

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 4.

УДК: 51:М34

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-257-270

Цепная дробь  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_n]$  и её ступенчатая аппроксимация

М. М. Галламов

Галламов Мансур Муллагаянович — кандидат физико-математических наук (г. Москва).  
*e-mail: gallamov@gmail.com*

## Аннотация

Пусть  $OXY$  — прямоугольная система координат с целочисленной решеткой,  $AB$  — отрезок с целыми (целочисленными) концами  $A = (q; 0)_{OXY} = A(q)$  и  $B = (0; p)_{OXY} = B(p)$ , такими, что  $p$  и  $q$  взаимно просты, а разложение  $\frac{p}{q}$  в цепную дробь имеет вид  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_{2N'+1}]$ , где  $a_1^-, a_3, \dots, a_{2N'+1}, N', p, q, \in \mathbb{N} : (= \{1, 2, \dots\})$ .

Рассмотрим множество  $\mathbf{S}_{AB}$  таких единичных квадратов (*клеток*) этой решетки, что внутренность каждого из них имеет непустое пересечение с  $AB$ . Границу этого множества представим в виде объединения ломаных  $\mathbf{S}_{AB}^-$  и  $\mathbf{S}_{AB}^+$  таких, что их крайними вершинами служат точки  $A$  и  $B$ . Здесь индекс минус (плюс) указывает на то, что  $\mathbf{S}_{AB}^-$  ( $\mathbf{S}_{AB}^+$ ) лежит по левую (правую) сторону от отрезка  $AB$  при движении от  $A$  к  $B$ .

Ломаную  $\mathbf{S}_{AB}^-$  ( $\mathbf{S}_{AB}^+$ ) назовем *левой (правой) (целочисленной) ступенчатой аппроксимацией отрезка  $AB$*  или *цепной дроби*  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_n]$ . Для краткости такие ломаные будем называть *маршами*, а их горизонтальные звенья — *ступеньями*, вертикальные — *высотами*, что вызвано ассоциацией с лестничным маршем.

В работе получены следующие результаты:

1. Формулы целочисленной аппроксимации цепной дроби, как конечных, так и бесконечных.
2. Алгоритмическое построение маршей  $\mathbf{S}_{AB}^\pm$ , определяемое рассматриваемой цепной дробью, дает их аналитическое задание через марши векторов-слагаемых из второго равенства:

$$\overline{AB} = \overline{e_{2N'-1}(A) + a_{2N'-2}\overline{e_{2N'}(q - q_{2N'-4}; p_{2N'-4})_{OXY}} = \overline{e_{2N'-1}(A) + \sum_{k_{2N'+1}=0}^{a_{2N'-2}-1} \overline{e_{2N'}(q - q_{2N'-4} + k_{2N'+1}q_{2N'-3}; p_{2N'-4} + k_{2N'+1}p_{2N'-3})_{OXY}},$$

где векторы  $\overline{e_{2N'-1}} = \overline{(-q_{2N'-4}; p_{2N'-4})_{OXY}}$  и  $\overline{e_{2N'}} = \overline{(-q_{2N'-3}; p_{2N'-3})_{OXY}}$ , координаты которых определяются подходящими дробями  $p_{n-3}/q_{n-3}$  порядка  $n = 2N' - 1, 2N'$ , исходной цепной дроби, а в скобках указаны точки приложения векторов.

3. Расположение ступеней ширины  $a_1$  в  $\mathbf{S}_{AB}^-$ , устанавливается с помощью семейства параллельных переносов отрезка с концами  $(q - a_1; 0)_{OXY}$  и  $(q - 1; 0)_{OXY}$ . Каждый член семейства находим через аппроксимационные формулы для  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_n]$ .
4. Формула, дающая количество ступеней ширины  $a_1$  в  $\mathbf{S}_{AB}^-$ , представляет собой трехдиагональный определитель  $(2N' - 5)$ -го порядка: главная диагональ состоит из элементов  $a_4, 1, a_5, \dots, a_{2N'-6}$ , верхняя диагональ — из единиц, нижняя из минус единиц, а остальные нули.

*Ключевые слова:* ступенчатая ломаная цепная дробь, ступенчатая ломаная отрезка, ступенчатая аппроксимация цепной дроби, ступенчатая аппроксимация отрезка, формулы целочисленной аппроксимации цепной дроби, алгоритмическое построение ступенчатой ломаной цепной дроби, геометрические характеристики ступенчатой ломаной, алгоритмическое построение маршей, расположение ступеней в марше, количество ступеней в марше,

геометрия цепной дроби, целочисленная решетка и цепная дробь, задача С. В. Конягина о шахматной раскраске, прямая с иррациональным угловым коэффициентом и шахматная раскраска, геометрическая интерпретация цепной дроби.

*Библиография:* 25 названий.

**Для цитирования:**

Галламов, М. М. Цепная дробь  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_n]$  и её ступенчатая аппроксимация // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 257–270.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 4.

UDC: 51: M34

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-257-270

**Chain fraction  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_n]$  and its stepwise approximation**

M. M. Gallamov

**Gallamov Mansur Mullagajanovich** — candidate of physical and mathematical sciences (Moscow).

*e-mail:* gallamov@gmail.com

**Abstract**

Let  $OXY$  be a rectangular coordinate system with an integer lattice,  $AB$  is a segment with integer ends  $A = (q; 0)_{OXY} = A(q)$  and  $B = (0; p)_{OXY} = B(p)$  such that the decomposition of  $\frac{p}{q}$  into a continued fraction has the form  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_{2N'+1}]$ , where  $a_1^-, a_3, \dots, a_{2N'+1}$ ,  $N', p, q, N' \in \mathbb{N}$ : ( $= \{1, 2, \dots\}$ ), moreover,  $p$  and  $q$  are mutually simple.

Consider the set  $S_{AB}$  of such unit squares (*cells*) of this lattice, that the interior of each of them has a nonempty intersection with  $AB$ . The boundary of this set is represented as a union of polylines  $S_{AB}^-$  and  $S_{AB}^+$  such that their extreme vertices are the points  $A$  and  $B$ . Here, the minus index (plus) indicates that  $S_{AB}^-$  ( $S_{AB}^+$ ) lies on the left (right) side of the segment  $AB$  when moving from  $A$  to  $B$ .

Polyline  $S_{AB}^-$  ( $S_{AB}^+$ ) let's call *left (right) (integer) stepwise approximation of the segment  $AB$*  or *continued fraction*  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_N]$ . For brevity, we will call such polylines *marches*, and their horizontal links—*steps*, vertical ones—*heights*, which is caused by association with a flight of stairs. The following results were obtained in the work:

1. Formulas for integer approximation of the stucco fraction, both finite and infinite.
2. Algorithmic construction of marches  $S_{AB}^\pm$ , determined by the considered chain fraction. gives their analytical task through the marches of vectors-terms of the second equality:

$$\overline{AB} = \overline{e_{2N'-1}(A) + a_{2N'-2}\overline{e_{2N'}(q - q_{2N'-4}; p_{2N'-4})_{OXY}} = \overline{e_{2N'-1}(A) + \sum_{k_{2N'+1}=0}^{a_{2N'-2}-1} \overline{e_{2N'}(q - q_{2N'-4} + k_{2N'+1}q_{2N'-3}; p_{2N'-4} + k_{2N'+1}p_{2N'-3})_{OXY}},$$

where the vectors  $\overline{e_{2N'-1}} = \overline{(-q_{2N'-4}; p_{2N'-4})_{OXY}}$  and  $\overline{e_{2N'}} = \overline{(-q_{2N'-3}; p_{2N'-3})_{OXY}}$ , whose coordinates are determined by suitable fractions  $p_{n-3}/q_{n-3}$  of the order  $n = 2N' - 1$ .  $2N'$ , the original continued fraction, and the points of application of the vectors are indicated in parentheses.

