u \leqslant 2$ значения $\psi''(u) \geq 0$. Это влечет возрастание функции $\psi'(u)$ и неравенство
$$\psi'(0) \leq \psi'(u) \leq \psi'(2).$$

Значение
$$\psi'(0) = -64ab > 0,$$
и, таким образом, на промежутке $0 \leqslant u \leqslant 2$ значения $\psi'(u) \geq 0$. Это влечет возрастание функции $\psi(u)$ и неравенство
$$\psi(0) \leq \psi(u) \leq \psi(2).$$

Значение
$$\psi(0) = -ab > 0,$$
и, таким образом, на промежутке $0 \leqslant u \leqslant 2$ значения $\psi(u) \geq 0$, что доказывает неравенство
$$h\left(u, \frac{u^2}{4}\right) = \frac{1}{64}\psi(u) \geq 0.$$

Итак, в области D выполняется неравенство $h(u, v) \geqslant 0$, а вместе с ним и неравенство (15). *Предложение 2 доказано.* □

5. Построение барьерных функций в случае (E)

В случае (E), когда многочлен $F(u)$ удовлетворяет условиям 1), 2), его старший коэффициент отрицателен и точка перегиба γ расположена правее граничного значения φ, возможен единственный случай:
$$F(u) = -A(u - \beta)(u - \overline{u}_0)(u - \alpha), \quad A > 0, \quad \beta < u_1 < \overline{u}_0 < \varphi < \gamma < u_2 < \alpha, \tag{20}$$
где u_1– точка минимума, а u_2– точка максимума:
$$u_1 = \frac{\overline{u}_0 + \alpha + \beta - \sqrt{D}}{3}, \quad u_2 = \frac{\overline{u}_0 + \alpha + \beta + \sqrt{D}}{3},$$
$$D = (\overline{u}_0 + \alpha + \beta)^2 - 3(\alpha\beta + \alpha\overline{u}_0 + \beta\overline{u}_0) > 0.$$

Предложение 3. *В случае (D) функция*
$$Z_+(\xi, \tau) = -\frac{\Pi_0(0, \tau)Q_0(\xi, 0)}{\varphi - \overline{u}_0}$$

не является верхним барьером решения задачи (9)–(11) ни при каком значении граничного значения φ из промежутка $(\overline{u}_0, \gamma)$, где γ– точка перегиба функции $F(u)$.

Доказательство. При доказательстве предложения 2 получены значения функции $h(u, v)$ на участке $u = v + 1$, $0 < v \leqslant 1$:

$$h(v+1, v) = g(v) - v^3 + 3\lambda v^2 - abv + ab = (a+b)v.$$

Так как теперь точка перегиба

$$\lambda = \frac{1+a+b}{3} < 0,$$

то $a + b < -1$ и значения $h(v + 1, v) < 0$. Неравенство (15) не выполняется. *Предложение 3 доказано.* □

6. Заключение

При определенных условиях возможное многообразие поведения кубических многочленов в окрестностях угловых точек границы удалось классифицировать и свести все многообразие к пяти случаям. В двух случаях удается построить или доказать существование верхних и нижних барьеров решения задачи, определяющей главный член угловой части асимптотики, что гарантирует построение полной асимптотики решения задачи. В остальных трех случаях на роль верхнего барьера задачи для главного члена угловой части асимптотики была предложена функция определенного вида. В двух случаях эта функция действительно подошла в качестве верхнего барьера, а в одном случае – не подошла.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов, А.И., Денисов, И.В. Нелинейный метод угловых пограничных функций для сингулярно возмущенных параболических задач с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник.- 2024.- т. 25.- вып. 1.- С. 25–40.

2. Васильева, А.Б., Бутузов, В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990.

3. Amann, H. On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J.- 1971.- Vol.21.- № 2.- pp. 125–146.

4. Sattinger, D. H. Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J.- 1972.- V.- 21.- № 11.- pp. 979–1000.

5. Amann, H. Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe // Ed. by L. Cesari et al. - New York etc: Acad press, cop. 1978. – XIII. pp. 1–29.

6. Денисов, И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – Т.57. - № 2.- 2017. - С. 255–274. (English transl.: Denisov I.V. Angular Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Quadratic Nonlinearity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017.- Vol. 57.- № 2.- pp. 253–271.)

7. Денисов А.И., Денисов И.В. Нелинейный метод угловых пограничных функций в задачах с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник.- 2023.- т. 24.- вып. 1.- С. 27–39.

8. Денисов А.И., Денисов И.В. Нелинейный метод угловых пограничных функций в случае влияния точки перегиба // Журнал вычислительной математики и математической физики // Журнал вычислительной математики и математической физики. – т.65.- № 1.- 2025. - С. 76–89. (English transl.: Denisov I.V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems with Nonlinearities Having Stationary Points // Computational Mathematics and Mathematical Physics.- 2025.- Vol.- 65.- № 1.- pp. 76–88.

REFERENCES

1. Denisov, A.I., Denisov, I.V. 2024, "Nonlinear method of angular boundary functions for singularly perturbed parabolic problems with cubic nonlinearities", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 25–40.

2. Vasilyeva, A.B., Butuzov, V.F. 1990, "Asymptotic methods in the theory of singular perturbations", *M.: Higher school*.

3. Amann, H. 1971, "On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems", *Indiana Univ. Math. J.*, Vol.21, № 2. P. 125-146.

4. Sattinger, D.H. 1972, "Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems", *Indiana Univ. Math. J.*, Vol.21. № 11. P. 979-1000.

5. Amann, H. 1978, "Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe" / Ed. by L. Cesari et al., *New York etc: Acad press*, cop. – XIII. P. 1-29.

6. Denisov, I.V. 2017, "Angular Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Quadratic Nonlinearity", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 57. No. 2. pp. 253-271.

7. Denisov, A.I., Denisov, I.V. 2023, "Nonlinear method of angular boundary functions in problems with cubic nonlinearities", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 24, no. 1, pp. 27-39.

8. Denisov, A.I., Denisov, I.V. 2025, "Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems with Nonlinearities Having Stationary Points", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 65. No. 15. pp. 76-88.

Получено: 16.04.2025
Принято в печать: 17.10.2025