

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 4.

УДК: 517.938.5

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-224-239

Топологические инварианты псевдоевклидова случая интегрируемости Жуковского

Е. С. Агуреева, В. А. Кибкало, В. А. Чертополохов

Агуреева Екатерина Сергеевна — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: agureevamath@yandex.ru

Кибкало Владислав Александрович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: slava.kibkalo@gmail.com

Чертополохов Виктор Александрович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; НЦМУ «Сверхзвук» (г. Москва).

e-mail: psvr.msu@gmail.com

Аннотация

Изучается псевдоевклидов аналог интегрируемой системы Жуковского для осесимметричного тела. На многомерном пространстве параметров системы найдены два существенных параметра, в терминах которых построено разделяющее множество. В зависимости от значений параметров явно описано расположение бифуркационной кривой на плоскости значений отображения момента. Вычислены аналоги инвариантов Фоменко для неособых изоэнергетических и изоинтегральных поверхностей. Приведена визуализация работы алгоритма по построению меченых графов для неособых изоэнергетических поверхностей.

Ключевые слова: интегрируемая система, динамика твердого тела, слоение Лиувилля, псевдоевклидово пространство, случай Жуковского, топологический инвариант, особенность.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:

Агуреева, Е. С., Кибкало, В. А., Чертополохов, В. А. Топологические инварианты псевдоевклидова случая интегрируемости Жуковского // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 224–239.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 4.

UDC: 517.938.5

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-224-239

Topological invariants of pseudo-Euclidean Zhukovsky integrable case

E. S. Agureeva, V. A. Kibkalo, V. A. Chertopolokhov

Agureeva Ekaterina Sergeevna — Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).

e-mail: agureevamath@yandex.ru

Kibkalo Vladislav Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).

e-mail: slava.kibkalo@gmail.com

Chertopolokhov Victor Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University, Supersonic center (Moscow).

e-mail: psvr.msu@gmail.com

Abstract

We study the pseudo-Euclidean analogue of the integrable Zhukovsky case for an axisymmetric body. Two essential parameters were found on the multidimensional parameter space, and the separating set was constructed. The bifurcation curve arrangement on the momentum map plane is explicitly described depending on parameter values. Fomenko invariants analogs for non-singular isoenergy and isointegral surfaces are computed. A visualization of the output of the algorithm for constructing labeled graphs for non-singular isoenergetic surfaces is given.

Keywords: Integrable system, rigid body dynamics, Liouville foliation, pseudo-Euclidean space, Zhukovsky case, topological invariant, singularity.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

Agureeva, E. S., Kibkalo, V. A., Chertopolokhov, V. A. 2025, “Topological invariants of pseudo-Euclidean Zhukovsky integrable case”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 224–239.

1. Введение

Подход к изучению интегрируемых гамильтоновых систем с точки зрения топологии слоений Лиувилля развит в работах А.Т.Фоменко и его научной школы [1-3]. При выполнении ряда условий, см. подробнее монографию [4], почти все связные компоненты совместных поверхностей уровня первых интегралов гомеоморфны торами и являются замыканиями фазовых траекторий системы. Класс послойной гомеоморфности слоения на неособой трехмерной поверхности Q^3 задается топологическим инвариантом Фоменко–Цишанга (меченой молекулой). Его ребра отвечают семействам регулярных слоев, а вершины — невырожденным (боттовским) бифуркациям этих слоев. Эти бифуркации называют 3-атомами Фоменко. Числовые метки кодируют диффеоморфизмы склейки граничных торов 3-атомов, из которых склеено Q^3 . Грубая лиувиллева эквивалентность двух систем является более слабой, и состоит в гомеоморфизме

баз слоения Лиувилля, поднимаемом до послойного гомеоморфизма самих слоений в окрестности произвольного значения интеграла. Вычисление топологических инвариантов позволило обнаружить нетривиальные эквивалентности между интегрируемыми системами геометрии, механики и математической физики, имеющими разную природу.

Представляет интерес расширение данного подхода на более широкий класс интегрируемых систем, например, кусочно-гладких систем интегрируемых бильярдов [5-7] и систем с некомпактными слоениями или неполными потоками гамильтоновых векторных полей первых интегралов [8-10]. Например, бифуркация слоения при этом может происходить без критических точек отображения момента. Слоения с некомпактными слоями и некритическими бифуркациями возникают в системе Соколова [11-12] на алгебрах Ли $e(3)$ и $so(4)$, псевдоевклидовых аналогах интегрируемых систем динамики, введенных А.В.Борисовым и И.С.Мамаевым [13]. Отметим также работы С.С.Николаенко [14-15], в которых при выполнении ряда условий были классифицированы бифуркации (аналоги 2-атомов и 3-атомов Фоменко), возможные в системах с некомпактными слоями.