3. The location of the steps of width  $a_1$  in  $S_{AB}^-$ , is set using a family of parallel transfers of a segment with ends  $(q - a_1; 0)_{OXY}$  and  $(q - 1; 0)_{OXY}$ . We find each member of the family through approximation formulas for  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_N]$ .

4. The formula giving the number of steps of width  $a_1$  in  $S_{AB}^-$  is a tridiagonal determinant  $(2N' - 5)$ -th order: the main diagonal consists of elements  $a_4, 1, a_5, \dots, a_{2N'-6}$ , the upper diagonal is — of ones, the lower one is minus ones, and the rest are zeros.

*Keywords:* stepwise broken chain fraction, stepwise broken segment, stepwise approximation of a chain fraction, stepwise approximation of a segment, formulas for integer approximation of a molded fraction, algorithmic construction of a stepwise broken chain fraction, geometric characteristics of a stepwise polyline, algorithmic construction of marches, the location of steps in a march, the number of steps in a march, geometry of chain fractions, integer lattice and chain fraction, S.V.Konyagin's problem on chess coloring, a straight line with an irrational angular coefficient and chess coloring, geometric interpretation of the continued fraction.

*Bibliography:* 25 titles.

#### For citation:

Gallamov, M. M. 2025, "Chain fraction  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_n]$  and its stepwise approximation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 257–270.

## 1. Ступенчатая ломаная (марш) $S_{AB}^-$ , определяемая цепной дробью $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_{2N'+1}] = \frac{p}{q}$

Пусть  $OXY$  — прямоугольной системе координат с целочисленной решеткой,  $AB$  — отрезок с целыми (целочисленными) концами  $A = (q; 0)_{OXY} = A(q)$  и  $B = (0; p)_{OXY} = B(p)$  такими, что  $p$  и  $q$  взаимно просты, а разложение  $\frac{p}{q}$  в цепную дробь имеет вид  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_{2N'+1}]$ , где  $a_1^-, a_3, \dots, a_{2N'+1}$ ,  $N', p, q, N' \in \mathbb{N} : (= \{1, 2, \dots\})$ .

### 1. Целочисленная решетка и цепная дробь $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_{2N'+1}] = \frac{p}{q}$

Пусть  $OXY$  — прямоугольной системе координат с целочисленной решеткой,  $AB$  — отрезок с целыми (целочисленными) концами  $A = (q; 0)_{OXY} = A(q)$  и  $B = (0; p)_{OXY} = B(p)$  такими, что  $p$  и  $q$  взаимно просты, а разложение  $\frac{p}{q}$  в цепную дробь имеет вид  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_{2N'+1}]$ , где  $N = 2N' + 1$ ,  $a_1, \dots, a_N, p, q, N' \in \mathbb{N} : (= \{1, 2, \dots\})$  индекс  $OXY$  говорит о том, что координаты указаны в  $OXY$ .

Рассмотрим множество  $S_{AB}$  таких единичных квадратов (*клеток*) этой решетки, что внутренность каждого из них имеет непустое пересечение с  $AB$ . Границу этого множества представим в виде объединения ломаных  $S_{AB}^-$  и  $S_{AB}^+$  таких, что их крайними вершинами служат точки  $A$  и  $B$ . Здесь индекс минус (плюс) указывает на то, что  $S_{AB}^-$  ( $S_{AB}^+$ ) лежит по левую (правую) сторону от отрезка  $AB$  при движении от  $A$  к  $B$ .

Ломаную  $S_{AB}^-$  ( $S_{AB}^+$ ) назовем *левой (правой) (целочисленной) ступенчатой аппроксимацией отрезка  $AB$*  или *цепной дроби  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_N : (= \frac{p}{q})$* . Для краткости такие ломаные будем называть *маршами*, а их горизонтальные звенья — *ступенями*, вертикальные — *высотами*, что вызвано ассоциацией с лестничным маршем. Термин "целочисленный" используется по двум причинам:  $S_{AB}^-$  и  $S_{AB}^+$  имеют только целые вершины и внутри  $S_{AB}$  нет *целых* точек.

## 2. Формулы целочисленной аппроксимации лепной дроби

Такие формулы вводятся с помощью подходящих дробей  $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$  порядка  $n$  цепной дроби  $[a_0; a_1 \dots]$ , которая может быть как конечна, так и бесконечна,  $a_0 \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $a_n \in \mathbb{N}$ . Подходящая дробь  $\frac{p_n}{q_n}$  вычисляется посредством рекуррентной формулы:

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, & q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, & n &\in \mathbb{N}_0; \\ p_{-2} &= 0, & q_{-2} &= 1, & p_{-1} &= 1, & q_{-1} &= 0; & (|p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n| &\equiv (-1)^{n-1}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

см. [1] – [6]. Рассмотрим последовательность векторов  $\bar{e}_{n+3} = \overline{(q_n; p_n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Отсюда на основании (1.1) получаем следующие рекуррентное соотношение:

$$\bar{e}_{n+3} = \bar{e}_{n+1} + a_n \bar{e}_{n+2} = q_n \bar{e}_1 + p_n \bar{e}_2, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$\bar{e}_1 = \overline{(q_{-2}; p_{-2})}_{OXY} = \overline{(1; 0)}_{OXY}, \quad \bar{e}_2 = \overline{(q_{-1}; p_{-1})}_{OXY} = \overline{(0; 1)}_{OXY}, \quad (1.2)$$

которые связаны с геометрией цепных дробей, см. [7, С.125] – [17].

Так как в основе наших исследований лежит прямая  $l_{AB} :: y = -\frac{p}{q} \cdot x + p$ , то для удобства введем новую систему координат  $Ae_1e_2$  с началом в точке  $A = A(q) = (q; 0)_{OXY}$ , базисом  $\bar{e}_1 = \overline{(-1; 0)}_{OXY}$ ,  $\bar{e}_2 = \overline{(0; 1)}_{OXY}$ , осью абсцисс  $Ae_1$  и ординат  $Ae_2$ . В дальнейшем координаты объектов в  $Ae_1e_2$  указываются без индекса  $Ae_1e_2$ . Если в (1.2) опустить индекс  $OXY$ , то равенства (1.2) дают геометрическую интерпретацию подходящих дробей  $\frac{p_n}{q_n}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N = \overline{0, N}$ , цепной дроби  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_N]$ ,  $N = 2N' + 1$ , в системе координат  $Ae_1e_2$ , ибо прямая  $l_{AB} :$  в ней задаётся уравнением  $e_2 = \frac{p}{q} \cdot e_1$ .

