ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 4.

УДК: 517 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-240-256

О проблеме вхождения в некоторых классах групп Артина

В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя, А. С. Угаров

Безверхний Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, Российская таможенная академия (г. Москва).
e-mail: vnbezv@rambler.ru
Безверхняя Наталия Борисовна — кандидат физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).
e-mail: vnbezv@rambler.ru
Угаров Андрей Сергеевич — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ugarandrey@gmail.com

Аннотация

Основным результатом статьи является положительное решение проблемы вхождения в группах Артина с древесной структурой.

Ключевые слова: группы, группы Артина, проблема вхождения.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:
Безверхний, В. Н., Безверхняя, Н. Б., Угаров, А. С. О проблеме вхождения в некоторых классах групп Артина // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 240–256.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 4.

UDC: 517 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-240-256

On the occurrence problem in some classes of Artin groups

V. N. Bezverkhnii, N. B. Bezverhnaya, A. S. Ugarov

Bezverkhnii Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, Russian Customs Academy (Moscow).
e-mail: vnbezv@rambler.ru
Bezverhnaya Nataliya Borisovna — candidate of physical and mathematical sciences, MTUCI (Moscow).
e-mail: vnbezv@rambler.ru
Ugarov Andrey Sergeevich — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ugarandrey@gmail.com

Abstract

In this article, the occurrence problem in Artin groups with arboreal is solved.

Keywords: groups, Artin's groups, entry problem.

Bibliography: 21 titles.

For citation:
Bezverkhnii, V. N., Bezverhnaya, N. B., Ugarov, A. S. 2025, "On the occurrence problem in some classes of Artin groups" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 240–256.

Введение

Пусть $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ – конечное множество, $M = \{m_{ij}\}$, $i, j \in I$, где $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, симметрическая матрица Коксетера; $m_{ii} = 1$ для любого $i \in I$, $m_{ij} = m_{ji}$ при $i \neq j$, $i, j \in I$; $m_{ij} \in \{2, 3, \ldots, n, \ldots, \infty\}$

Рассмотрим конечный граф Г, между вершинами которого v_i и элементами множества σ установлено взаимно однозначное соответствие; причем, если две вершины v_i, v_j связаны ребром, то данному ребру соответствует элемент $m_{ij} \in M$; если вершины v_i, v_j не соединены ребром, то данной паре соответствует элемент $m_{ij} = \infty$.

Такой граф называется графом Коксетера.

С графом Коксетера связана группа Артина G_Γ с системой образующих $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ и системой определяющих соотношений: $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}}$ при $i \neq j$, где $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \sigma_i\sigma_j\sigma_i \ldots$, слово длины m_{ij} из чередующихся образующих σ_i, σ_j.

Запишем копредставление группы G_Γ:

$$G_\Gamma = \langle\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n;\ \langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}},\ i \neq j,\ i, j \in I\rangle. \tag{1}$$

Рассмотрим в G_Γ нормальный делитель, порожденный множеством σ_i^2, $i \in I$, $N = \langle\sigma_i^2, i = \overline{1, n}\rangle^{G_\Gamma}$. Тогда группа $\overline{G_\Gamma} = G_\Gamma/N$ есть группа Коксетера, соответствующая группе G_Γ. Если группа $\overline{G_\Gamma}$ конечная, то группу Артина называют группой Артина конечного типа. Данный класс групп содержит группы кос β_{n+1}, определенных Э.Артиным и доказавшего разрешимость проблемы равенства слов в β_{n+1}.

Алгебраическая теория групп кос была построена А.А.Марковым [1], давшим новое доказательство проблемы равенства в группах β_{n+1}.

Проблема сопряженности слов в β_{n+1} была решена Ф.А.Гарсайдом в 1969г. [2]. Э.Брискорн и К.Сайто, используя идеи Ф.А.Гарсайда, решили проблему равенства и сопряженности слов в группах Артина конечного типа [3].

В. Н. Безверхний доказал неразрешимость проблемы вхождения в неприводимых группах Артина конечного типа. [4].

П.Шупп и К.Аппель определили широкий класс групп Артина (Коксетера) большого типа ($m_{ij} \geqslant 3$) и экстрабольшого типа ($m_{ij} > 3$). Для групп Артина экстрабольшого типа, используя диаграмный метод, ими были решены проблемы равенства и сопряженности слов [5].

Для групп Артина большого типа К.Аппель [6] и В.Н.Безверхний [7] независимо решили проблему равенства и сопряженности слов, а также в данном классе групп В.Н. Безверхним решена проблема обобщенной сопряженности слов. [8].

В [9] автором введено понятие группы Артина (Коксетера) с древесной структурой.

Определение 1. Группа Артина (Коксетера) называется группой Артина (Коксетера) с древесной структурой, если граф Г, соответствующий данной группе, является дерево-графом.

Элементы матрицы Коксетера, соответствующей группе Артина (Коксетера) с древесной структурой m_{ij}, могут принимать любые значения из множества $\{2, 3, \ldots, , \infty\}$.

Теорема 1 [10]. В группах Артина G_Γ с древесной структурой разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.

Автором в [11] было определено понятие группы Артина (Коксетера) с m-угольной структурой.

Определение 2 [11]. Группа Артина (Коксетера) G_Γ называется группой с m-угольной структурой, если ее граф Γ состоит из m-угольников.

Элементы матрицы Коксетера m_{ij}, соответствующей данной группе, принадлежат множеству $\{2, 3, \ldots, , \infty\}$.

Теорема 2 [12]. Пусть G_Γ – группа Артина с m-угольной структурой, $m > 3$; тогда в группе G_Γ разрешима проблема равенства и сопряженности слов.

Основным результатом данной статьи является решение проблемы вхождения в конечнопорожденных группах Артина с древесной структурой.

Рассмотрим основные понятия и теоремы, которые будут использованы при решении указанной проблемы.

Определение 3. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любой конечнопорожденной подгруппы $H < G$ и любого элемента $w \in G$, установить, принадлежит ли w подгруппе H.

Определение 4. В группе G разрешима проблема пересечения конечнопорожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых конечнопорожденных подгрупп H_1, H_2 из G выписать образующие их пересечения.

Определение 5. В группе G разрешима проблема пересечения смешанных классов конечнопорожденных подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых конечнопорожденных подгрупп H_1, H_2 из G и любого элемента $w \in G$ установить пусто или не пусто пересечение $wH_1 \cap H_2$.

Теорема 3 [14]. Пусть $G = G_1 * G_2$ – свободное произведение групп G_1, G_2, в каждой из которых пересечение конечнопорожденных подгрупп есть конечнопорожденная подгруппа. Тогда, если:

1) существует алгоритм, выписывающий для любых двух конечнопорожденных подгрупп группы G_i, $i = \overline{1,2}$, образующие их пересечения;

2) существует алгоритм, позволяющий для любого $w \in G_i$, $i = \overline{1,2}$, и любых двух конечнопорожденных подгрупп H_1, H_2 из G установить пусто или не пусто множество $wH_1 \cap H_2$, то в группе G разрешимы проблемы (1), (2).

Теорема 4 [17]. В группе G, являющейся свободным произведением конечнопорожденных свободных групп F_m, F_n, объединенных по циклическим подгруппам

$$G = \langle F_m * F_n; \quad w = v\rangle, \qquad w \in F_m, v \in F_n \tag{2}$$

разрешима проблема вхождения.

Основным понятием, используемым в статье, является понятие специального множества слов в свободном произведении групп с объединением и в HNN-разрешении групп.

Пусть
$$G = \langle A_1 * A_2;\ relA_1, relA_2, \varphi(U_1) = U_2\rangle \tag{3}$$

свободное произведение групп A_1, A_2, объединенных по изоморфным подгруппам U_1, U_2, где $U_1 < A_1$, $U_2 < A_2$ с помощью фиксированного конструктивного изоморфизма φ.

Известно, что каждый элемент $g \in G$ можно единственным образом представить в виде

$$g = l_{1g} l_{2g} \ldots l_{ng} K_g r_{ng} r_{n-1g} \ldots r_{1g}, \tag{4}$$

где r_{ig}, r_{i+1g} аналогично l_{ig}^{-1}, l_{i+1g} – представители правых смешанных классов группы A_1 по U_1 и A_2 по U_2, причем r_{ig}, r_{i+1g} (аналогично l_{ig}, l_{i+1g}) принадлежат разным сомножителям G,

K_g - ядро слова g. Если K_g не принадлежит объединяемой подгруппе, то l_{ng} и r_{ng} принадлежат одному сомножителю группы G, если K_g принадлежит объединяемой подгруппе, то l_{ng} и r_{ng} принадлежат разным сомножителям. В первом случае $l(g) = 2n+1$ – обозначает слоговую длину g, во втором случае –

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} h r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{5}$$

где $h = K_g$, $l(g) = 2n$. Если в слове (4) $l_{1g} \dots l_{ng} = (r_{ng} \dots r_{1g})^{-1}$, то слово

$$g = r_{1g}^{-1} \dots r_{ng}^{-1} K_g r_{ng} \dots r_{1g} \tag{6}$$

называется трансформой. Слова вида (4), (5) называются нетрансформами; причем слово вида (4) нетрансформой нечетной длины, а слово вида (5) – нетрансформой четной длины. Подслово $l_{1g} \dots l_{ng}$ называется левой половиной, $r_{ng} \dots r_{1g}$ – правой половиной слов (4), (5).