Широкий класс систем классической механики задается как системы на двойственном пространстве к алгебре Ли $e(3)$. Для этого на пространстве $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$ вводится скобка Пуассона

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0.$$

Здесь ε_{ijk} есть знак перестановки $(123) \rightarrow (ijk)$. Динамическая система на этом \mathbb{R}^6 с гамильтонианом H задается гамильтоновым векторным полем $\text{sgrad } H$, компоненты которого определяются уравнениями Эйлера для H :

$$\dot{J}_i = \{J_i, H\}, \quad \dot{x}_i = \{x_i, H\}.$$

В работе [13] А.В. Борисов и И.С. Мамаев рассмотрели преобразование на $\mathbb{C}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$, линейное над \mathbb{C} и меняющее знаки некоторых структурных констант скобки Ли-Пуассона:

$$J_1 \rightarrow i \cdot J_1, \quad J_2 \rightarrow i \cdot J_2, \quad x_1 \rightarrow i \cdot x_1, \quad x_2 \rightarrow i \cdot x_2, \quad J_3 \rightarrow J_3, \quad x_3 \rightarrow x_3.$$

При этом известные классические вещественные интегрируемые системы, включая волчки Эйлера, Лагранжа и Ковалевской и случай Жуковского, переходят в новые системы, также интегрируемые и вещественные — псевдоевклидовые аналоги исходных систем. Функции Казимира новой скобки f_1 и f_2 , квадратичная по скоростям часть гамильтониана H задаются псевдоевклидовым скалярным произведением $g = \text{diag}(1, 1, \sigma)$ для отрицательных σ :

$$f_1 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_g = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = a, \quad f_2 = \langle \vec{x}, \vec{J} \rangle_g = x_1 J_1 + x_2 J_2 - x_3 J_3 = b.$$

В работе [16] для псевдоевклидова аналога волчка Ковалевской С.В.Соколовым было построено, следуя подходу Кёттера, разделение переменных.

В настоящей работе изучается псевдоевклидов аналог открытого Н.Е.Жуковским [17] случая интегрируемости уравнений движения. К тяжелому твердому телу с главными моментами инерции (A_1, A_2, A_3) , закрепленному на шарнире в своем центре масс (т.е. волчку Эйлера), добавляется постоянный гиростатический момент $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

$$H = \frac{(J_1 - \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(J_2 - \lambda_2)^2}{2A_2} - \frac{(J_3 - \lambda_3)^2}{2A_3} = h, \quad K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 = k.$$

Для псевдоевклидовых аналогов волчков Эйлера и Ковалевской, системы Жуковского в работах В.А.Кибкало и соавторов изучалась топология слоений Лиувилля. Так для псевдоевклидова аналога волчка Ковалевской при $b \neq 0$ получен [18] критерий компактности местного уровня функций Казимира f_1, f_2 , гамильтониана и первого интеграла этой системы.

Кроме того, был изучен [19] первый класс Апшльбота этой системы, т.е. ее слоение Лиувилля в прообразе нулевого значения интеграла Ковалевской.

Псевдоевклидов аналог волчка Эйлера, как и аналог системы Жуковского, имеют квадратичные по импульсам J_1, J_2, J_3 гамильтонианы и первый интеграл K , одинаковый для обеих систем.

$$H_{Euler} = \frac{J_1^2}{2A_1} + \frac{J_2^2}{2A_2} - \frac{J_3^2}{2A_3} = h, \quad K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 = k.$$

При особых значениях (a, b) функций Казимира f_1, f_2 , т.е. при $a \cdot b = 0, (a, b) \neq (0, 0)$, для аналога волчка Эйлера в работе [20] построена бифуркационная диаграмма отображения момента (K, H) Σ на плоскости Okh значений интеграла $K = k$ и гамильтониана $H = h$, определены типы бифуркаций слоения в прообразе малых отрезков плоскости Okh , трансверсальных к дугам диаграммы Σ . Ответ существенно зависит от того, является ли главный момент инерции A_3 , соответствующий третьей оси, средним или наибольшим/наименьшим среди A_1, A_2, A_3 . В последнем случае были вычислены аналоги инварианта Фоменко, т.е. базы слоения с его поднятием вблизи каждой конкретной точки.

Если A_3 является средним из трех моментов инерции, то все слои слоения Лиувилля некомпактны (или пусты), т.е. регулярные слои гомеоморфны цилиндрам или плоскостям, а их бифуркации, отвечающие дугам бифуркационной диаграммы, представляются в виде 3-атомов, у которых или база является некомпактным 2-атомом, или слой гомеоморфен \mathbb{R} . Возникающие при этом базы слоения Лиувилля на неособых уровнях энергии (аналоги инвариантов Фоменко) весьма причудливы, и были недавно изучены В.А.Кибкало и Н.А.Белоусовым [21].