Любой вектор, определяемый (1.2), с нечетным (четным) индексом лежит по левую (правую) стороны от  $l_{AB}$ , конечно, такой вектор должен быть приложен к точке  $A$ . Приложим векторы  $\bar{e}_{n+1}$  и  $\bar{e}_{n+2}$  к точке  $A$  и, складывая их по правилу параллелограмма, получим *алгоритм вытягивания носов*:

$$\bar{e}_{n+3}(A) = \bar{e}_{n+1}(A) + a_n \bar{e}_{n+2}(A), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.3)$$

(Положим для удобства записи:  $(l_1 + f(q_1, \dots, q_k); l_2 + f(p_1, \dots, p_k)) = (l_1 + f(q_1, \dots, q_k); l_2 + p \rightarrow q) = (l_1 + q \rightarrow p; l_2 + f(p_1, \dots, p_k))$ .)

Теперь осуществим сложение векторов  $\bar{e}_{n+1}$  и  $\bar{e}_{n+2}$  по правилу треугольника, тогда  $n = 2m - 2$  и  $n = 2m - 1$  соответственно получаем

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m+1}(A) &= \bar{e}_{2m-1}(A) + a_{2m-3} \bar{e}_{2m}(q_{2m-4}; p_{2m-4}) = \\ &= \bar{e}_{2m-1}(A) + \sum_{k_{2m+1}=0}^{a_{2m-2}-1} \bar{e}_{2m}(q_{2m-4} + k_{2m+1}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \\ \bar{e}_{2m+2}(A) &= a_{2m-1} \bar{e}_{2m+1}(A) + \bar{e}_{2m}(a_{2m-1}q_{2m-2}; p \rightarrow q) = \\ &= \sum_{k_{2m+2}=0}^{a_{2m-1}-1} \bar{e}_{2m+1}(k_{2m+2}q_{2m-2}; k_{2m+2}p_{2m-2}) + \bar{e}_{2m}(a_{2m-1}q_{2m-2}; p \rightarrow q). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Треугольники, получаемые при сложении согласно формуле Пика ([18] – [20]) и тождеству в скобках из (1.1), во-первых, не содержат внутри себя целых точек, во-вторых, лежат по левую сторону от полученной суммы, причем первый треугольник принадлежит внутренности  $\Delta^\circ OAB$ , за исключением точки  $A$ ,  $AB$  пересекает второй треугольник по его внутренности. С помощью полученных равенств мы можем заменять каждый вектор-слагаемое суммами, определяемые крайними правыми частями из (1.4) при соответствующей замене индексов и точек приложения векторов-слагаемых, при этом вновь появляющиеся многоугольники будут содержать целые точки только на своей границе согласно тождеству в (1.1) и формуле Пика. Формулы (1.4) запишем в общем виде:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m+1}(l_1; l_2) &= \bar{e}_{2m-1}(l_1; l_2) + a_{2m-2} \bar{e}_{2m}(l_1 + q_{2m-4}; l_2 + p_{2m-4}), = \\ &= \bar{e}_{2m-1}(l_1; l_2) + \sum_{k_{2m+1}=0}^{a_{2m-2}-1} \bar{e}_{2m}(l_1 + q_{2m-4} + k_{2m+1}q_{2m-3}; l_2 + p \rightarrow q), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m'+2}(l'_1; l'_2) &= a_{2m'-1} \bar{e}_{2m'+1}(l'_1; l'_2) + \bar{e}_{2m'}(l'_1 + a_{2m'-1}q_{2m'-2}; \\ l'_2 + p \rightarrow q) &= \sum_{k_{2m'+2}=0}^{a_{2m'-1}-1} \bar{e}_{2m'+1}(l'_1 + k_{2m'+2}q_{2m'-2}; l'_2 + k'p_{2m'-2}) + \\ &= \bar{e}_{2m'}(l'_1 + a_{2m'-1}q_{2m'-2}; l'_2 + p \rightarrow q). \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $m, m' : (\in \mathbb{N})$ , точки приложения  $(l_1; l_2)$  и  $(l'_1; l'_2)$  векторов задаются теми частными случаями, к которым применяться эти формулы. Формулы (1.5) и (1.6) назовем *формулами целочисленной аппроксимации* цепной дроби  $[a_0; a_1, \dots]$ , в связи с чем см. [17].



где  $M_{3;0}^-(A)$  — левая ступенчатая аппроксимация вектора  $\bar{e}_3(A)$  в виде горизонтального отрезка длины  $a_1$ , совпадающий с  $\bar{e}_3(A)$ , а  $M_{4;0}^-(A_{p_0})$  — такая же ломаная, состоящая из двух звеньев — горизонтального и вертикального, трех вершин —  $A_{p_0}$ ,  $(q_0 + 1 : p_0) = (a_1 + 1 : 0)$  и  $(q_2 : p_2) = (a_1 + 1 : 1)$ . Из проделанных построений следует, что марши  $M_{3;0}^-(A)$ ,  $M_{5;0}^-(A)$  и  $M_{4;0}^-(A_{p_0})$  принадлежат  $S_{AB}^-$ , а марш  $M_{4;0}^-(A)$  не принадлежит  $S_{AB}^-$ , ибо его порождающий вектор  $\bar{e}_4(A)$  лежит по правую сторону от прямой  $l_{AB}$ , а вектор-слагаемые входящие в (1.7) лежат по левую сторону от  $l_{AB}$ , см. рис. 1.

Марш  $M_{6;0}^-(A_{p_2})$  из (1.8) запишем также с учетом того, что  $a_3 p_2 + p_2 = a_3 p_2 + p_1 + p_0 = p_0 + p_3$ , в виде упорядоченного набора:

$$M_{6;0}^-(A_{p_2}) = \langle M_{5;0}^-(A_{p_2}), \dots, M_{5;a_3-1}^-(A_{a_3 p_2}); M_{4;a_3}^-(A_{a_3 p_2 + p_2}) \rangle, \quad (1.10)$$

где для  $k_6 = \overline{1, a_3}$  компоненты

$$\begin{aligned} M_{5;k_6-1}^-(A_{k_6 p_2}) &= (k_6 - 1)\bar{e}_5 + M_{5;0}^-(A), \quad M_{4;a_3}^-(A_{(a_3+1)p_2}) = (a_3 + 1)\bar{e}_5 + M_{4;0}^-(A) = \\ &= (a_3 + 1)\bar{e}_5 - \bar{e}_3 + M_{4;0}^-(A_{p_0}) = a_3 \bar{e}_5 + a_2 \bar{e}_4 + M_{4;0}^-(A_{p_0})|_{a_2=1} = \bar{e}_6 + M_{4;0}^-(A_{p_0}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Далее, при каждом фиксированном  $k_7 = \overline{1, a_4}$  марш

$$M_{6;k_7-1}^-(A_{p_2+(k_7-1)p_3}) = (k_7 - 1)\bar{e}_6 + M_{6;0}^-(A_{p_2}), \quad (1.12)$$

что является завершающим аккордом в построении марша  $M_{7;0}^-$  из (1.8), вследствие чего получаем базу индукции в виде формулы (1.8).

Аналогичная терминология и обозначения применяются ниже без пояснений.