Рассмотрим конечное множество $W = \{w_1 | i = \overline{1,n}\}$ слов группы G, каждое из которых приведено к виду (4), (5), (6).

Определение 6. Левая (правая) половина слова $w_i = l_{1w_i} \dots l_{mw_i} K_{w_i} r_{mw_i} \dots r_{1w_i}$ называется изолированной в множестве W, если не существует слова w_j^{ϵ}, $\epsilon = \pm 1$, из множества $\{W \setminus \{w_i\}\}$, у которого можно выделить $l_{1w_i} \dots l_{mw_i} (r_{mw_i} \dots r_{1w_i})$ в качестве начального (конечного) подслова [17], [19].

Определение 7 [13]. Назовем конечное множество слов $W = \{w_1 | i = \overline{1,n}\}$ группы G специальным, если оно удовлетворяет условиям:

1) левые половины нетрансформ из W изолированы в нем; у нетрансформ четной длины изолированы левая и правая половины;

2) длину нетрансформ $w_i \in W$ нельзя уменьшить, умножая на слово из подгруппы, порожденной множеством $W \setminus \{w_i\}$; длину произвольного слова $w_i \in W$ нельзя уменьшить, умножая на слово v, $l(v) < l(w_i)$, принадлежащее подгруппе $\langle W \rangle$;

3) если $w_0^{\epsilon} = l_{1w_0} \dots l_{sw_0} K_{w_0} r_{sw_0} \dots r_{jw_0} \dots r_{1w_0}$, $\epsilon = \pm 1$, $j < s$, w_0 – нетрансформа из W и подгруппа $B = \langle W \rangle \cap r_{1w_0}^{-1} \dots r_{jw_0}^{-1} D r_{jw_0} \dots r_{1w_0}$, где

$$D = \begin{cases} A_1, & \text{если} \quad r_{jw_0} \in A_2 \\ A_2, & \text{если} \quad r_{jw_0} \in A_1 \end{cases}$$

не является единичной, то $l(w_0 u w_{\alpha}^{-1}) > l(w_0)$ для любого $u \in B$ и любой нетрансформы $w_{\alpha} \in \{W \setminus \{w_0\}\}$, правая половина которой оканчивается подсловом $r_{jw_0} \dots r_{1w_0}$;

4) для слов w_i^{ϵ}, w_j^{η}, $\epsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$,

$$w_i^{\epsilon} = l_{1w_i} \dots l_{sw_i} l_{s+1w_i} \dots K_{w_i} r_{pw_i} \dots r_{1w_i},$$
$$w_j^{\eta} = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l_{s+1w_j} \dots l_{mw_j} K_{w_j} r_{mw_j} \dots r_{1w_s},$$

где $w_i, w_j \in W$, $s \leqslant m \leqslant p$, не существует слова $g \neq 1$, слоговой длины $l(g) < 2s$, $g \in \langle W \rangle$ такого, что если $l_{1w_i} \dots l_{sw_i} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, то

$$g w_i = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l'_{s+1w_i} \dots l'_{pw_i} K'_{w_i} r_{pw_i} \dots r_{1w_i}.$$

Пусть $W = \{w_i | i = \overline{1,N}\}$ – специальное множество слов. Разобьем его на подмножества нетрансформ M_0 и множества M_i, $i = 1,k$ трансформ с одинаковыми крыльями, с ядрами содержащихся в одной подгруппе, сопряженной некоторой подгруппе из A_1 или из A_2. Каждое из M_i подмножеств порождает подгруппу, которую для краткости будем обозначать (M_i), вместо обычно принятого $gp(M_i)$, $i = 0,1,2,\dots,k$:

$$(M_i) = r_{1i}^{-1} \dots r_{si}^{-1} A'_i r_{si} \dots r_{1i},$$

здесь A'_1 – подгруппа из A_1 или из A_2, порожденная ядрами всех трансформ множества M_i.

Подгруппы, порожденные трансформами, упорядочим по длинам их трансформ. Упорядоченный ряд будем обозначать:

$$(M_1) \leqslant (M_2) \leqslant \ldots \leqslant (M_k). \tag{7}$$

Лемма 1 [17], [19]. Ряд (7) можно преобразовать в ряд

$$(M_1') \leqslant (M_2') \leqslant \ldots \leqslant (M_{k'}') \tag{8}$$

со следующими свойствами:

1) $qp(M_0, (M_1), \ldots, (M_k)) = qp(M_0, (M_1'), \ldots, (M_{k'}'))$;

2) если подгруппа $(M_{j'}') = r_{1x}^{-1} \ldots r_{sx}^{-1} A_{j'}' r_{sx} \ldots r_{1x}$, $1 \leqslant j' \leqslant k'$, ряда (8) содержит трансформу $u = r_{1x}^{-1} \ldots r_{sx}^{-1} h r_{sx} \ldots r_{1x}$, где h принадлежит объединяемой подгруппе, то среди подгрупп ряда (8) имеется подгруппа

$$(M_i') = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s-1x}^{-1} A_i' r_{s-1x} \ldots r_{1x},$$

содержащая u;

3) если для некоторой трансформы $u = r_{1x}^{-1} \ldots r_{sx}^{-1} K r_{sx} \ldots r_{1x}$, принадлежащей подгруппе $(M_j') = r_{1x}^{-1} \ldots r_{sx}^{-1} A_j' r_{sx} \ldots r_{1x}$, и нетрансформы $y = l_{1y} \ldots l_{s_1 y} K_y r_{s_1 y} \ldots r_{1y}$, $s_1 \geqslant s$, (левая половина y изолирована) множества M_0, выполняется соотношение $l(y^{-1}uy) \leqslant l(y)$, то существует подгруппа (M_p') ряда (8), содержащая трансформу $y^{-1}uy$; если $l(y^{\epsilon}uy^{-\epsilon}) < l(y)$, где $l(y) = 2s_1 + 1$, либо $l(y) = 2s_1$, то существует подгруппа (M_p') ряда (8), содержащая тарнсформу $y^{\epsilon}uy^{-\epsilon}$.

4) если

$$(M_j') = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} A_j' r_{s_1 x} \ldots r_{1x}$$
$$(M_q') = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} r_{s_1+1,y}^{-1} A_q' r_{s_1+1,y} r_{s_1 x} \ldots r_{1x}$$

подгруппы ряда (8) и подгруппа (M_j') содержат трансформу $u = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} h r_{s_1 x} \ldots r_{1x}$ либо трансформу $u' = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} K r_{s_1 x} \ldots r_{1x}$, где $K = r_{s_1+1,y}^{-1} h r_{s_1+1,y}$, то подгруппа (M_q') содержит трансформы u и u';

5) если $(M_p') = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} A_p' r_{s_1 x} \ldots r_{1x}$ подгруппа ряда (8) и

$$y = l_{1y} \ldots l_{s_2 y} K r_{s_2 y} \ldots r_{s_1+1,y} r_{s_1 x} \ldots r_1$$

элемент из специального множества $W \cup W^{-1}$, подслово $r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} r_{s_1+1,y}^{-1}$ не является изолированной левой половиной некоторой нетрансформы w^{η}, $\eta \pm 1$, если подгруппа (M_p') содержит трансформу $r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} h r_{s_1 x} \ldots r_{1x}$, либо трансформу $r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1}^{-1} K r_{s_1 x} \ldots r_{1x}$, где $K = r_{s_1+1,y}^{-1} h r_{s_1+1,y}$, то в ряде (8) содержится подгруппа $(M_j') = r_{1x}^{-1} \ldots r_{s_1 x}^{-1} r_{s_1+1,y}^{-1} A_j r_{s_1+1,y} \ldots r_{1x}$, содержащая эти трансформы.

Лемма 2 [17]. Подгруппа (M_0), порожденная нетрансформами специального множества, свободна и не содержит трансформ.

Лемма 3 [17], [19]. Пусть $w_j = l_{1j}^{-1} \ldots l_{kj}^{-1} l_{k+1j} \ldots l_{sj} K_j r_{sj} \ldots r_{1j}$ – слово из специального множества W, где $v_j^{-1} = l_{1j}^{-1} \ldots l_{kj}^{-1}$ не изолировано в специальном множестве W, тогда, если $v_j^{-1} D v_j \cap qp(M_0, S) \neq E$ (E – единичная подгруппа), где

$$D = \begin{cases} A_1, & \text{если} \quad l_{kj} \in A_2 \\ A_2, & \text{если} \quad l_{kj} \in A_1 \end{cases},$$

то существует подгруппа $(M_i) = v_j^{-1} A_i' v_j$, принадлежащая ряду (8); $qp(M_0, S)$ – подгруппа, порожденная множеством M_0 и подгруппами (M_i), $i = 1, 2, \ldots, k$ ряда (8).