Рассмотрим осесимметричный случай, т.е. равенство моментов инерции A_2 и A_1 . Тогда поворотом можно добиться, чтобы $\lambda'_1 = \lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$, и $\lambda_2 = 0$. В предыдущей работе [22] Е.С.Якимовой (Агуреевой) и В.А.Кибкало было изучено критическое множество и проверена невырожденность его точек, описаны бифуркационные кривые. В их число входят параметрическая кривая $(k(t), h(t))$, прямая $k = 0$ и прямая $k = b^2/a$ при $a \cdot b \neq 0$.

$$k(t) = \frac{\lambda^2}{(1 + A_1 t)^2} - \frac{\lambda_3^2}{(1 + A_3 t)^2}, \quad h(t) = \frac{t^2}{2} \left(\frac{A_1 \lambda^2}{(1 + A_1 t)^2} - \frac{A_3 \lambda_3^2}{(1 + A_3 t)^2} \right). \quad (1.1)$$

Также были определены отвечающие их дугам бифуркации — аналоги 3-атомов Фоменко. Последние описаны как прямые произведения двумерной базы на одномерный слой. Обнаружены невырожденные (боттовские) особенности и некомпактные некритические бифуркации.

ТЕОРЕМА 1. ([22]). *Бифуркации слоения Лиувилля в прообразе дуг бифуркационных кривых осесимметричной псевдоевклидовой системы Жуковского имеют вид 3-атомов Фоменко типа прямого произведения расслоенной двумерной базы (2-атомы, изображенные на рис. 1) на одномерный слой, гомеоморфный S^1 или \mathbb{R} :*

$$A \times S^1, \quad B \times S^1, \quad \hat{A} = A \times R, \quad \hat{B} = B \times R, \quad B'' \times S^1, \quad X_U \times S^1, \quad X_{||} \times S^1, \quad O = O_2 \times S^1.$$

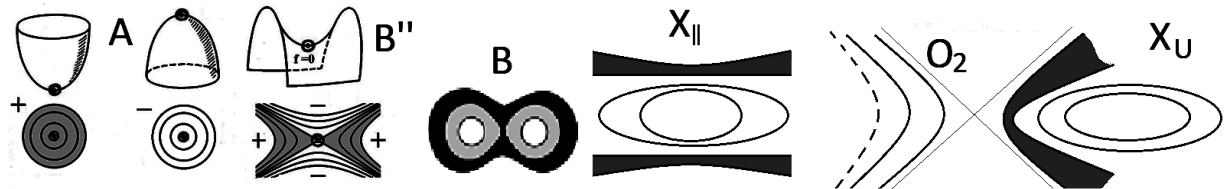


Рис. 1: 2-атомы осесимметричной псевдоевклидовой системы Жуковского.

2. Разделяющее множество на пространстве параметров

Для описания слоения Лиувилля системы, зависящей от нескольких параметров, будет удобно разбить пространство параметров на открытые подобласти (с одинаковым слоением на M^4) и разделяющее множество, т.е. множество особых значений параметров, в окрестности которых встречаются уровни $M_{a,b}^4$ с разным устройством слоений Лиувилля.

Ранее в работе [22] были описаны бифуркационные кривые осесимметричной псевдоевклидовой системы Жуковского, объединение дуг которых образует бифуркационную диаграмму (множество бифуркационных значений отображения момента). В их числе — параметрическая кривая (1.1) и одна или две прямых $k = 0, k = b^2/a$ при $a \cdot b \neq 0$.

1. Расположение параметрической бифуркационной кривой (1.1) на плоскости Okh .

Данная кривая разбивается на гладкие дуги следующими точками: точка возврата, две точки пересечения с осью Ok , точка касания с осью Ok и точка касания с осью Oh , а также двумя разрывами, отвечающими значениям $-1/A_i$, т.е. нулям знаменателей.

В зависимости от значений $A_1 > 0, A_3 > 0, \lambda \geq 0, \lambda_3 \geq 0$ для каждой дуги удастся описать ее расположение относительно осей координат, а также друг друга. При нулевых A_i гамильтониан не определен, а при нулевом λ или λ_3 диаграмма существенно упрощается (параметры t , отвечающие нескольким перечисленным выше точкам, совпадут).

Обозначим через Z множество точек $\mathbb{R}^4(A_1, A_3, \lambda, \lambda_3)$, в которых $A_1 > 0, A_3 > 0, \lambda > 0, \lambda_3 > 0$ и через \bar{Z} его объединение с множеством Θ_0 , состоящее из точек $\lambda \cdot \lambda_3 \geq 0$ и $A_1 > 0, A_3 > 0$.

Выделим в $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^4(A_1, A_3, \lambda, \lambda_3)$ поверхности, отвечающие изменению расположения параметрической кривой относительно осей координат. Их объединение обозначим Θ .

Зададим на $Z \subset \bar{Z}$ две функции от $A_1, A_3, \lambda, \lambda_3$, значения которых обозначим α, β :

$$\alpha = \left(\frac{A_3}{A_1} \right)^{1/3}, \quad \beta = \left(\frac{\lambda_3}{\lambda} \right)^{2/3}.$$

Множество точек $\Theta \cap Z$ удалось описать как полный прообраз в Z объединения нескольких кривых, лежащих в первом квадранте плоскости $O\alpha\beta$. Тем самым, количество параметров задачи удастся существенно понизить — с четырех до двух. Введенные параметры α, β будем называть *существенными параметрами* системы.