Формулы (1.7) — (1.11) дают метод индуктивного перехода с поможью формул (1.5) и (1.6) при  $(l_1; l_2) = (0; 0)$ ,  $m' = m - 1$ ,  $(l'_1; l'_2) = (q_{2m-4} + k_{2m+1}q_{2m-3}; p \rightarrow q)$ ,  $m = 4$ ,  $N' \rightarrow N$ , тогда с учетом того, что  $p_{2m-4} + (a_{2m-2} - 1)p_{2m-3} = p_{2m-2} - p_{2m-3}$  получаем алгоритмическое задание ломаной  $S_{AB}^-$  в виде рекуррентных формул (1.13) и (1.14):

$$M_{2m+1;0}^-(A) = \langle M_{2m-1;0}^-(A); M_{2m;0}^-(A_{p_{2m-4}}), \dots, M_{2m;a_{2m-2}-1}^-(A_{p_{2m-2}-p_{2m-3}}) \rangle \quad (1.13)$$

где компоненты  $M_{2m;k_{2m+1}-1}^-(\cdot)$  для  $k_{2m+1} = \overline{1, a_{2m-2}}$  определяются через

$$\begin{aligned} M_{2m;k_{2m+1}-1}^-(A_{p_{2m-4}+(k_{2m+1}-1)p_{2m-3}}) &= \langle M_{2m-1;0}^-(A_{p_{2m-4}+(k_{2m+1}-1)p_{2m-3}}), \dots, \\ &M_{2m-1;a_{2m-3}-1}^-(A_{a_{2m-3}p_{2m-4}+(k_{2m+1}-1)p_{2m-3}}); \\ &M_{2m-2;a_{2m-3}}^-(A_{(a_{2m-3}+1)p_{2m-4}+(k_{2m+1}-1)p_{2m-3}}) \rangle, \end{aligned} \quad (1.14)$$

для  $m = \overline{3, N'}$  с начальными условиями (1.8), причем  $N'$  такое, что  $N = 2N' + 1$ .

Технически алгоритм (1.13) реализуется следующим образом. Начальные условия (1.8) дают марш  $M_{7;0}^-$  из (1.13) при  $m = 3$ . Компоненты из (1.13) и (1.14) находятся подобно (1.11) и (1.12) через параллельный сдвиг:

$$\begin{aligned} M_{2m-1;k_{2m}-1}^-(A_{k_{2m}p_{2m-4}}) &= k_{2m}\bar{e}_{2m-1} + M_{2m-1;0}^-(A), \quad k_{2m} = \overline{1, a_{2m-3}}; \\ k_{2m} = a_{2m-3} + 1; \quad M_{2m-2;a_{2m-3}}^-(A_{(a_{2m-3}+1)p_{2m-4}}) &= (a_{2m-3} + 1)\bar{e}_{2m-1} \\ + M_{2m-2;0}^-(A) &= a_{2m-3}\bar{e}_{2m-1} + a_{2m-4}\bar{e}_{2m-2} + M_{2m-2;0}^-(A_{p_{2m-6}}), \end{aligned} \quad (1.15)$$

и для  $k_{2m+1} = \overline{1, a_{2m-2}}$

$$M_{2m;k_{2m+1}-1}^-(A_{p_{2m-4}+(k_{2m+1}-1)p_{2m-3}}) = (k_{2m+1} - 1)\bar{e}_{2m} + M_{2m;0}^-(A_{p_{2m-4}}) \quad (1.16)$$

На выходе этот алгоритм дает ступенчатую ломаную  $S_{AB}^-$ , так как каждый последующий марш в (1.13) получается из предыдущего параллельным сдвигом, начиная с марша (1.8) с учетом (1.9) — (1.11). Вследствие чего имеет место

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $Ae_1e_2$  — система координат с базисом  $\bar{e}_1 = \overline{(-1; 0)}_{OXY}$ ,  $\bar{e}_2 = \overline{(0; 1)}_{OXY}$  и началом  $A = (q; 0)_{OXY}$ , где координаты взяты в прямоугольной системе координат  $OXY$ . Тогда алгоритм, определяемый рекуррентными формулами (1.13) — (1.16) с начальными условиями (1.8), на выходе при  $m = N'$  дает аналитическое задание в  $Ae_1e_2$  левой ступенчатой аппроксимация  $S_{AB}^-$  отрезка  $AB$ , порожденного цепной дробью  $[0; a_1, 1, a_3, a_4, \dots, a_N]$  ( $= \frac{p}{q}$ ,  $B = (0; p)_{OXY}$ ).

Аналитическое задание правой целочисленной ступенчатой аппроксимация  $S_{AB}^+$  отрезка  $AB$ , определяемого цепной дробью  $[0; a_1, 1, a_3, a_4, \dots, a_N]$  имеет тот же вид, что и  $S_{AB}^-$  в  $Ae_1e_2$  только в системе координат  $Be'_1e'_2$  с базисом  $\bar{e}'_1 = (1; 0)_{OXY}$ ,  $\bar{e}'_2 = (0; -1)_{OXY}$  и началом  $B = (0; p)_{OXY}$  в силу центральной симметрии прямоугольника  $OABC$ , где  $C = (q; p)_{OXY}$ . Чтобы получить аналитическое представление  $S_{AB}^-$  и  $S_{AB}^+$  в системе координат  $OXY$  нужно соответственно перейти от  $Ae_1e_2$  и  $Be'_1e'_2$  к  $OXY$ .

## 2. Некоторые геометрические характеристики марша $S_{AB}^-$

### 1. Расположение ступеней ширины $a_1$ в $S_{AB}^-$

Здесь основная задача следующая: найти аналитическое задание ступени  $h_i^-(A_i; A_{i+1})$  ширины  $a_1$ , порожденной вектором  $\bar{e}_4(A_i) = \overline{(q_1; p_1)}_{A_i} = \overline{(a_1; 1)}_{A_i}$ , для каждого порядкового номера  $i$ , полученного при счете ступеней ширины  $a_1$  при движении по маршу  $S_{AB}^-$  вверх. В обозначении ступени  $h_i^-(A_i; A_{i+1})$  точки  $A_i$  и  $A_{i+1}$  есть концы вектора  $\bar{e}_4(A_i)$ , а индексы у этих точек, как и у самой ступени — их ординаты. Для краткости записи чаще будем применять обозначение  $h_i^-(\cdot; \cdot)$  вместо того, которое ввели.

Положим  $m = 3$  в (1.13), тогда получаем марш  $M_{7;0}^-(A)$ , см. (1.8). Первая его компонента  $M_{5;0}^-(A)$  (см. (1.9)) порождена вектором  $\bar{e}_5(A)$  и поэтому она есть нулевая ступень  $h_0^-(A; A_{p_2})$  ширины  $a_1 + 1$ , а остальные  $a_4$  компоненты задаются (1.10) и (1.11). Из (1.9) — (1.11) следует, что каждый марш  $M_{6;k_7-1}^-(A_{p_2+(k_7-1)p_3})$  при фиксированном  $k_7 = \overline{1, a_4}$  содержит одну ступень ширины  $a_1$ :