Определение 8 [17], [19]. Произведение $u_1u_2\dots u_k$ назовем словом подгруппы $qp(M_0,S)$ группы G, если

1) $u_i \neq 1$ для любого $i=1,2,\dots,k$;

2) $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, либо принадлежит некоторой подгруппе ряда (8) для любого $i=1,2,\dots,k$;

3) $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$ для любого $i=1,2,\dots,k-1$;

4) u_i, u_{i+1} не содержатся в одной подгруппе ряда (8) для любого $i=1,2,\dots,k-1$;

5) в произведении $u_1u_2\dots u_k$ не содержится произведение $u_iu_{i+1}u_{i+2}$, для которого выполняются условия: $u_i = u_{i+2}^{-1}$, $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, $u_{i+1} \in (M_j)$, $u_iu_{i+1}u_{i+2} \in (M_s)$ для любого $i=1,2\dots,k-2$; $(M_j),(M_s)$ подгруппы ряда (8).

Сомножители u_i назовем u-символами.

Определение 9. [17], [19] Будем говорить, что между словами v_1, v_2 группы G имеет место касание первого, второго или третьего рода, если длина произведения v_1v_2 больше, равна или меньше максимальной из длин $l(v_1)$, $l(v_2)$.

Определение 10. [17], [19] Слово $u_1u_2\dots u_k$ подгруппы $qp(M_0,S)$ является простым, если $l(u_1\dots u_k) = \max\{l(u_1),\dots,l(u_k)\}$.

В [10] доказывается, что всякое слово подгруппы $qp(M_0,S)$ может быть представлено в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание 1-го рода, а также, если в слове $u_1u_2\dots u_k \in qp(M_0,S)$ выполнить сокращения в группе G, то сокращение не затронет, по крайней мере, левую половину u_1.

Теорема 4'. [17], [19] Пусть группа $G\langle A_1 * A_2;\, relA_1, relA_2, \varphi(U_1)=U_2\rangle$, свободное произведение групп A_1, A_2, объединенных по изоморфным подгруппам U_1, U_2, где $U_1 < A_1$, $U_2 < A_2$, с помощью фиксированного конструктивного изоморфизма φ, $\varphi(U_1)=U_2$, $relA_i$ определяющие соотношения A_i, $i=1,2$. Тогда, если подгруппа U_i, $i=1,2$, обладает свойством максимальности в сомножителе A_i, $i=1,2$, и

1) в сомножителях A_i разрешима проблема вхождения;

2) существует алгоритм, позволяющий для любого слова $w \in A_i, i=1,2$ и любой конечно порожденной подгруппы $H < A_i$ определить пусто или не пусто пересечение $wH \cap U_i$;

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой любой конечно порожденной подгруппы $H < A_i$ с подгруппой U_i, то в группе G разрешима проблема вхождения.

Лемма 4. В группе Артина $G_{ab} = \langle a,b;\, \langle ab\rangle^{m_{ab}} = \langle ba\rangle^{m_{ba}}\rangle$, где $m_{ab}=2k+1$ разрешимы:

1) проблема вхождения;

2) проблема пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_{ab}$ с циклической подгруппой $\langle w\rangle < G_{ab}$;

3) существует алгоритм, позволяющий для любого $v \in G_{ab}$, любой конечно порожденной подгруппы $H < G_{ab}$ и любой циклической подгруппы $\langle w\rangle < G_{ab}$ установить пусто или не пусто пересечение $vH \cap \langle w\rangle$.

Доказательство. По условию леммы группе G_{ab} соответствует число Коксетера $m_{ab} = 2k+1$, тогда G_{ab} изоморфна группе

$$B = \langle x, y;\, x^{2k+1} = y^2\rangle,$$

где изоморфизм определяется отображением: $f: a \to x^{k+1}y^{-1}$, $b \to yx^{-k}$. [7]

Из теоремы 2 следует, что в группе B, а следовательно, и в группе G_{ab}, разрешима проблема вхождения.

Покажем, что в группе G_{ab} разрешимы проблемы (2) и (3). Доказательства будем проводить для групп B.

Пусть H – конечно порожденная подгруппа группы B, $\langle w\rangle < B$. Будем считать, что образующие H приведены к специальному множеству: $H = qp(M_0,S)$, где S – порождена подгруппами

$$(M_1) \leqslant (M_2) \leqslant \ldots \leqslant (M_k). \tag{9}$$

Пусть w – циклически несократимо, $l(w) = 1$, тогда $w \in \langle x\rangle$ либо $w \in \langle y\rangle$. Допустим $w \in \langle x\rangle$, если $H \cap \langle x\rangle \neq E$ (E – единичная подгруппа), то ряд (9) содержит подгруппу (M), $(M) = H \cap \langle x\rangle$ (Лемма 3), и $H \cap \langle w\rangle = \langle M\rangle \cap \langle w\rangle$. Аналогично получаем, если $w \in \langle y\rangle$.

Пусть $\forall\, i$, $i = \overline{1,k}$, $(M_i) = E$, тогда H – свободная подгруппа, порожденная множеством M_0, (Лемма 2) и $H \cap \langle w\rangle = E$.

Пусть $l(w) \geqslant 2$, w – циклически несократимое слово в группе B, в противном случае, сопрягая одновременно w и H, добиваемся циклической несократимости w.

Рассмотрим в B подгруппу N, порожденную x^{2k+1}. Очевидно, что $N = \langle x^{2k+1}\rangle^B$, $N < B$. Рассмотрим группу $B_1 = B/N = \langle x, y;\, x^{2k+1}, y^2\rangle$. Пусть Θ – гомоморфизм B на B_1, $\Theta(B) = B_1$. Представим w в виде $w = h_0\tilde{w}$, где $\Theta(w_i) = \tilde{w}_i$, $h \in \langle x^{2k+1}\rangle$, и каждый образующий w_i подгруппы H запишем в виде $w_i = h_i\tilde{w}_i$, $i = \overline{1, N_1}$, $h_i \in \langle x^{2k+1}\rangle$, $\Theta(w) = \tilde{w}$, заметим, что множество $\{\tilde{w} | i = \overline{1, N_1}\} \setminus \{e\}$, где e единичный элемент, является специальным множеством образующих подгруппы $\Theta(H)$ в группе $B_1 = \langle x, y;\, x^{2k+1}, y^2\rangle$, которая есть свободное произведение групп $\langle x; x^{2k+1}\rangle$, $\langle y; y^2\rangle$ с объединением по единичной подгруппе E.

Из теоремы 3 следует, что в группе B_1 разрешима проблема пересечения конечно порожденных подгрупп, поэтому можно эффективно выписать образующие пересечения $\langle\tilde{w}\rangle \cap \Theta(H)$.

Пусть $\tilde{w}_{i1}\tilde{w}_{i2}\ldots\tilde{w}_{is} = \tilde{w}^p$, тогда в группе B: $w_{i1}w_{i2}\ldots w_{is} = x^{\alpha(2k+1)}\tilde{w}_{i1}\tilde{w}_{i2}\ldots\tilde{w}_{is}$, $w^p = x^{\beta(2k+1)}\tilde{w}^p$.

Если $C(B) \cap H = E$, то $H \cap \langle w\rangle = \langle w^p\rangle$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$, где $C(B)$ – центр группы B.

Пусть $\alpha \neq \beta$ и $C(B) \cap H \neq E$, тогда (лемма 3) $C(B) \cap H = (M_1)$, где (M_1) – подгруппа ряда (9), $(M_1) = \langle x^{\alpha_0(2k+1)}\rangle$. Чтобы проверить $H \cap \langle w\rangle \neq E$, рассмотрим соотношение:

$$(x^{\alpha_0(2k+1)})^m (x^{\alpha(2k+1)}\tilde{w}_{i1}\tilde{w}_{i2}\ldots\tilde{w}_{is}) = x^{\beta(2k+1)}\tilde{w}^p. \tag{10}$$

Так как $\tilde{w}^p$ циклически несократимо, то и $\tilde{w}_{i1}\tilde{w}_{i2}\ldots\tilde{w}_{is}$ – циклически несократимо, поэтому равенству (10) соответствует уравнение

$$\alpha_0 m + \alpha = \beta. \tag{11}$$

Решая это уравнение, определяем пересечение $H \cap \langle w\rangle$.

Рассмотрим проблему пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы H с циклической подгруппой $\langle w\rangle$ в группе B. Пусть v – произвольное слово группы B, $v \notin H$. Выясним, пусто или не пусто пересечение $v\,H \cap \langle w\rangle$, то есть

$$v\, u_1u_2\ldots u_k = w^p, \tag{12}$$

где $u_1u_2\ldots u_k$ – слово подгруппы H, образующие которой приведены к специальному множеству, w – циклически несократимое слово.