ТЕОРЕМА 2. (Агуреева) *Для псевдоевклидова осесимметричного случая интегрируемости Жуковского множество Θ на пространстве параметров состоит из множества $\Theta_0 = \{(A_1, A_3, \lambda, \lambda_3) : A_1 > 0, A_3 > 0, \lambda \cdot \lambda_3 = 0\}$ и объединения прообразов в Z следующих кривых в плоскости $\mathbb{R}^2(\alpha, \beta)$, проходящих через точку $(1, 1)$ и разбивающих квадрант $\alpha > 0, \beta > 0$ на области I-VIII*

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \beta = \alpha^2, \quad \beta = 1/\alpha.$$

На рис. 2 для каждой из областей I-VIII изображен вид кривой $(k(t), h(t))$ с типами 2-атомов слоения $H = h, K = k$ на пространстве $\mathbb{R}^3(J_1, J_2, J_3)$.

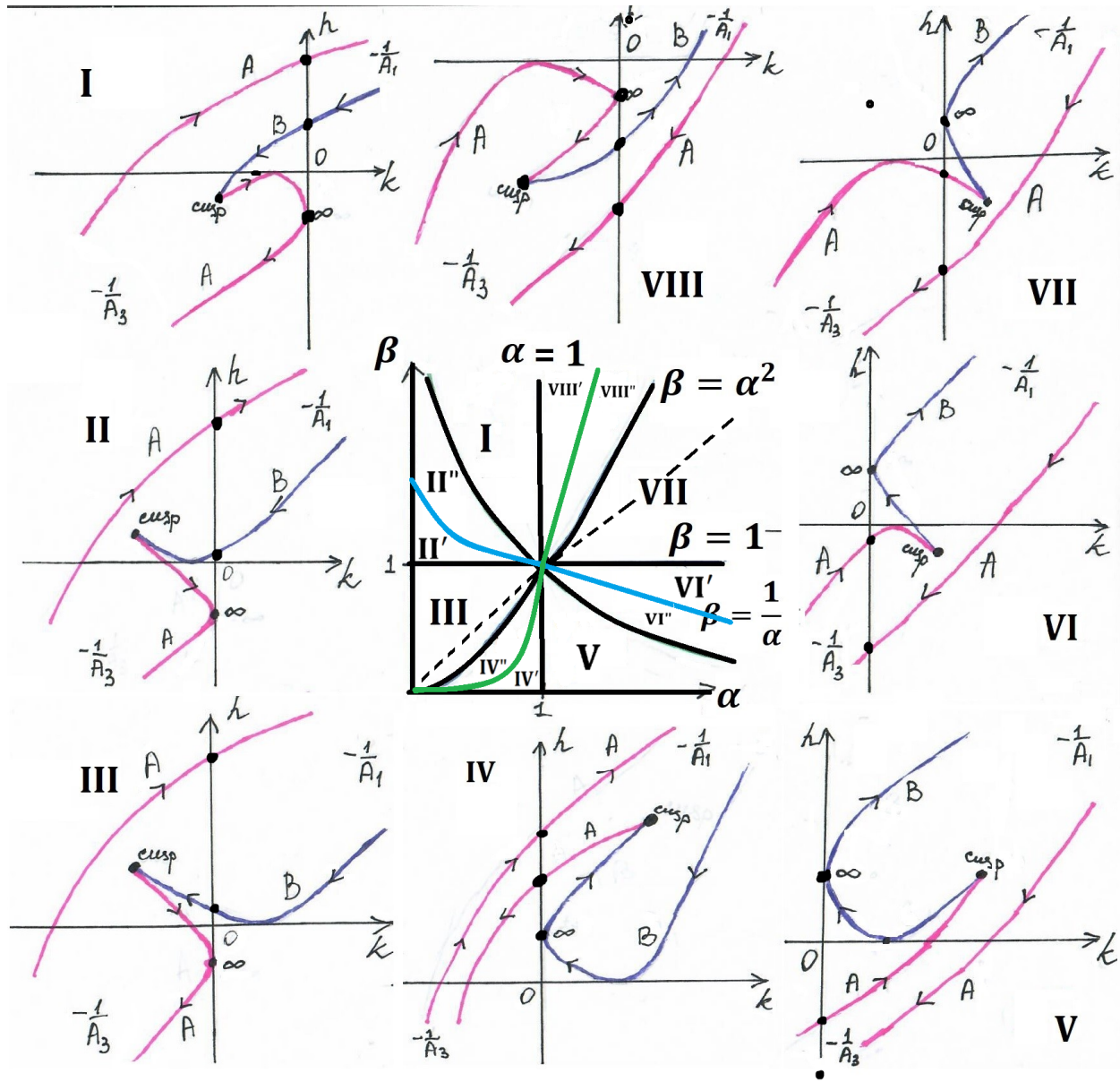


Рис. 2: Разделяющее множество на плоскости $O\alpha\beta$ и отвечающий системам из областей I-VIII вид кривой $(k(t), h(t))$ на плоскости Okh с типами 2-атомов.