$$\begin{aligned} h_{(a_3+1)p_2+(k_7-1)p_3}^-(\cdot; \cdot) &= (k_7 - 1)\bar{e}_6 + a_3\bar{e}_5 + a_2\bar{e}_4 + M_{4;0}^-(A_{p_0}) = (1.2)_{A\bar{e}_1\bar{e}_2} \\ k_7\bar{e}_6 + (a_2 - 1)\bar{e}_4|_{a_2=1} + M_{4;0}^-(A_{p_0}) &= k_7\bar{e}_6 + M_{4;0}^-(A_{p_0}) = h_{p_0+k_7p_3}^-(\cdot; \cdot), \\ H_{7;0}^-(A) &= \cup_{k_7=1}^{a_4} \{k_7\bar{e}_6 + M_{4;0}^-(A_{p_0})\} = \cup_{k_7=1}^{a_4} \{h_{p_0+k_7p_3}^-(\cdot; \cdot)\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где обозначение  $(1.2)_{A\bar{e}_1\bar{e}_2}$  говорит, что равенства (1.2) рассматриваются в  $A\bar{e}_1\bar{e}_2$ . Здесь  $M_{4;0}^-(A_{p_0})$  в силу (1.9) не является ступенью, а составляет только часть нулевой ступени,  $H_{7;0}^-(A_{p_2})$  — множество, полученное объединением всех ступеней ширины  $a_1$  в количестве  $a_4$  штук из  $M_{7;0}^-(A)$ . Отметим, что параметр  $k_7$  указывает их порядок расположения среди ступеней ширины  $a_1$  при движении по маршу  $M_{7;0}^-(A)$  вверх. Вследствие введения такого порядка  $h_{p_0+k_7p_3}^-(\cdot; \cdot)$  есть первая ступень, принадлежащая второй компоненте  $M_{6;0}^-(A_{p_2})$  из  $M_{7;0}^-(A)$ . Каждая ступень  $h_{p_0+k_7p_3}^-(\cdot; \cdot)$  из (2.1) является горизонтальным звеном ломаной  $S_{AB}^-$  соответственно начало и конец, которого в  $OXY$  таковы:

$$\begin{aligned} A_{p_0+k_7p_3} &= (q - (q_0 + k_7q_3); p_0 + k_7p_3)_{OXY}, \\ A_{p_2+k_7p_3}^e &= (q - (q_2 + k_7q_3); p_0 + k_7p_3)_{OXY}. \end{aligned}$$

Итак, маршу  $M_{7;0}^-(A)$  принадлежит ровно  $a_4$  ступеней  $h_{p_0+k_7p_3}^-(\cdot; \cdot)$  ширины  $a_1$ , которые получаются параллельным переносом горизонтального отрезка  $M_{4;0}^-(A_{p_0})$  с концевыми точками  $A_{p_0} = (1; 0)$  и  $A_{p_2}^e = (a_1 + 1; 0)$ . Этот перенос задается левой частью из последнего равенства в (2.1), когда  $k_7$  пробегает множество  $\{\overline{1, a_4}\}$ .

Остальные искомые ступени определяются с помощью алгоритма в виде параллельных переносов (1.15) и (1.16). Работу этого алгоритма отразим на графе с рис. 2.

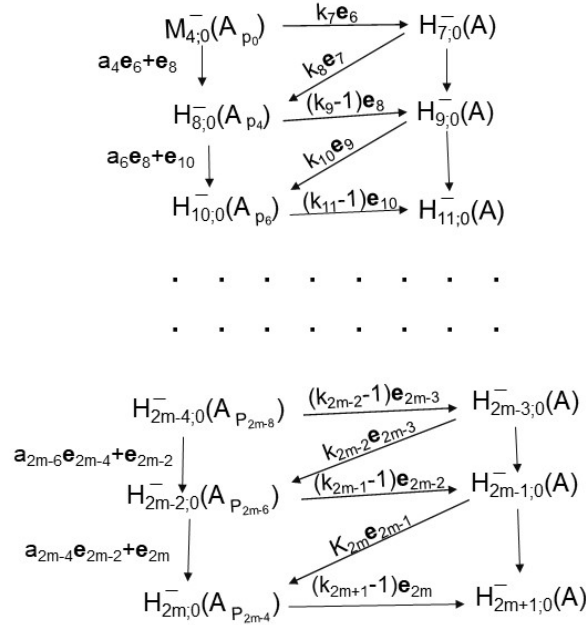


Рис. 2: Граф, дающий значение индексов ступеней ширины  $a_1$  марша  $M_{2m+1;0}^{-}(A)$ ,  $m = \overline{3, N'}$ .  
 На графе  $e = \bar{e}$ ,  $k_s = \bar{1}$ ,  $a_{s-3}$ ,  $s = 2m + 1$ .

Описание графа на рис. 2. Вершины  $H_{k;0}^{-}(\cdot)$ ,  $k = \overline{7, 2m+1}$ , есть множества, образованное ступенями ширины  $a_1$  и принадлежащие маршу  $M_{k;0}^{-}(\cdot)$ , а направленные ребра снабжены весом в виде одного вектора или семейства векторов, определяемых параметром  $k_s$ ,  $s = 2m + 1$ , если вес не указан, то считается, что это ребро имеет нулевым вектором.

Множество  $H_{k;0}^{-}(\cdot)$ ,  $k = \overline{8, 2m+1}$ , есть объединение множеств  $H_{k-2;0}^{-}(\cdot)$  и  $H_{k-1;0}^{-}(\cdot)$  после того, как к любому элементу каждого из этих прибавляются соответствующие векторы, в случае когда вес есть семейство векторов, то прибавляется каждый вектор этого семейства. (При  $k - 2 = 6$ , нужно заменить множество  $H_{6;0}^{-}(\cdot)$  на  $M_{4;0}^{-}(A_{p_0})$ .) Такой процесс объединения обеспечивается алгоритмом, определяемым (1.15) и (1.16). Первый шаг работы этого алгоритма дает (2.1).

Так как в вершину  $H_{7;0}^{-}(\cdot)$  входит только одно ребро, а из каждой вершины  $H_{k;0}^{-}(\cdot)$  исходит два ребра при  $k = \overline{7, 2m+1}$  и входит также два при  $k = \overline{8, 2m+1}$ , то общее количество путей с началом  $M_{4;0}^{-}(A_{p_0})$  и концом  $H_{2m+1;0}^{-}(\cdot)$  равно числу Фибоначчи  $F_{2m-5}$  при условии, что  $F_0 = F_1 = 1$ .

Пусть  $W_{2m+1} = \{w_{2m+1;1}, \dots, w_{2m+1;F_{2m-5}}\}$  — множество путей из  $M_{4;0}^{-}(A_{p_0})$  в  $H_{2m+1;0}^{-}(A)$ , а  $\dot{V}(w_{2m+1;i}) = \{\dot{v}_l(w_{2m+1;i})\}_{l=1}^{2m+1;j_i}$ ,  $i = \overline{1, F_{2m-5}}$ , — последовательность весов, члены которой есть либо семейства векторов, либо в виде одного вектора (включая и нулевые), из  $w_{2m+1;i}$ , взятые в порядке, который задает движение вдоль пути  $w_{2m+1;i}$  от  $M_{4;0}^{-}(A_{p_0})$  к  $H_{2m+1;0}^{-}(A)$ . При любом фиксированном  $i$  из  $\{1, F_{2m-5}\}$  выбираем произвольным образом вектор в каждом элементе из  $\dot{V}(w_{2m+1;i})$ , который является семейством, далее суммируем выбранные векторы и с оставшимися векторами, которые являются весами для пути  $w_{2m+1;i}$ . Ординату получен-

ного вектора складываем с  $p_0$  получаем индекс ступени ширины  $a_1$ , принадлежащей  $S_{AB}^-$  и порожденной путем  $w_{2m+1;i}$ ) для конкретно выбранных его весов. Перебирая содержимое всех семейств векторов из  $\check{V}(w_{2m+1;i})$  таким образом при произвольно фиксированном  $i$ , получаем множество искомым ступеней, который дает путь  $w_{2m+1;i}$ . Поступаем так с каждым  $i$  из  $\{\overline{1, F_{2m-5}}\}$  мы найдем индексы всех искомым ступеней ширины  $a_1$ , принадлежащие маршру  $M_{2m+1;0}^-(A)$ ,  $m = \overline{3, N'}$ , причем  $M_{2N'+1;0}^-(A) = S_{AB}^-$ . Индекс ступени дает её аналитическое задание. Множество всех ступеней ширины  $a_1$  из  $M_{2m+1;0}^-(A)$  обозначим  $H_{2m+1;0}^-(A)$ , которое является вершиной графа, как отмечалось выше.