Рассмотрим случай, когда $l(w) = 1$, пусть $w = x^{(2k+1)\alpha_0}x^s$, $0 \leqslant s < 2k+1$.

Если $l(v) > 1$, то в этом случае эффективно определяется слово $u_1u_2\ldots u_k \in H$, максимально сокращающее длину v.

Построим алгоритм, выписывающий слово $u_1u_2\ldots u_k$ из H с указанным выше свойством.

Рассмотрим группу $G = \langle A_1 * A_2;\, relA_1,\, relA_2,\, \varphi(U_1) = U_2\rangle$, является свободным произведением групп A_1, A_2 с объединением; в G выполняются условия теоремы 3. Рассмотрим слово $v \in G$, $l(v) > 1$, v – циклически несократимо в G и пусть H, $H < G$, конечно порожденная подгруппа, образующие которой W приведены к специальному множеству; $H = qp(M_0, S)$, где M_0 – нетрансформы из W, S – подгруппа, порожденная подгруппами $\{(M_i),\ i = \overline{1,k}\}$:

1) Выделяем в v максимальное подслово g^{-1}, $v = v_1 K_0 g^{-1}$, где g – левая половина некоторого w_j^{ϵ}, $\epsilon = \pm 1$, $w_j^{\epsilon} \in \{W \cup W^{-1}\}$, пусть $K_0 \in A_i$, $i = 1, 2$;

2) Допустим, что g – левая половина трансформы подгруппы $(M_s) = g A_s' g^{-1}$, определяем пересечение $K_0 A_s' \cap U_i$; если $K_0 A_s' \cap U_i \neq \varnothing$, то (M_s) содержит трансформу $g K_1 g^{-1}$, с помощью которой сокращаем v;

3) Пусть $K_0 A_s' \cap U_i = \varnothing$ и g является неизолированной левой половиной нетрансформы $g K_2 g' \in M_0$ и пусть подгруппа $(M_s) = g A_s' g^{-1} \in \{(M_i, i = \overline{1,k}\}$. Определяем пересечение: $K_0 A_s' K_2 \cap U_i = K_0 K_2 (K_2^{-1} A_s' K_2) \cap U_i$. Если $K_0 K_2 (K_2^{-1} A_s' K_2) \cap U_i \neq \varnothing$, то в этом случае длину v умножением справа на слово $g K_1 g^{-1} g K_2 g^1$ можно уменьшить;

4) Пусть $K_0 A_s' K_2 \cap U_i = \varnothing$. Допустим, что g является изолированной левой половиной нетрансформы $u \in M_0$. Если u – нетрансформа четной длины, то $l(vu) < l(v)$; пусть $u = g K_1 g'$ – нетрансформа нечетной длины и пусть существует подгруппа $(M_s) = (g')^{-1} A_s' g' \in \{(M_i), i = \overline{1,k}\}$. Рассматриваем пересечение $K_0 K_1 A_s' \cap U_i$. Если $K_0 K_1 A_s' \cap U_i \neq \varnothing$, то производим сокращение слова v, умножая его справа на слово $g K_1 g' \cdot (g')^{-1} K_2 g'$.

5) Пусть $K_0 K_1 A_s' = \varnothing$ и M_0 содержит нетрансформу $(g')^{-1} K_3 g''$. Рассматриваем пересечение $K_0 K_1 A_s' K_3 \cap U_i = K_0 K_1 K_3 (K_3^{-1} A_s' K_3) \cap U_i$. Если пересечение не пусто, то производим сокращение длины слова v, умножая его справа на слово $g K_1 g' \cdot (g')^{-1} K_2 g' \cdot (g')^{-1} K_3 g''$.

6) Пусть $K_0 K_1 A_s' K_3 \cap U_i = \varnothing$. Тогда в слове $v = v_1 K_0 g^{-1}$ подслово $K_0 g^{-1}$ с помощью преобразования (2) либо (4) преобразуем, если это возможно, в подслово правой половины либо в правую половину некоторого w_j^{ϵ}, $\epsilon = \pm 1$, $w_j \in W$. Если преобразование (6) не удается выполнить, то слово $u_1 u_2 \ldots u_n$ построено; в протовном случае переходим к преобразованию (1).

Выполняя преобразования (1)-(6) конечное число раз, построим слово $u_1 u_2 \ldots u_n$ такое, что $v \cdot u_1 u_2 \ldots u_n = v' u_n''$, где $v = v' v''$, $u_n = u_n' u_n''$. Используя свойства специального множества, можно показать, что длину слова $v' u''$ нельзя уменьшить, умножая на слова из H.

Применяя к слову v и подгруппе H из B преобразования (1)-(6), получим слово $v' u_n''$. Если $l(v' u_n'') > 1$, то $vH \cap \langle w \rangle = \varnothing$, так как $l(w) = 1$.

Пусть $l(v' u_n'') = 1$, то есть $v' u_n'' = x^{n_0} x^{(2k+1)\gamma_0}$, и ряду (9) принадлежит подгруппа $(M) = \langle x^{\beta} \cdot x^{(2k+1)\gamma_1} \rangle$, где $0 \leqslant \beta < 2l + 1$. Тогда

$$vH \cap \langle w \rangle = (v' u_n'')(M) \cap \langle w \rangle. \tag{13}$$

Из (13) следует соотношение:

$$x^{n_0} x^{(2k+1)\gamma_0} \cdot (x^{\beta + (2k+1)\gamma_1})^m = (x^s x^{(2k+1)\alpha_0})^n, \tag{14}$$

из которого получаем уравнение относительно m, n:

$$n_0 + (2k+1)\gamma_0 + (\beta + (2k+1)\gamma_1) m = (s + (2k+1)\alpha_0) n \tag{15}$$

Из решения уравнения (15) выясняем: справедливы ли равенства (14) и (13).

Пусть $C(G_{ab}) \cap H = E$. Тогда подгруппа H является свободной, порожденной множеством M_0. В этом случае задача сводится к проблеме вхождения $v' u_n''$ в циклическую подгруппу $\langle w \rangle$.

Пусть $l(w) > 1$. В этом случае проверяем справедливо ли равенство (12) в группе B_1. Обозначим: $\theta(v) = \tilde{v}$, $\theta(w) = \tilde{w}$, $\theta(H) = \tilde{H}$, $\theta(u_1 u_2 \ldots u_k) = \theta(u_1) \ldots \theta(u_k) = \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \ldots \tilde{u}_k$.

Из теоремы 3 следует, что можно эффективно установить в группе B_1 пусто или не пусто пересечение $\tilde{v} \tilde{H} \cap \langle \tilde{w} \rangle$, следовательно, справедливо ли в B_1 равенство:

$$\tilde{v} \tilde{u}_1 \ldots \tilde{u}_k = \tilde{w}^p. \tag{16}$$

Из циклической несократимости слова $\tilde{w}$ следует циклическая несократимость слова $\tilde{T} = \tilde{v} \tilde{u}_1 \ldots \tilde{u}_k$.

Пусть слову $\tilde{T}$ в группе B соответствует слово $x^{(2k+1)\beta_0}\tilde{T}$, а слову $\tilde{w}$ – $x^{(2k+1)\alpha_0}\tilde{w}^p$. Тогда соотношению (16) соответствует равенство:

$$c_0 x^{(2k+1)\beta_0}\tilde{T} = x^{(2k+1)\alpha_0}\tilde{w}^p, \tag{17}$$

где $c_0 \in C(G_{ab})$.

Пусть $C(G_{ab}) \cap H = E$, тогда $c_0 = 1$ и соотношение (17) справедливо, если $\beta_0 = \alpha_0$.

Пусть $C(G_{ab}) \cap H \neq E$. Тогда среди подгрупп ряда (9) содержится подгруппа $(M) = C(G_{ab}) \cap H$, $(M) = \langle x^{(2k+1)\gamma_0}\rangle$ (Лемма 3).

Пусть $\alpha_0 \neq \beta_0$. Выясним, существуют ли n и $c_0 \in (M)$ такие, что

$$(x^{(2k+1)\beta_0}\tilde{T})(x^{(2k+1)\gamma_0})^n = x^{(2k+1)\alpha_0}\tilde{w}^p, \tag{18}$$

из которого получаем уравнение

$$\beta_0 + \gamma_0 n = \alpha_0, \tag{19}$$

из решения которого следует решение (18).

Лемма доказана.

Определим понятия специального множества слов в HNN-расширении группы. Группа

$$G^* = \langle G, t;\, relG, t^{-1}U_1 t = \varphi(U_1)\rangle \tag{20}$$

есть HNN-расширение группы G с помощью изоморфных подгрупп U_1, U_2 группы G, φ – изоморфизм U_1 на U_2: $\forall a \in U_1$, $\varphi(a) \in U_2$. Группа G называется основой G^*, t – проходная буква, U_1, U_2 – ассоциированными подгруппами.