Доказательство. 1. В работе [22] были изучены основные свойства бифуркационной кривой, найдены координаты всех особых точек кривой. Перечислим все особые точки и найдем для каждой из них, при каких значениях параметров α, β меняется их расположение относительно координатных осей Oh, Ok .

Кривая $(k(t), h(t))$ разбивается на две связанные (не регулярные, вообще говоря) дуги значениями параметра $t_1 = -1/A_1, t_3 = -1/A_3$. В [22] было показано, что при $t \rightarrow -1/A_1 \pm 0$ имеем $k(t), h(t) \rightarrow \infty$, а при $t \rightarrow -1/A_3 \pm 0$ имеем $k(t), h(t) \rightarrow -\infty$. Тем самым, каждая из получаемых дуг пересекает каждую из осей хотя бы по разу при произвольных α, β .

Точка касания кривой (1.1) и горизонтальной оси Ok имеет координаты $(k, h) = (\lambda^2(1-\beta^3), 0)$ и отвечает экстремуму функции $h(k)$ (локальному минимуму или максимуму) и значению $t_0 = 0$. Ее расположение относительно вертикальной оси Oh (правее или левее) полностью определяется знаком $(1-\beta^3)$, т.е. прообразу прямой $\beta = 1$ отвечают точки из Θ .

Точка касания кривой (1.1) и вертикальной оси Oh имеет координаты $(k, h) = (0, \frac{(1-\alpha^3/\beta^3)\lambda^2}{2A_1})$

и является экстремумом функции $k(h)$ и значению $t = \infty$. Ее расположение относительно оси Ok (выше или ниже) полностью определяется знаком выражения $\beta^3 - \alpha^3$, т.е. прямой $\beta = \alpha$. Отметим, что в итоговое разделяющее множество данная кривая не войдет, поскольку указанная альтернатива не влияет на возможный набор графов-инвариантов, задающих слоения Лиувилля на неособых изоинтегральных и изоэнергетических поверхностях.

Точке возврата кривой отвечает значение параметра $t_{cusp} = \frac{1 - \alpha\beta}{A_1\alpha(\beta - \alpha^2)}$. Ордината точки возврата $h_{cusp} = \frac{(1 - \alpha\beta)^3\lambda^2}{2(1 - \alpha^3)^2A_1}$ меняет знак в точках $(A_1, A_3, \lambda, \lambda_3)$, лежащих в прообразе следующих кривых: $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{\alpha}$. Абсцисса точки возврата $k_{cusp} = \frac{\lambda^2(\alpha^2 - \beta)^3}{(1 - \alpha^3)^2}$ меняет знак в точках $(A_1, A_3, \lambda, \lambda_3)$, лежащих в прообразе следующих кривых: $\alpha = 1, \beta = \alpha^2$.

2. В зависимости от значений параметров α, β , образы перечисленные выше точки кривой (1.1) $k(t), h(t)$ упорядочены по возрастанию отвечающих им значений параметра t следующим образом. Порядок значений t_0, t_1, t_3, ∞ на пополненной прямой $t \in \overline{\mathbb{R}}$ однозначно восстанавливается в зависимости от значения α . Отсюда достаточно определить, при каких условиях на параметры α, β значение t_{cusp} попадает на один из четырех полученных промежутков $\overline{\mathbb{R}}$. В таблице 1 указано, при каких $\beta > 0$ выполнено соответствующее условие на параметры t для двух случаев, $\alpha > 1$ и $\alpha < 1$.

Условие	случай $\alpha < 1$	случай $\alpha > 1$
$t_{cusp} > t_0$	$\alpha^2 < \beta < \frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha} < \beta < \alpha^2$
$t_{cusp} < t_0$	$0 < \beta < \alpha^2$ и $\beta > \frac{1}{\alpha}$	$0 < \beta < \frac{1}{\alpha}$ и $\beta > \alpha^2$
$t_{cusp} > t_1$	$\beta > \alpha^2$	$0 < \beta < \alpha^2$
$t_{cusp} < t_1$	$0 < \beta < \alpha^2$	$\beta > \alpha^2$
$t_{cusp} > t_3$	$\beta > \alpha^2$	$0 < \beta < \alpha^2$
$t_{cusp} < t_3$	$0 < \beta < \alpha^2$	$\beta > \alpha^2$

Таблица 1: Условие на значения параметра t в особых точках бифуркационной кривой (1.1) и отвечающие им при $0 < \alpha < 1$ и $\alpha > 1$ промежутки изменения β .

В таблице 2 указано, при каких значениях α, β значения параметра t в особых точках бифуркационной кривой упорядочены каждым из возможных способов.