## 2. Количество ступеней ширины $a_1$ в $S_{AB}^-$

В силу построений в пункте 1 количество ступеней ширины  $a_1$  в  $S_{AB}^-$  равно мощности  $|H_{2N'+1;0}^-(A)|$  множества  $H_{2N'+1;0}^-(A)$ . Последнее получается с помощью алгоритма, работу которого описывает граф на рис. 2, его вершинами служат множества  $M_{4;0}^-(A_{p_0})$ ,  $H_{7;0}^-(A)$ ,  $H_{8;0}^-(A_{p_4})$ ,  $H_{9;0}^-(A)$ ,  $H_{10;0}^-(A_{p_6})$ ,  $\dots$ ,  $H_{2m;0}^-(A_{p_{2m-4}})$ ,  $H_{2m+1;0}^-(A)$ , где  $A_{p_j} = (q_j; p_j) = (q - q_j; p_j)_{OXU}$ , причем  $p_j/q_j$  есть подходящая дробь порядка  $j$  цепной дроби  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_N]$ . Упорядочим вершины этого графа с помощью первых индексов, тогда  $M_{4;0}^-(A_{p_0})$  — начальная вершина, а  $H_{2k+5;0}^-(\cdot)$ ,  $k = \overline{1, m-2}$ , будет  $k$ -ой вершиной.  $M_{4;0}^-(A_{p_0})$  есть множество в виде одного отрезка с концами  $(a_1^- + 1; 0) = (q - (a_1^- + 1); 0)_{OXU}$  и  $(1; 0) = (q - 1; 0)_{OXU}$ , который не является ступенью. Нечетная вершина  $H_{j;0}^-(A)$ ,  $j = 7, 9, \dots, 2m+1$ , — это множество ступеней ширины  $a_1^-$ , принадлежащих маршру  $M_{j;0}^-(A)$  вектора-отрезка  $\bar{e}_j(A)$ , приложенного к  $A$  и концом  $A_{p_{j-3}}$ . Для четного  $j+1 = 8, 10, \dots, 2m$ , кроме  $j = 2m+1$ , множество  $H_{j+1;0}^-(A_{p_{j-3}})$  также состоит из всех ступеней такого же сорта, но взятых из марша  $M_{j+1;0}^-(A_{p_{j-3}})$  вектора-отрезка  $\bar{e}_{j+1}(A_{p_{j-3}})$  с началом  $A_{p_{j-3}}$  и концом  $A_{p_{j-3}+p_{j-2}}$ . Каждая  $k$ -ая вершина есть результат работы алгоритма на  $k$ -ом шаге. Чтобы получить последующую вершину, нужно каждый элемент из предыдущей вершины параллельно сместить на вес входящего в неё ребра при произвольно фиксированном значении параметра  $k_s$  на рис. 2.

Согласно рассуждениям конца пункта 1 имеет место следующая рекуррентная последовательность равенств:

$$\begin{aligned} |H_{7;0}^-(A)| &= a_4, |H_{8;0}^-(A_{p_4})| = 1 + a_4, |H_{9;0}^-(A)| = |H_{7;0}^-(A)| + a_5 |H_{8;0}^-(A_{p_4})|, \\ |H_{10;0}^-(A_{p_6})| &= |H_{8;0}^-(A_{p_4})| + a_6 |H_{9;0}^-(A)|, \dots, |H_{2m;0}^-(A_{p_{2m-4}})| = |H_{2m-2;0}^-(A_{p_{2m-6}})| \\ &+ a_{2m-4} |H_{2m-1;0}^-(A)|, |H_{2m+1;0}^-(A)| = |H_{2m-1;0}^-(A)| + a_{2m-3} |H_{2m;0}^-(A_{p_{2m-4}})|. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Левые части  $H_{k;0}^-(\cdot)$  для  $k = \overline{7, 2m+1}$  этих равенств представляют собой многочлены  $K_k(a_4, a_5, \dots, a_{k-4})$  от переменных  $a_4, a_5, \dots, a_{k-4}$ , что нам дает возможность записать (2.2) в виде рекуррентного соотношения для  $k = \overline{9, 2m+1}$ , а именно:

$$K_k(a_4, a_5, \dots, a_{k-4}) = a_{k-4} K_{k-1}(a_4, a_5, \dots, a_{k-5}) + K_{k-2}(a_4, a_5, \dots, a_{k-6}) \quad (2.3)$$

с начальными условиями:  $K_7 = |H_{7;0}^-(A)| = a_4$  и  $K_8 = |H_{8;0}^-(A_{p_4})| = \begin{vmatrix} a_4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ , где последнее выражение есть определитель 2-го порядка. Отметим, что это рекуррентное соотношение дает континуанту индекса  $k$  с начальными условиями  $K_{-1} = 0$ ,  $K_0 = 1$ , см. [24].

Отсюда получаем, что количество ступеней ширины  $a_1$  из  $S_{AB}^-$  задается определителем  $(2N' - 5)$ -го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_4 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_5 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_6 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_{2N'-4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & a_{2N'-3} \end{vmatrix} = |H_{2N'+1;0}^-(A)|. \quad (2.4)$$

### 3. Заключение

Исследование данной статьи связаны с задачей С. В. Конягина о шахматной раскраске, см. [25]. Формулировка задачи Конягина: *пусть клетки первой четверти  $I_{OXY}$  системы координат  $OXY$  раскрашены в шахматном порядке, а прямая  $l_\alpha(t) : y = -\alpha x + t, t > 0$ , отсекает от  $I_{OXY}$  треугольник  $\Delta(t)$ . Разность между числами белых и черных клеток, входящих в  $\Delta(t)$  не ограничена ни снизу, ни сверху при  $t \rightarrow \infty$  для любого положительного иррационального числа  $\alpha$ .*

Эта задача решена для  $\alpha = e^{\pm 1} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, \dots]^{\pm 1}$ ,  $[a_0^-; a_1^-, a_2^-, \dots]^{\pm 1}$ ,  $[a_0^+; a_1^+, a_2^+, \dots]^{\pm 1}$ ,  $[a_0^+; a_1^-, a_2^+, \dots]^{\pm 1}$ , где  $a_n^+$  — чётно, а  $a_n^-$  — нечётно, см. [14] – [17]. Все рассматриваемые цепные дроби имеют периодичность по четности, что порождает аналогичную периодичность для их подходящих дроби  $\alpha_n = p_{\alpha,n}/q_{\alpha,n}$ . Это свойство дает возможность найти разность  $\epsilon_n(\alpha)$  между числами белых и черных клеток треугольника  $\Delta(p_{\alpha,n})$ , отсекаемого прямой  $l(p_{\alpha,n}) : y = -\alpha_n x + p_{\alpha,n}$  от  $I_{OXY}$ . Затем с помощью последовательности  $\{\epsilon_n(\alpha)\}_{n=1}^\infty$  при фиксированном  $\alpha$  строим две последовательности, одна из которых не ограничена снизу, а другая — сверху, которые дают требуемый результат, в связи с чем см. конец пункта 1.