Известно [18], что каждый элемент $g \in G^*$ единственным образом можно представить в виде:

$$g = t^{\alpha} B_1 t^{\epsilon_1} B_2 t^{\epsilon_2} \dots B_k t^{\epsilon_k} B_{k+1} t^{\beta}, \tag{21}$$

где $\alpha, \beta = 0 \pm 1$; $\epsilon_i = \pm 1$, $i = \overline{1,k}$, B_i – представители левого смежного класса группы G по U_1, если $\epsilon_i = 1$, и по подгруппе U_2, если $\epsilon_i = -1$; $B_{s,:\,1 \leqslant s \leqslant k+1}$, называются слогами слова (21).

Если X – множество левых представителей смежных классов G по U_1, Y – множество левых представителей смежных классов G по U_2, то X^{-1} – множество правых представителей G по U_1; Y^{-1} – множество правых представителей смежных классов G по U_2. Будем обозначать буквой $l(r)$ с индексами внизу элементы множества $X \cup Y (X^{-1} U Y^{-1})$.

Слово, имеющее нечетное число слов, представим в виде:

$$g = t^{\alpha} l_{1g} t^{\epsilon_1} \dots l_{sg} t^{\epsilon_s} K_g t^{\epsilon'_s} r_{sg} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1g} t^{\beta}, \tag{22}$$

где α, $\beta = 0; \pm 1$ $\epsilon_i = \pm 1$, $\epsilon'_i = \pm 1$, $i = \overline{1,s}$, K_g – ядро слова g. Если $K_g \in U_1$ и $\epsilon'_s = 1$, то $\epsilon_s \neq -1$; если $K_g \in U_2$ и $\epsilon_s = 1$, то $\epsilon'_s \neq 1$.

Несократимое слово (21), имеющее четное число слогов, представимо в виде:

$$g = t^{\alpha} l_{1g} t^{\epsilon_1} \dots t^{\epsilon_{s-1}} l_{sg} h t^{\epsilon'_s} r_{sg} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1g} t^{\beta}, \tag{23}$$

где $h \in U_1$, если $\epsilon'_s = 1$ и $h \in U_2$ если $\epsilon'_s = -1$.

Слоговую длину слова (22) обозначим $L(g) = 2s+1$, слова (23) $-L(g) = 2s$. Представление слова в несократимой записи (22), (23) назовем каноническим.
В слове $g = t^{\alpha} B_1 t^{\epsilon_1} \dots t^{\epsilon_{i-1}} B_i t^{\epsilon_i} \dots B_{k+1} t^{\beta}$ подслово $t^{\alpha} B_1 t^{\epsilon_1} \dots t^{\epsilon_{i-1}} B_i$, $(t^{\alpha} B_1 \dots B_i t^{\epsilon_i})$ назовем начальным открытым (закрытым) отрезком. Аналогичные понятия вводятся для конечных отрезков.

Лемма 5. Для каждого слова $w = t^{\alpha} B_1 t^{\epsilon_1} \dots t^{\epsilon_m} B_{m+1} t^{\beta}$, $\alpha, \beta = 0; \pm 1$, $\epsilon_i = \pm 1$, группы G^* существует единственное каноническое представление.

Слова вида (22), у которых

$$t^{\alpha}l_{1g}t^{\epsilon_1}\dots l_{sg}t^{\epsilon_s}=(t^{\epsilon'_s}r_{sg}\dots t^{\epsilon'_1}r_{1g}t^{\beta})^{-1}$$

назовем трансформами, другие слова вида (22), (23) назовем нетрансформами соответственно нечетной и четной длины. У слова (22) длины $2s+1$ начальный (конечный) отрезок

$$t^{\alpha}l_{1g}t^{\epsilon_1}\dots l_{sg}t^{\epsilon_s},\ (t^{\epsilon'_s}r_{sg}\dots t^{\epsilon'_1}r_{1g}t^{\beta})$$

назовем закрытой левой (правой) половиной; отрезок

$$t^{\alpha}l_{1g}t^{\epsilon_1}\dots l_{sg}t^{\epsilon_s}K_gt^{\epsilon'_s},\ (t^{\epsilon_s}K_gt^{\epsilon'_s}r_{sg}\dots t^{\epsilon'_1}r_{1g}t^{\beta})$$

– закрытым большим начальным (конечным) отрезком. У слова вида (23) длины $2s$ начальный (конечный) отрезок

$$t^{\alpha}l_{1g}t^{\epsilon_1}\dots l_{sg}t^{\epsilon'_s},\ (t^{\epsilon'_s}r_{sg}\dots t^{\epsilon'_{s-1}}\dots t^{\epsilon'_1}r_{1g}t^{\beta})$$

назовем закрытой левой (правой) половиной [18].

Пусть $W=\{w_i|i=\overline{2,N}\}$ – конечное множество слов группы G^*, каждое из которых приведено к виду (22), (23). Будем говорить, что у слова

$$w_j^{\epsilon}=t^{\alpha_j}B_1t^{\epsilon_1}\dots B_it^{\epsilon_i}B_{i+1}\dots t^{\epsilon_k}B_{k+1}t^{\beta_i},$$

где $\epsilon_i=\pm1$, $\alpha_j,\beta_j=0;\pm1$, $w_j\in W$, закрытый начальный отрезок $t^{\alpha_j}B_1t^{\epsilon_1}\dots B_it^{\epsilon_i}$ изолирован в W, если он не является начальным отрезком ни у какого слова w_i^{η}, $\eta=\pm1$, $w_i\in\{W\setminus w_j\}$.

Определение 11 [18]. Назовем конечное множество слов $W=\{w_i|i=\overline{1,N}\}$ группы G^* специальным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) закрытая левая половина $w_i\in W$, являющегося нетрансформой, изолирована в W; у нетрансформы четной длины изолированы закрытые левая и правая половины;

2) длину слова $w_j\in W$, являющегося нетрансформой, нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством $\{W\setminus w_j\}$; длину произвольного элемента $w_j\in W$ нельзя уменьшить, умножая на слово $v\in\langle W\rangle$, $L(v)<L(w_j)$;

3) пусть

$$w_j=t^{\alpha}l_{1w_j}t^{\epsilon_1}\dots l_{sw_j}t^{\epsilon_s}\dots t^{\epsilon'_i}r_{iw_j}\dots t^{\epsilon'_1}r_{1w_j}t^{\beta},$$

$\alpha,\beta\in\{0,\pm1\}$, $\epsilon_i,\epsilon'_k\in\{\pm1\}$, нетрансформа, закрыиая правая половина которой оканчивается на подслово $t^{\epsilon'_i}r_{iw_j}\dots r_{1w_j}t^{\beta}$, тогда, если подгруппа

$$H=\langle W\rangle\cap t^{-\beta}r_{1w_j}^{-1}\dots r_{iw_j}^{-1}t^{-\epsilon'_i}Gt^{\epsilon'_i}r_{iw_j}\dots t^{\beta}\neq E,$$

(E – единичная подгруппа), то $\forall u\in H$, $L(w_ju)\geqslant L(w_j)$, $L(w_juw_{\gamma}^{-\eta_{\gamma}})\geqslant L(w_j)$, где $w_{\gamma}\in\{W\setminus w_j\}$, $\eta_{\gamma}=\pm1$;

4) пусть

$$w_i^{\epsilon}=t^{\alpha_1}l_{1w_i}t^{\epsilon_1}\dots l_{pw_j}t^{\epsilon_p}\dots t^{\epsilon_s}K_{w_i}t^{\epsilon'_s}\eta_{sw_i}\dots r_{1w_i}t^{\beta_1},$$

$$w_j^{\eta}=t^{\alpha_2}l_{1w_j}t^{\eta_1}\dots l_{pw_j}t^{\eta_p}\dots t^{\eta_m}K_{w_j}t^{\eta'_m}r_{mw_j}\dots r_{1w_j}t^{\beta_2},$$

где $\epsilon=\pm1$, $\eta=\pm1$, $\alpha_s=0;\pm1$, $\beta_s=0;\pm1$, $s=1,2$; $\epsilon_i,\epsilon'_i=\pm1$, $i=1,s_j$; $\eta_{\gamma},\eta'_{\gamma}=\pm1$, $\gamma=\overline{1,m}$; где слова $w_i,w_j\in W$, не обязательно различные слова, $t^{\alpha_1}l_{1w_i}\dots l_{pw_i}t^{\epsilon_p}$ начальное слово левой половины w_i^{ϵ}; $t^{\alpha_2}l_{1w_j}t^{\eta_1}\dots l_{pw_j}t^{\eta_p}$ начальное подслово левой половины w_j^{η}. Если $t^{\alpha_1}l_{1w_i}t^{\epsilon_1}\dots l_{pw_i}\neq t^{\alpha_2}l_{1w_j}t^{\eta_1}\dots l_{pw_j}$, то не существует $w\in\langle W\rangle$, $L(w)<2p$ такого, что

$$ww_j^{\eta}=t^{\alpha_1}l_{1w_i}\dots l_{pw_i}t^{\eta_p}l'_{p+1}\dots t^{\eta'_i}r_{iw_j}\dots r_{1w_j}t^{\beta_2}$$

Разобьем специальное множество W на подмножества; нетрансформы объединим в подмножество, которое обозначим M_0. Трансформы с одинаковыми крыльями – в подмножества M_i, $i = \overline{1,k}$, каждое из которых порождает подгруппу

$$(M_i) = t^{-\alpha_i} r_{1i}^{-1} t^{-\epsilon_{1i}} \dots r_{n_{ji}}^{-1} t^{-\epsilon_{n_{ji}}} A_i t^{\epsilon_{n_{ji}}} \dots t^{\alpha_i},$$

где $\alpha_i = 0; \pm 1$, $\epsilon_{ji} = \pm 1$, $1 \leqslant j \leqslant n_{ji}$, A_i – подгруппа группы G, порожденная ядрами трансформ с крыльями $t^{-\alpha_i} r_{1i}^{-1} t^{-\epsilon_{1i}} \dots r_{n_{ji}}^{-1} t^{-\epsilon_{n_{ji}}}$.