Параметры t особых точек	α, β
$t_3 < t_1 < t_0 < t_{cusp}$	$0 < \alpha < 1, \alpha^2 < \beta < \frac{1}{\alpha}$
$t_3 < t_1 < t_{cusp} < t_0$	$0 < \alpha < 1, \beta > \frac{1}{\alpha}$
$t_{cusp} < t_3 < t_1 < t_0$	$0 < \alpha < 1, 0 < \beta < \alpha^2$
$t_1 < t_3 < t_0 < t_{cusp}$	$\alpha > 1, \frac{1}{\alpha} < \beta < \alpha^2$
$t_1 < t_3 < t_{cusp} < t_0$	$\alpha > 1, 0 < \beta < \frac{1}{\alpha}$
$t_{cusp} < t_1 < t_3 < t_0$	$\alpha > 1, \beta > \alpha^2$

Таблица 2: Области изменения параметров (α, β) , при которых значения параметра t в особых точках бифуркационной кривой упорядочены каждым из возможных способов

Поскольку перечисленные выше точки разбивают кривую на дуги с ненулевой при $t \neq 0$ производной $h'_k = -t/2$, то значения t , отвечающие пересечениям кривой с осями Oh и Ok , однозначным образом попадают в интервалы значений t между t_0, t_1, t_3, t_{cusp} и ∞ . Тем самым, расположение параметрической кривой относительно осей Oh и Ok полностью описано.

3) Тип бифуркации, происходящей в прообразе дуги параметрической кривой, определяется по индексу формы d^2H , ограниченной на поверхность $K = k$.

Выразим J_3 из условия $K = k$, получим $J_3 = \pm\sqrt{J_1^2 + J_2^2 - k}$ и подставим $J_3(J_1, J_2)$ в уравнение $H = h$. Второй дифференциал функции $H(J_1, J_2)$ является диагональной матрицей. Изучаемые нами дуги бифуркационной кривой входят в критическое множество, а значит удовлетворяют условиям $J_1 = \frac{\lambda}{A_1 * t + 1}, J_2 = 0$. Отсюда получаем зависимость уже от одной переменной t , вместо двух (J_1, J_2) .

Вместо значения интеграла $K = k$ на дугах бифуркационной кривой можно подставить выражения для $k(t)$. Тогда одна из компонент полученной диагональной матрицы примет вид:

$$\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_3} - \frac{\lambda_3 \sqrt{(A_3 t + 1)^2}}{A_3 \sqrt{\lambda_3^2}} = \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_3} - \frac{\lambda_3 |(A_3 t + 1)|}{A_3 \lambda_3}.$$

Исходя из выбранного знака при выражении J_3 из $K = k$ и условия $J_3 = \frac{\lambda_3}{1 + A_3 t}$, полученного из критичности множества, раскроем знак модуля в каждом из случаев $J_3 > 0$ и $J_3 < 0$. Получим, что рассматриваемая компонента матрицы вне зависимости от выбранного знака J_3 примет вид $\frac{1}{A_1} + t$ и меняет знак при $t = -\frac{1}{A_1}$.

Знак второй диагональной компоненты матрицы совпадает со знаком многочлена

$$(t^3(A_1^3 A_3 \lambda_3^2 - A_1 A_3^3 \lambda^2) + t^2(3A_1^2 A_3 \lambda_3^2 - 3A_1 A_3^2 \lambda^2) + t(3A_1 A_3 \lambda_3^2 - 3A_1 A_3 \lambda^2) - A_1 \lambda^2 + A_3 \lambda_3^2).$$

Заметим, что в обоих корнях производной данный многочлен имеет одинаковые знаки, а значит, сам многочлен имеет ровно один корень. Подстановкой можно проверить, что корнем является точка возврата параметрической кривой. Исходя из знака определителя второго дифференциала H на поверхности $K = k$, сопоставим бифуркации (седла, минимумы, либо максимумы) полученным промежуткам значений параметра t кривой. Теорема доказана.

□

Отметим, что все четыре кривые проходят через точку $(1, 1)$, причем их касательные вектора в ней коллинеарны $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(1, -1)$, в частности, попарно не коллинеарны.

2. Разделяющее множество на пространстве параметров $a, b, A_1, A_3, \lambda, \lambda_3$.

Переходя от слоения \mathbb{R}^3 на совместные уровни функций H и K к слоению четырех функций f_1, f_2, H, K на $\mathbb{R}^6(\vec{x}, \vec{J})$, отметим следующее.

Для описания слоения системы на четырехмерном совместном уровне функций Казимира $M_{a,b}^4 = \{f_1 = a, f_2 = b\}$ интегрируемой системы на \mathbb{R}^6 оказывается полезным вычисление инвариантов Фоменко и Фоменко–Цишанга для их неособых зон энергии и интеграла. А именно, баз (с дополнительной информацией) слоения Лиувилля системы, ограниченной на неособую изоэнергетическую $H = h$ или изоинтегральную $K = k$ поверхность. Ее образ при отображении момента (K, H) является вертикальной или горизонтальной прямой на плоскости Okh , не проходящей через особые точки и не касающейся дуг бифуркационной диаграммы.