Попытки распространить такой метод на цепные дроби, имеющие период по четности их элементов больше двух, захлебнулись в громоздкости выкладок.

Полученные результаты предполагается использовать для нахождения разности аналогичных  $\epsilon_n(\alpha)$ . Это надежда связана со следующим. Пусть клетки первого квадранта раскрашены в шахматном порядке так, что угловая клетка белая. Если нам известны координаты вершины некоторой клетки, то по этим координатам мы можем установить её цвет. Это следует из того, что диагональ любой белой клетки, определяемая вершинами с координатами одинаковой четности, составляет угол  $45^\circ$  с положительным направлением оси  $OX$ , другая диагональ, имеющая вершины с координатами разной четности —  $135^\circ$ , а для любой черной клетки всё наоборот. Если  $K_{(x;y)_{OXY}}$  есть клетка такая, что её ближайшая вершина к  $O$  имеет координаты  $(x;y)_{OXY}$ , то *индикатором этой клетки* будет служить степень  $(-1)^{x+y}$ . Если  $K_{(x;y)_{OXY}}$  — белая, то  $x + y$  чётно и  $(-1)^{x+y} = 1$ , если  $x + y$  нечётно и  $(-1)^{x+y} = -1$ , то клетка  $K_{(x;y)_{OXY}}$  черная. Поэтому будем писать  $K_{(x;y)_{OXY}} = (-1)^{x+y}$  а координаты  $(x;y)_{OXY}$  назовём *координатами клетки  $K_{(x;y)_{OXY}}$  в  $OXY$* .

В пункте 3 показано, что ширина каждой ступеней из  $S_{AB}^-$  равна  $a_1$  или  $a_1 + 1$ , где  $a_1$  элемент первого порядка цепной дроби  $[0; a_1, 1, a_3, \dots, a_{2N'+1}]$ . Поэтому при  $a_1 = a_1^-$  ширина  $a_1^- + 1$  чётна, а, следовательно, разность между числами белых и черных клеток прямоугольника, принадлежащего треугольнику  $OAB$ , у которого одна из сторон есть ступень ширины  $a_1^- + 1$ , равна нулю.

Пусть  $(x_1; y_1)_{OXY}, \dots, (x_I; y_I)_{OXY}$  — координаты левых вершин  $A_{s_1}, \dots, A_{s_I}$ , ступеней наименьшей ширины  $a_1^-$  из  $S_{AB}^-$ , где  $I = |H_{2N'+1;0}^-(A)|$ , см. (2.4). Эти координаты устанавливаются посредством алгоритма, построенного в пункте 1, — работу его описывает граф на рис.

2. Поэтому разность  $\mu(\hat{S}_{AB})$  между числами белых и черных клеток из  $OAB$  определяется формулой:

$$\mu(\hat{S}_{AB}) = \sum_{i=1}^I (-1)^{x_i} \delta_{\ominus, y_i^{\pm}}, \quad (3.1)$$

где  $\hat{S}_{AB}$  — клетчатая область, состоящая из клеток, принадлежащих  $OAB$ ,  $(-1)^{x_i}$  — индикатор клетки  $K(x_i; 0)_{OXU}$ ,  $\delta_{\ominus, y_i^{\pm}}$  — символ Кронекера, а верхний индекс  $\pm$  в обозначении  $y_i^{\pm}$  указывает на четность ординаты  $y_i$  — плюс говорит, что она четна, минус — нечетна, что также отражается в виде записи:  $y_i^+ = \oplus$  и  $y_i^- = \ominus$ . Если мы сможем устанавливать число  $I'$  ступеней ширины  $a_1$  с нечетными ординатами  $y_i^-$ ,  $i = i_{i'_1}, i_{i'_2}, \dots, i_{i'_{I'}}$ , а также количества четных и нечетных абсцисс точек из множества  $\{(x_{i_{i'_1}}; y_{i_{i'_1}}^-)_{OXU}, \dots, (x_{i'_{I'}}; y_{i'_{I'}}^-)_{OXU}\}$ , то (3.1) нам нужный результат. Напомним, что  $x_i$  и  $y_i$  вычисляется через формулы (1.1) после замены  $q$  на  $x$  и  $p$  на  $y$ . Какие индексы  $u$  ( $q_n; p_n$ ) из (1.1) дают нам нужный результат в этом и состоит основная трудность, в связи с чем см. [13].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М.: Наука, 1978. — 112 с.
2. Бухштаб А. А. Теория чисел. — М.: Просвещение, 1966. — 376 с.
3. Нестеренко Ю. В. Теория чисел. — М.: Академия, 2008. — 272 с.
4. Нестеренко Ю. В., Никишин Е. М. Очерк о цепных дробях // Квант. — 1983. — № 5. — С. 16–20; № 6. — С. 26–30.
5. Михалович Ш. Х. Теория чисел. — М.: Высшая школа, 1967. — 336 с.
6. Энциклопедия элементарной математики. Книга 1. Арифметика / под ред. П. С. Александрова, А. И. Маркушевича, А. Я. Хинчина. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. — 448 с.
7. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304 с. — URL: <https://libcats.org/book/504157> (дата обращения: 01.01.2024).
8. Арнольд В. И. Цепные дроби. — М.: МЦНМО, 2001. — 40 с. — (Математическое просвещение; вып. 14). — URL: <https://www.mcsme.ru/mmmf-lectures/books/books/book.14.pdf> (дата обращения: 01.01.2024).
9. Karpenkov O. Geometry of Continued Fractions. — Heidelberg: Springer, 2013. — xviii, 405 p. — (Algorithms and Computation in Mathematics; vol. 26).
10. Герман О. Н. Геометрия цепных дробей // Байкальские чтения. — Иркутск, 2016. — URL: <https://www.youtube.com/watch?v=h9bglrhFpr8> (дата обращения: 01.01.2024).
11. Klein F. Ausgewahlte Kapitel der Zahlentheorie. — Leipzig: Teubner, 1907. — 364 p.
12. Коркина В. И. Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры // Труды МИАН. — 1995. — Т. 209. — С. 143–166. — URL: <https://www.mathnet.ru/links/95f8a9601d2ed7a26c463967fed6e473/tm1172.pdf> (дата обращения: 01.01.2024).
13. Галламов М. М. О некоторых подходах к решению задачи С. В. Конягина о шахматной раскраске // Материалы научно-исследовательского семинара по дискретной геометрии и геометрии чисел / под рук. Н. П. Долбилина и др. — М.: МГУ, 2024. — С. 1–8. — URL: [http://new.math.msu.su/departament/dm/data/uploads/diskrgeom/gallamov\\_doklad\\_dg\\_gch16-4-2024.pdf](http://new.math.msu.su/departament/dm/data/uploads/diskrgeom/gallamov_doklad_dg_gch16-4-2024.pdf) (дата обращения: 01.01.2024).