Упорядочим подгруппы (M_i), $i = \overline{1,k}$, по длинам трансформ их порождающих. Получим ряд

$$(M_1) \leqslant (M_2) \leqslant \dots \leqslant (M_k). \tag{24}$$

Лемма 6 [18]. Пусть W – специальное множество слов группы G^*. Тогда ряд (24) можно преобразовать в ряд

$$(M_1') \leqslant (M_2') \leqslant \dots \leqslant (M_{k'}'), \tag{25}$$

обладающий следующими свойствами:

а) $qp(M_0, (M_1), \dots, (M_k)) = qp(M_0, (M_1') \dots, (M_{k'}'))$;

б) если подгруппе

$$(M_j') = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\epsilon_{1j}} \dots r_{nj}^{-1} t^{-\epsilon_{nj}} A_j t^{\epsilon_{nj}} r_{nj} \dots t^{\alpha}, \tag{26}$$

$\alpha \in \{0, \pm 1\}$ принадлежит трансформа

$$w = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\epsilon_{1j}} \dots r_{nj}^{-1} t^{-\epsilon_{nj}} h t^{\epsilon_{nj}} r_{nj} \dots t^{\alpha}, \tag{27}$$

где $h \in U_1$, если $\epsilon_{nj} = 1$ и $h \in U_2$, если $\epsilon_{nj} = -1$, то ряд (25) содержит подгруппу

$$(M_i') = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\epsilon_{1j}} \dots t^{-\epsilon_{n_{j-1}}} A_i t^{\epsilon_{n_{j-1}}} \dots r_{ij} t^{\alpha},$$

которой принадлежит трансформа w;

в) пусть $v = t^{-\alpha_j} : r_{1j}^{-1} \dots t^{-\epsilon_{n_j}} : r_{n+1}^{-1} : t^{-\epsilon_{n_{j+1}}}$ – подслово левой половины некоторого $w_j^{-\epsilon} \in W$, не являющееся изолированной в множестве W, тогда, если подгруппе (M_j') принадлежит трансформа w такая, что $w \in vGv^{-1}$, то ряду (25) принадлежит подгруппа

$$(M_i) = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\epsilon_{nj}} r_{n+1}^{-1} t^{-\epsilon_{n_{j+1}}} A_i t^{\epsilon_{n_{j+1}}} \dots t^{\alpha},$$

содержащая нетрансформу w;

г) пусть для некоторой трансформы w, принадлежащей подгруппе (M_j') ряда (25) и для некоторой нетрансформы $Y \in M_0$ с изолированной закрытой левой половиной, $L(Y) = 2m+1$, $L(w) \leqslant (Y)$, $L(Y^{-1}wY) \leqslant L(Y)$, то существует подгруппа (M_s') ряда (25), содержащая трансформу $Y^{-1}wY$; если $L(Y^{\epsilon}wY^{-\epsilon}) < L(Y)$, где $L(Y) = 2m+1$, либо $L(Y) = 2m$, $\epsilon = \pm 1$, то существует подгруппа (M_s') ряда (25), содержащая $Y^{\epsilon}wY^{-\epsilon}$.

Назовем подгруппу, порожденную подгруппами ряда (25), основой подгруппы $\langle W \rangle$ и обозначим ее через S, а подгруппу $\langle W \rangle$ будем обозначать $qp(M_0, S)$.

Определение 12 [18]. Произведение $u_1 u_2 \dots u_n$ назовем словом подгруппы $qp(M_0, S)$ группы G^*, если выполняются условия: $u_i \neq 1$, $i = \overline{1,n}$; u_i принадлежит $\{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, либо некоторой подгруппе ряда (25); $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$; u_i, u_{i+1} – не содержатся в одной подгруппе ряда (25), кроме того, в $u_1 u_2 \dots u_n$ нет произведения $u_i u_{i+1} u_{i+2}$, $i = \overline{1, n-2}$, в котором $u_i = u_{i+2}^{-1}$, $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, $u_{i+1} \in (M_i)$, $u_1 u_{i+1} u_{i+2} \in (M_j)$ из ряда (25).

Сомножители u_i произведения $u_1 u_2 \dots u_n$ назовем u-символами.

Лемма 7 [18]. Подгруппа (M_0) – свободная и не содержит трансформ.

Лемма 8 [18]. Пусть $t^{-\alpha_j}r_{1j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}t^{-\epsilon_{nj}}$ – подслово левой половины w^{ϵ}, $w\in W$, $\epsilon\pm 1$, не являющееся изолированной в W. Тогда, если

$$t^{-\alpha_j}r_{1j}^{-1}t^{-\epsilon_{1j}}\ldots t^{-\epsilon_{nj}}:G:t^{\epsilon_{nj}}\ldots t^{\alpha_j}\cap\langle W\rangle\neq E,$$

E – единичная подгруппа, то ряд (25) содержит подгруппу

$$(M'_{is})=t^{-\alpha_j}r_{1j}^{-1}\ldots t^{-\epsilon_{nj}}A_{is}t^{\epsilon_{nj}}\ldots t^{\alpha_j}.$$

Теорема 5 [18]. Пусть

$$G^*=\langle G,t;relG,t^{-1}U_1t=U_2,\varphi\rangle, \tag{28}$$

являющаяся HNN- расширением группы G с помощью связных подгрупп U_1,U_2 из G и фиксированного конструктивного изоморфизма φ: $\varphi(U_1)=U_2$. Тогда, если подгруппы U_1,U_2 обладают свойством максимальности и в группе G: 1) разрешима проблема вхождения, 2) существует алгоритм, выписывающий для любой конечно порожденной подгруппы $H<G$ и любой из связанных подгрупп U_1,U_2 образующие пересечения $H\cap U_i$, $i=\overline{1,2}$; 3) существует алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы $H<G$ и любого $w\in G$ установить пусто или не пусто пересечение $wH\cap U_i$, $i=\overline{1,2}$; то существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов из G^* в специальное; в группе G^* разрешима проблема вхождения.

Лемма 9. В группе Артина

$$G_{ab}=\langle a,b;\langle ab\rangle^{m_{ab}}=\langle ba\rangle^{m_{ba}}\rangle \tag{29}$$

с числом Коксетера $m_{ab}=2k$ разрешимы проблемы: 1) проблема вхождения; 2) проблема пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H<G_{ab}$ с циклической $\langle w\rangle<G_{ab}$; 3) разрешима проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы $H<G_{ab}$ с любой циклической подгруппой $\langle w\rangle<G_{ab}$.

Доказательство. Группе G_{ab} по условию соответствует число Коксетера $m_{ab}=2k$, в этом случае группа G_{ab} изоморфна группе

$$B=\langle x,t;t^{-1}x^kt=x^k\rangle \tag{30}$$

по изоморфизму θ: $\theta(a)=t$, $\theta(b)=xt^{-1}$. [6]

Из теоремы 5 следует, что в группе B разрешима проблема вхождения.

Пусть H – конечно порожденная подгруппа группы G_{ab}, w – произвольный элемент G_{ab}. Обозначим: $\theta(H)=\tilde{H}$, $\theta(w)=\tilde{w}$, где $\tilde{H}<B$, $\tilde{w}\in B$. Будем предполагать, что образующие подгруппы $\tilde{H}$ приведены к специальному множеству и $\tilde{H}=qp(M_0,S)$, где M_0 – множество нетрансформ и S – подгруппа $\tilde{H}$, порожденная подгруппами ряда

$$(M_1)\leqslant(M_2)\leqslant\ldots\leqslant(M_k). \tag{31}$$

Покажем, что можно эффективно определить пересечения $H\cap\langle w\rangle$.

Обозначим через $l_t(\tilde{v})=k$, $\tilde{v}\in B$, число вхождений образующего t в канонически приведенное слово $\tilde{v}$.