Поскольку графики бифуркационных кривых псевдоевклидова случая Жуковского не имеют вертикальных и горизонтальных асимптот, то порядок особых точек диаграммы в проекции на прямую Oh или Ok однозначно задаст, как неособая вертикальная $k = const$ или горизонтальная $h = const$ прямая может пересекать дуги бифуркационной диаграммы. Прообразу такой прямой можно сопоставить некоторый граф с оснащением, по которому можно однозначно восстановить слоение Лиувилля. Его вершины отвечают бифуркациям слоения, т.е. пересечениям прямой с дугами бифуркационной диаграммы. Более подробно опишем данный граф в разделе 3. Сейчас отметим, что он полностью определяется тем, какие дуги диаграммы пересекает прямая и тем, какая бифуркация сопоставлена каждой из пересекаемых дуг.

Тогда каждому уровню $M_{a,b}^4$ можно сопоставить “код” — последовательность меченых графов, каждый из которых отвечает неособой зоне энергии или интеграла, лежащей между проекциями особых точек диаграммы.

Назовем набор значений параметров $(a, b, A_1, A_3, \lambda, \lambda_3)$ *регулярным*, если для всех наборов значений из некоторой окрестности имеем одинаковую последовательность меченых графов изоинтегральных и изоэнергетических поверхностей.

Разделяющим множеством $\hat{\Theta}$ на пространстве параметров $\mathbb{R}^6(a, b, A_1, A_3, \lambda, \lambda_3)$ назовем множество наборов, в окрестности которых есть наборы с отличной последовательностью или которым не соответствует никакой последовательности.

Исключим из рассмотрения точки $(a, b) = (0, 0)$, $(A_1, A_3, \lambda, \lambda_3) \notin Z$. В первом случае совместный уровень $f_1 = a, f_2 = b$ не является четырехмерным многообразием, а во втором не определен гамильтониан H .

ТЕОРЕМА 3. *Для псевдоевклидова осесимметричного случая интегрируемости Жуковского разделяющее множество $\hat{\Theta}$ на пространстве параметров $(a, b, A_1, A_3, \lambda, \lambda_3)$ состоит из объединения следующих подмножеств, задаваемых условиями на свои координаты:*

- $\lambda \cdot \lambda_3 = 0$,
- $a = 0$,
- $b = 0$,
- $\{(A_1, A_3, \lambda, \lambda_3)\} : (\alpha, \beta) \in \Theta$,
- $\alpha = \frac{2\sqrt{\beta} - \beta^2}{2\beta^{3/2} - 1}, \quad \alpha = \frac{\beta^2 + 2\sqrt{\beta}}{2\beta^{3/2} + 1}$,
- $(a, b) : ab \neq 0, \quad b^2/a = k_{cusp} = \frac{\lambda^2(\alpha^2 - \beta)^3}{(1 - \alpha^3)^2}$,

- $(a, b) \quad ab \neq 0, \quad b^2/a = k(t^{**})$ для $h(t^{**}) = h(t^*)$ и $k(t^*) = 0$.

Доказательство. Случаям $ab = 0$ отвечает меньшее, чем при $ab \neq 0$ количество бифуркационных кривых, а также иные бифуркации, отвечающие уровню $k = 0$.

Если $\lambda\lambda_3 \neq 0$ и $(\alpha, \beta) \notin \Theta$, то при малом изменении параметров $A_1, A_3, \lambda, \lambda_3$ расположение бифуркационной кривой (1.1) на плоскости сохранится. В противном случае в окрестности точки в пространстве параметров будут такие системы, которым отвечает разное расположение, т.е. разные наборы графов.

К описанным множествам точек следует добавить те, при которых верно хотя бы одно из следующих условий.

1) Две особые точки кривой (1.1) имеют одинаковые значения ординаты h , т.е. $h_{cusp} = h(t^*)$ для $t^* : k(t^*) = 0$. Из последнего имеем уравнение $\sqrt{(1 + A_3 t)^2 / (1 + A_1 t)^2} = \lambda_3 / \lambda = \beta^{3/2}$ с двумя корнями t_{\pm}^* , лежащие в разных промежутках множества $\mathbb{R} / \{-1/A_1, -1/A_3\}$. Подставив полученные корни в условие $h(t^*) = h_{cusp} = \frac{(1 - \alpha\beta)^3 \lambda^2}{2(1 - \alpha^3)^2 A_1}$, получим на плоскости $O\alpha\beta$ кривые

$$\alpha = \frac{2\sqrt{\beta} - \beta^2}{2\beta^{3/2} - 1}, \quad \alpha = \frac{\beta^2 + 2\sqrt{\beta}}{2\beta^{3/2} + 1}, \quad (2.1)$$

На рис. 2. две кривые (2.1) выделены цветом. Они подразбивают области II и VI, IV и VIII пространства параметров $\mathbb{R}^2(\alpha, \beta)$ на пары подобластей II' и II'', VI' и VI'', IV' и IV'', VIII' и VIII'', в зависимости от значений ординат двух особых точек бифуркационной диаграммы. На первой из кривых (2.1) совпадают координаты h_{cusp} точки возврата и точки пересечения координатной оси Oh с ветвью кривой, содержащей точку возврата, а на второй кривой — с ветвью, не содержащей точку возврата.