14. Галламов М. М. Прямые  $y = -e \cdot x + t$  и шахматная раскраска // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: материалы XVI Междунар. конф., посв. 80-летию проф. М. Деза. — Тула, 2019. — С. 247–250.
15. Галламов М. М. Прямые  $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x + s$  и шахматная раскраска // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: материалы XVII Междунар. конф. — Тула, 2019. — С. 247–250.
16. Галламов М. М. Прямые  $y = -[a_0^\pm; a_1^\pm, a_2^\pm, \dots] \cdot x + t$  с четными  $a_n^+$  и нечетными  $a_n^- = a_n^+ (\neq 1)$  и шахматная раскраска // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: материалы XVIII Междунар. конф. — Тула, 2020. — С. 261–265.
17. Галламов М. М. Целочисленная аппроксимация отрезка // Чебышевский сборник. — 2022. — Т. 23, вып. 4. — С. 20–38. — URL: <https://www.mathnet.ru/links/234a67f15bac6686abfb4000f5d3c545/cheb1220.pdf> (дата обращения: 01.01.2024).
18. Шишкин Ю. А. Эйлерова характеристика. — М.: Наука, 1984. — 96 с. — (Популярные лекции по математике; вып. 58). — URL: <http://www.math.ru/lib/book/plm/v58.djvu> (дата обращения: 01.01.2024).
19. Васильев Н. Б. Вокруг формулы Пика // Квант. — 1974. — № 12. — С. 39–43.
20. Вавилов В. В., Устинов А. В. Многоугольники на решетках. — М.: МЦНМО, 2006. — 72 с.
21. Grunbaum V., Shephard G. C. Pick's Theorem // The American Mathematical Monthly. — 1993. — Vol. 100, no. 2. — P. 150–161.
22. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Арифметика. Алгебра. Анализ. — 4-е изд. — М.: Наука, 1987. — Т. 1. — 432 с.
23. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел. — М.: Наука, 1965. — 176 с.
24. Сизый С. В. Лекции по теории чисел: учеб. пособие для студентов вузов. — 2-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 192 с. — ISBN 978-5-9221-0741-9.
25. Khovanova T., Konyagin S. Sequences of Integers with Missing Quotients and Dense Points Without Neighbors // arXiv [Электронный ресурс]. — 2011. — URL: <https://arxiv.org/abs/1104.0441> (дата обращения: 01.01.2024).

## REFERENCES

1. Khinchin, A. Ya. 1978, *Tsepnye drobi* [Continued Fractions], 4th ed, Moscow: Nauka, 112 p.
2. Bukhshtab, A. A. 1966, *Teoriya chisel* [Number Theory], Moscow: Prosveshchenie, 376 p.
3. Nesterenko, Yu. V. 2008, *Teoriya chisel* [Number Theory], Moscow: Akademiya, 272 p.
4. Nesterenko, Yu. V, Nikishin, E. M. 1983, “Ocherk o tsepnykh drobyakh” [Essay on Continued Fractions], *Kvant*, 5, pp. 16–20; 6, pp. 26–30.
5. Mikhalovich, Sh. Kh. 1967, *Teoriya chisel* [Number Theory], Moscow: Vysshaya Shkola, 336 p.
6. Aleksandrov, P. S, Markushevich, A. I, Khinchin, A. Ya. 1951, *Entsiklopediya elementarnoy matematiki. Kniga 1. Arifmetika* [Encyclopedia of Elementary Mathematics. Book 1. Arithmetic], Moscow-Leningrad: GITTL, 448 p.

7. Arnold, V. I. 1978, *Dopolnitel'nye glavy teorii obyknovennykh differential'nykh uravneniy* [Additional Chapters of Ordinary Differential Equations Theory], Moscow: Nauka, 304 p.
8. Arnold, V. I. 2001, *Tsepnye drobi* [Continued Fractions], Moscow: MCCME, 40 p.
9. Karpenkov, O. 2013, *Geometry of Continued Fractions*, Heidelberg: Springer, 405 p.
10. German, O. N. 2016, "Geometriya tsepnykh drobey" [Geometry of Continued Fractions], *Baikal Readings* [Online], Available at: <https://www.youtube.com/watch?v=h9bglrhFpr8>
11. Klein, F. 1907, *Ausgewahlte Kapitel der Zahlentheorie*, Leipzig: Teubner, 364 p.
12. Korkina, V. I. 1995, "Dvumernye tsepnye drobi. Samye prostye primery" [Two-dimensional Continued Fractions. Simplest Examples], *Trudy MIAN*, 209, pp. 143–166.
13. Gallamov, M. M. 2024, "O nekotorykh podkhodakh k resheniyu zadachi S.V. Konyagina o shakhmatnoy raskraske" [On Some Approaches to Solving S.V. Konyagin's Chess Coloring Problem], in *Materialy nauchno-issledovatel'skogo seminara po diskretnoy geometrii i geometrii chisel*, Moscow: Moscow State University, pp. 1–8.
14. Gallamov, M. M. 2019, "Straight lines  $y = -e \cdot x + t$  and chess coloring", in *Algebra, Theory of Numbers and Discrete Geometry: Modern Problems, Applications and History Problems*, Tula: Tula State University, pp. 247–250.
15. Gallamov, M. M. 2019, "Straight lines  $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x + s$  and chess coloring", in *Algebra, Theory of Numbers and Discrete Geometry: Modern Problems, Applications and History Problems*, Tula: Tula State University, pp. 247–250.
16. Gallamov, M. M. 2020, "Straight lines  $y = -[a_0^\pm; a_1^\pm, a_2^\pm, \dots] \cdot x + t$  with even  $a_n^+$  and odd  $a_n^- = a(\neq 1)$  and chess coloring", in *Algebra, Theory of Numbers and Discrete Geometry: Modern Problems, Applications and History Problems*, Tula: Tula State University, pp. 261–265.
17. Gallamov, M. M. 2022, "Tselochislennaya approksimatsiya otrezka" [Integer Approximation of a Segment], in *Algebra, Theory of Numbers and Discrete Geometry: Modern Problems, Applications and History Problems*, Tula: Tula State University, pp. 235–238.
18. Shishkin, Yu. A. 1984, *Eylerova kharakteristika* [Euler Characteristic], Moscow: Nauka, 96 p.
19. Vasil'ev, N. B. 1974, "Vokrug formuly Pika" [Around Pick's Formula], *Kvant*, 12, pp. 39–43.
20. Vavilov, V. V., Ustinov, A. V. 2006, *Mnogougol'niki na reshetkakh* [Polygons on Lattices], Moscow: MCCME, 72 p.
21. Grunbaum, B., Shephard, G. C. 1993, "Pick's Theorem", *The American Mathematical Monthly*, 100(2), pp. 150–161.
22. Davenport, H. 1965, *The Higher Arithmetic: An Introduction to the Theory of Numbers*, New York: Harper & Brothers, 176 p.
23. Klein, F. 1987, *Elementarnaya matematika s tochki zreniya vysshey. Arifmetika. Algebra. Analiz* [Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Arithmetic. Algebra. Analysis], 4th ed, Moscow: Nauka, 432 p.
24. Sizyy, S. V. 2008, *Lektsii po teorii chisel* [Lectures on Number Theory], 2nd ed, Moscow: Fizmatlit, 192 p.

25. Khovanova, T., Konyagin, S. 2011, "Sequences of Integers with Missing Quotients and Dense Points Without Neighbors", *arXiv* [Preprint], Available at: <https://arxiv.org/abs/1104.0441>

Получено: 27.05.2025

Принято в печать: 17.10.2025