Пусть $l_t(\tilde{w})=0$, тогда $\tilde{w}=x^{\alpha}x^{km}$, где $0\leqslant\alpha<k$, и пусть $C(B)\cap\tilde{H}\neq E$. Тогда подгруппы ряда (31) содержат подгруппу $(M_i)=\langle x^{k\beta}\cdot x^{\alpha_0}\rangle$, $0\leqslant\alpha_0<k$ (лемма 8).

В этом случае существует $S\in\mathbb{N}$ такое, что $\tilde{H}\cap\langle\tilde{w}\rangle=\langle M_i\rangle\cap\langle\tilde{w}\rangle=\langle x^S\rangle$.

Если $C(B)\cap\tilde{H}=E$, то $\tilde{H}=\langle M_0\rangle$ – свободная группа и $\tilde{H}\cap\langle\tilde{w}\rangle=E$.

Пусть $\tilde{w}$ – циклически несократимое слово, содержащее образующий t, то есть $l_t(\tilde{w})\geqslant 1$. Рассмотрим в группе B нормальный делитель $N=\langle x^k\rangle^B$ и пусть φ – гомоморфизм группы B на B/N, $\varphi(B)=B/N=\overline{B}$.

Группа $\overline{B}$ является свободным произведением циклических групп $\langle t\rangle$, $\langle x; x^k\rangle$, то есть

$$\overline{B} = \langle t\rangle * \langle x; x^k\rangle. \qquad (32)$$

Тогда $\tilde{w} = x^{t_0 k}\overline{w}$, где $\overline{w} = \varphi(\tilde{w})$, $\overline{H} = \varphi(\tilde{H})$.

Если $C(B)\cap \tilde{H} = E$, то образующими подгруппы $\overline{H}$ являются нетрансформы подгруппы $\tilde{H}$, $\tilde{H} = (M_0)$ и $\tilde{w}_i = x^{\alpha_i}\overline{w}_i$, где $\tilde{w}_i \in M_0$.

Из теоремы 3 следует, что в $\overline{B}$ алгоритмически разрешима проблема пересечения подгрупп, поэтому $\overline{w}^p = \overline{w}_{i_1}\dots\overline{w}_{i_n}$, где $\overline{w}_{ij} \in \varphi(M_0)$.

Пусть $\tilde{w}^p = x^{kpt_0}\overline{w}^P$, $\tilde{w}_{i_1}\tilde{w}_{i_2}\dots\tilde{w}_{i_n} = x^{k\beta}\overline{T}$, $\overline{T} = \overline{w}_{i_1}\dots\overline{w}_{i_n}$. Так как слово $\overline{w}^p$ – циклически несократимо, то и слово $\overline{T}$ – циклически несократимо. Если $kpt_0 = k\beta$, то подгруппы пересекаются по подгруппе $\langle\tilde{w}^p\rangle$.

Пусть $kpt_0 \neq k\beta$ и $C(B)\cap\tilde{H} \neq E$. Тогда множество подгрупп $\{(M_j); j = \overline{1,k}\}$ содержит подгруппу $(M_i) = \langle x^{\alpha k}\rangle$. Чтобы определить пересечение $\tilde{H}\cap\langle\tilde{w}\rangle$ рассмотрим соотношение:

$$(x^{\alpha k})^m\tilde{w}^p = \tilde{T}, \qquad (33)$$

где $\tilde{T} = x^{k\beta}\overline{T}$, подставляя в него соответствующие значения, получим:

$$x^{\alpha km}\cdot x^{kpt_0}\tilde{w}^p = x^{k\beta}\tilde{T}, \qquad (33)$$

m – неизвестные, которые определяем из уравнения:

$$\alpha m + pt_0 = \beta, \qquad (35)$$

из решения которого определяем пересечение подгрупп.

Если $C(B)\cap\tilde{H} = E$ и $kpt_0 \neq k\beta$, то $\tilde{H}\cap\langle\tilde{w}\rangle = E$.

Рассмотрим проблему пересечения смешанного класса конечно порожденной подгруппы $\tilde{H} < B$ с циклической подгруппой $\langle\tilde{w}\rangle < B$.

Пусть $\tilde{v}$ – произвольное слово группы B, $\tilde{v}\notin\tilde{H}$. Выясним, пусто или не пусто пересечение $\tilde{v}\tilde{H}\cap\langle\tilde{w}\rangle$.

Рассмотрим случай, когда $l_t(\tilde{w}) = 0$, $l_t(\tilde{v}) = 0$. Тогда $\tilde{v} = x^r\cdot x^{k\gamma_0}$, $\tilde{w} = x^{k\alpha_0}x^s$, где $0 \leqslant r < k$, $0\leqslant s < k$. Пусть $C(B)\cap\tilde{H}\neq E$, тогда среди подгрупп $\{(M_i); i = \overline{1,k}\}$ содержится подгруппа $(M_1) = \langle x^\beta x^{k\gamma_1}\rangle$, $0\leqslant\beta < k$, и

$$\tilde{v}\tilde{H}\cap\langle\tilde{w}\rangle = \tilde{v}(M_1)\cap\langle\tilde{w}\rangle. \qquad (36)$$

Из данного соотношения следует

$$x^r x^{k\gamma_0}\cdot(x^\beta x^{k\gamma_1})^m = (x^s x^{k\alpha_0})^p, \qquad (37)$$

из которого получаем уравнение относительно m, p:

$$r + k\gamma_0 + (\beta + k\gamma_1)m = (s + k\alpha_0)p, \qquad (38)$$

решая которое, выясняем, пусто или не пусто пересечение $\tilde{v}\tilde{H}\cap\langle\tilde{w}\rangle$.

Если $C(B)\cap\tilde{H} = E$, то $\tilde{H} = \langle M_0\rangle$ – свободная подгруппа и рассматриваемая задача сводится к проблеме вхождения $\tilde{v}$ в $\langle\tilde{w}\rangle$.

Пусть $l_t(\tilde{v})\geqslant 1$, $l_t(\tilde{w}) = 0$.

В этом случае эффективно определяем слово $\tilde{u}_1\tilde{u}_2\dots\tilde{u}_n\in H$, максимально сокращающее длину слова $\tilde{v}$, для этого применяем преобразования (1)–(6), указанные выше.

Допустим, что в результате получили $\tilde{v}\cdot\tilde{u}_1\tilde{u}_2\dots\tilde{u}_n = \tilde{v}'\tilde{u}"_n$, где $\tilde{v} = \tilde{v}'\tilde{v}"$, $\tilde{u}_n = \tilde{u}'\tilde{u}"_n$, длину которого нельзя уменьшить, умножая на слово из $\tilde{H}$.

Если $l_t(\tilde{v}'\tilde{u}"_n)\geqslant 1$, то $\tilde{v}\tilde{H}\cap\langle\tilde{w}\rangle = \varnothing$

Пусть $l_t(\tilde{v}'\tilde{u}"_n) = 0$, то есть $\tilde{v}'\tilde{u}"_n = x^r x^{k\gamma_0}$, то получаем вышерассмотренный случай.

Пусть $l_t(\tilde{w}) \geqslant 1$. В этом случае рассматриваем отображение $\varphi : B \to \overline{B}$, и рассматриваем пересечение $\varphi(\tilde{v}) \cdot \varphi(\tilde{H}) \cap \langle \tilde{\varphi}(\tilde{w}) \rangle$.

Обозначим $\varphi(\tilde{v}) = \overline{v}$, $\varphi(\tilde{w}) = \overline{w}$, $\varphi(\tilde{H}) = \overline{H}$.

Из теоремы 3 следует, что в группе $\overline{B}$ разрешима проблема пересечения смежных классов двух конечнопорожденных подгрупп.

Пусть в $\overline{B}$ имеет место равенство:

$$\overline{v} \cdot \overline{u}_1 \dots \overline{u}_n = \overline{w}^p. \tag{39}$$

Из циклической несократимости $\overline{w}^p$ следует циклическая несократимость слова $\overline{T} = \overline{v} \cdot \overline{u}_1 \dots \overline{u}_n$.

Пусть слову $\overline{T}$ в группе B соответствует слово $x^{k\beta_0}\overline{T}$, а слову $\overline{w}^P$ – слово $x^{k\alpha_0}\overline{w}^p$. Тогда в группе B имеем место равенство:

$$c_0 x^{k\beta_0}\overline{T} = x^{k\alpha_0}\overline{w}^p, \tag{40}$$

где $c_0 \in C(B)$.

Пусть $C(B) \cap \tilde{H} = E$, тогда $c_0 = 1$ и соотношение (40) справедливо, если $\beta_0 = \alpha_0$.

Пусть $\beta_0 \neq \alpha_0$ и $C(B) \cap \tilde{H} \neq E$. Тогда множеству подгрупп $\{(M_i), i = \overline{1,k}\}$ принадлежит подгруппа $(M) = C(B) \cap \tilde{H}$, $(M) = \langle x^{k\gamma_0} \rangle$.

Выясняем, имеет ли место соотношение

$$(x^{k\gamma_0})^n x^{k\beta_0}\tilde{T} = x^{k\alpha_0}\tilde{w}^p, \tag{41}$$

из которого получаем уравнение:

$$\gamma_0 n + \beta_0 = \alpha_0 \tag{42}$$

относительно неизвестных m.

Из решения (42) определяем, пусто или не пусто пересечение $\tilde{v}\tilde{H} \cap \langle \tilde{w} \rangle$. *Лемма доказана.*

Теорема 6 [19], [20]. Пусть группа

$$G = \langle \prod_{s=1}^{n*} G_s; relG_1, \dots, relG_n, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji} \rangle \quad i \in I_1, j \in I_2$$

древесные произведения групп G_s, $s = \overline{1,n}$, объединенных по изоморфным ассоциированным подгруппам $U_{ij} < G_i$, $U_{ji} < G_j$ с помощью фиксированного конструктивного изоморфизма $\varphi_{ji} : \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$, $i \in I_1$, $j \in I_2$, $|I_1| < \infty$, $|I_2| < \infty$. Тогда, если объединяемые подгруппы U_{ij}, $i \in I_1$, $j \in I_2$ обладают свойством максимальности и в сомножителях G_i, разрешимы

1) проблема вхождения;

2) проблема пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой U_{ij};

3) проблема пересечения класса смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с объединяемой подгруппой, то в группе G разрешима проблема вхождения.

Теорема 7. В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения.

Данная теорема непосредственного следует из леммы 4, леммы 9 и теоремы 6.

Заметим, что в статье [21] автор рассматривает решение проблемы вхождения в группах Артина с древесной структурой. Однако им получено не полное решение данной проблемы, а именно не доказана разрешимость проблем (2) и (3) в случае, когда группе Артина с двумя образующими соответствует четное число Коксетера. В этом случае группа Артина будет изоморфна группе, являющейся $HNN-$расширением.

Поэтому формулировка теоремы о разрешимости проблемы вхождения в группе Артина с древесной структурой в [21] некорректна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марков А.А. Основы алгебраической теории кос. // Тр. МИАН, Москва, АН СССР, 1945, Т.6.
2. Garsid F.A. The braid group and other groups // Quart. Math. Oxford, ser. (2), 1969, v. 20.
3. Брискорн Э. Сайто К. Группы Артина и группы Коксетера // Математика, 1974, Т. 18 №6, С. 56-79.
4. Безверхний В.Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сиб. Мат. журнал, Т. XXVI, №5, 1985, С. 27-42.
5. Appel K. Schupp P. Artin groups and infinite Coxeter groups. // Invent. Math. 1983, P. 50-78.
6. Appel K. One Artin groups and infinite Coxeter groups. // Contempor. Math. 1984, P. 50-78.
7. Безверхний В.Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Коксетера большого типа. // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвузов. Сб. науч. тр., Тула, Тульский гос. пед. Институт им. Л.Н. Толстого, 1986, С. 26-61.
8. Безверхний В.Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа. // Фундаментальная и прикладная математика, 1999, Т. 5, №1, С.1-38.
9. Безверхний В.Н. О группах Артина и Коксетера с древесной структурой. // V Международная конференция «Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и приложения.» Тезисы докладов. Тула, 2003, С. 33-34.
10. Безверхний В.Н. Карпова О.Ю. Проблема равенства и сопряженности в группах Артина с древесной структурой. // Известия Тульского гос. университета, серия «Математика, Механика, Информатика.» 2006, Т. 12, С. 67-82.
11. Безверхний В.Н. Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некоторых классах групп Артина и Коксетера. // Материалы XII Международной конференции «Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и приложения.» Тезисы докладов. Тула, 2014, С. 6.
12. Bezverkhnii V.N., Bezverkhnyaya N.B. Solution of the problem of equality and conjugacy of word in certain class of Artin groups. // Journal of Mathematical Science, 2021. Vol. 257. P. 751-764.
13. Безверхний В.Н. О пересечении конечнопорожденных подгрупп свободной группы. // Сб. научных трудов кафедры высшей математики Тульского политехнического института, вып. 2, 1974, С. 51-56.
14. Безверхний В.Н. Роллов Э.В. О подгруппах свободного произведения групп. // Современная алгебра, 1974, С.16-31.
15. Безверхний В.Н. О пересечении подгрупп в HNN – группах. // Фундаментальная и прикладная математика, 1998, Т. 4, С.199-222.
16. Безверхняя И.С. О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободном произведении групп. // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвузов. Сб. науч. тр., Тула, Тульский гос. пед. Институт им. Л.Н. Толстого, 1981, С. 103-116.

17. Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп. // Вопросы теории групп и полугрупп. Тула, Тульский гос. пед. Институт им. Л.Н. Толстого, 1972, С. 3-86.

18. Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN – групп. // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвузов. Сб. науч. тр., Тула, Тульский гос. пед. Институт им. Л.Н. Толстого, 1981, С. 20-62.

19. . Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением. // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвузов. Сб. науч. тр., Тула, Тульский гос. пед. Институт им. Л.Н. Толстого, 1986, С. 3-21.

20. Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением с нетривиальным центром. // Деп. Сиб. мат. журнала, Т. XXVI, №2, 1985, С. 219-220.

21. Добрынина И.В. О подгруппах в группах Артина с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2022;23(3):118-132.

REFERENCES

1. Markov A.A., 1945, “Fundamentals of algebraic braid theory”, *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*, Vol 6, pp 1–54.

2. Garside F.A., 1969, “The braid group and other groups”, *Quarterly Journal of Mathematics*, Vol 20, no 2, pp 235–254.

3. Brieskorn E., Saito K., 1974, “Artin groups and Coxeter groups”, *Mathematics*, Vol 18, no 6, pp 56–79.

4. Bezverkhny V.N., 1985, “The unsolvability of the problem of occurrence in Artin groups of finite type”, *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, Vol 26, no 5, pp 27–42.

5. Appel K., Schupp P., 1983, “Artin groups and infinite Coxeter groups”, *Inventiones Mathematicae*, Vol 72, no 2, pp 201–220.

6. Appel K., 1984, “One Artin groups and infinite Coxeter groups”, *Contemporary Mathematics*, Vol 33, pp 50–78.

7. Bezverkhny V.N., 1986, “Solving the problem of conjugation of words in the Artin and Coxeter groups of a large type”, *Algorithmic Problems of Group and Semigroup Theory*, pp 26–61.

8. Bezverkhny V.N., 1999, “Solution of the problem of generalized conjugation of words in large-type Artin groups”, *Fundamental and Applied Mathematics*, Vol 5, no 1, pp 1–38.

9. Bezverkhny V.N., 2003, “On Artin and Coxeter groups with a woody structure”, *V International Conference on Algebra and Number Theory*, pp 33–34.

10. Bezverkhny V.N., Karpova O.Yu., 2006, “The problem of equality and conjugacy in groups of wood with a woody structure”, *Izvestiya Tulskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, Vol 12, pp 67–82.

11. Bezverkhny V.N., 2014, “Solving the problem of equality and conjugation of words in some classes of Artin and Coxeter groups”, *XII International Conference on Algebra and Number Theory*, p 6.

12. Bezverkhnii V.N., Bezverkhnyaya N.B., 2021, "Solution of the problem of equality and conjugacy of word in certain class of Artin groups", *Journal of Mathematical Science*, Vol 257, pp 751–764.

13. Bezverkhny V.N., 1974, "On the intersection of finitely generated subgroups of free groups", *Collection of Scientific Papers*, Vol 2, pp 51–56.

14. Bezverkhny V.N., Rollov E.V., 1974, "On subgroups of a free product of groups", *Modern Algebra*, pp 16–31.

15. Bezverkhny V.N., 1998, "On the intersection of subgroups in HNN groups", *Fundamental and Applied Mathematics*, Vol 4, pp 199–222.

16. Bezverhnaya I.S., 1981, "On the conjugacy of finite sets of subgroups in the free production of groups", *Algorithmic Problems of Group and Semigroup Theory*, pp 103–116.

17. Bezverkhny V.N., 1972, "Solution of the problem of occurrence for one class of groups", *Questions of Group and Semigroup Theory*, pp 3–86.

18. Bezverkhny V.N., 1981, "The solution of the problem of entry into the class of HNN groups", *Algorithmic Problems of Group and Semigroup Theory*, pp 20–62.

19. Bezverkhny V.N., 1986, "Solution of the problem of occurrence in some classes of groups with one defining ratio", *Algorithmic Problems of Group and Semigroup Theory*, pp 3–21.

20. Bezverkhny V.N., 1985, "Solution of the problem of occurrence in some classes of groups with one defining relation with a nontrivial center", *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, Vol 26, no 2, pp 219–220.

21. Dobrynina I.V., 2022, "On subgroups in Artin groups with tree structure", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol 23, no 3, pp 118–132.

Получено: 10.04.2025
Принято в печать: 17.10.2025