Отметим, что координаты h точки возврата и точки пересечения с осью Oh вычисляются по явным формулам, содержащим лишь $\alpha, \beta, A_1, \lambda$.

Производные α'_β кривых (2.1) при $\beta = 1$ равны -4 и 9 соответственно, т.е. касательные к этим кривым в точке $(1, 1)$ коллинеарны векторам $(-4, 1)$, $(9, 1)$ и не коллинеарны касательным векторам к кривым из Θ . Тем самым все шесть кривых пересекутся трансверсально.

2. Прямая $k = b^2/a$ проходит через особую точку кривой (1.1). Последние либо лежат на прямой $k = 0$, либо являются точкой возврата или точкой ее касания с осью Ok . Отметим, что в последнем случае не возникает новых особых уровней $h = const$, отличных от нулевого (и так являющегося особым).

Условие на (a, b) для прохождения кривой $k = b^2/a$ через точку возврата означает:

$$b^2/a = k = k_{cusp} = \frac{\lambda^2(\alpha^2 - \beta)^3}{(1 - \alpha^3)^2}.$$

3. Точки пересечения прямых $k = b^2/a$ и $k = 0$ с кривой (1.1) имеют одинаковую ординату h . Поскольку координаты $h(t^*) = \tilde{h}$ точки пересечения кривой (1.1) с осью Oh находится явно, то далее задача сводится к решению системы $h(t^{**}) = \tilde{h}, k(t^{**}) = b^2/a$. Из второго уравнения выражается одна из дробей, т.е. первое уравнение сводится к полиному по t степени 4, коэффициенты которого зависят от b^2/a и параметров α, β . \square

3. Меченые графы слоений на неособых поверхностях Q_k^3 и Q_h^3 .

Алгоритм построения.

В данном разделе опишем вид слоения Лиувилля псевдоевклидова осесимметричного случая интегрируемости Жуковского системы на неособых изоэнергетических и изоинтегральных

поверхностях. Ответ будет дан в виде графа, вершинам которого приписаны типы бифуркаций, а его ребрам — класс гомеоморфности слоя Лиувилля в прообразе точки ребра (тор, цилиндр или плоскость). Если слой гомеоморфен тору, а оба атома на концах ребра являются боттовскими компактными 3-атомами, то ребру можно приписать метки r, ε .

ЛЕММА 1. Пусть $(a, b) \neq (0, 0)$, $k \neq 0$ и $k \neq b/a$. Тогда $Q_k^3 = \{f_1 = a, f_2 = b, K = k\}$ является гладкой неособой трехмерной поверхностью в \mathbb{R}^6 .

Лемма 1 легко следует из явной проверки линейной независимости градиентов этих трех функций. Далее, по бифуркационной кривой (1.1) и горизонтальной $k = const$ или вертикальной $h = const$ прямой можно построить базу слоения Лиувилля в прообразе этой прямой, заданного другой компонентой отображения (K, H) в $\mathbb{R}^3(\vec{J})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Прообраз прямой $k = const$ или $h = const$, не проходящей через особые точки кривой $(k(t), h(t))$, при отображении (K, H) в $\mathbb{R}^3(\vec{J})$ устроен одним из восьми способов, изображенных на рис. 3. Аналог молекулы такого слоения на двумерной поверхности имеет вид $\pm kM_i$ для $i = 1, \dots, 4$. Здесь “ $-M_i$ ” означает молекулу, получаемую из M_i заменой направления роста функции, а k есть количество экземпляров связанной молекулы M_i в несвязном инварианте слоения на Q_h^3 или Q_k^3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая прямая, параллельная Ok или Oh и не проходящая через особые точки кривой $\gamma(t)$, пересекает ее или в двух, или в четырех точках. При этом не более двух таких точек отвечают седловым атомам, а одна из них обязательно отвечает минимальному (при $0 < \alpha < 1$) или максимальному атому A в противном случае. Если седловых атомов нет, получаем молекулы $\pm M_2$, если один — то $\pm M_1$ или $\pm M_3$ (различаются связностью или несвязностью прообраза прямой). Если их два — получаем $\pm M_4$.

Все неособые слои гомеоморфны окружностям или являются пустым множеством, причем в одном из направлений (роста или уменьшения) значения функции k при $h = const$ имеем неограниченную серию таких слоев (а в другом — максимальный или минимальный атом A). \square

Поскольку Q_{abk}^3 является неособой поверхностью, и тип слоя не зависит от выбора точки \vec{J} на двумерной базе. Если база гомеоморфна \mathbb{R}^2 , то Q_{abk}^3 является прямым произведением базы на слой. Иначе база гомеоморфна цилиндру, и аналогичное верно из тождественности отображения слоя в себя при обороте вдоль замкнутой негомоторной нулю кривой.

Теперь опишем результат о возможном виде графа-инварианта слоения на неособом Q_{abk}^3 .

ТЕОРЕМА 4. Слоение Лиувилля псевдоевклидовой осесимметричной системы Жуковского на неособой изоинтегральной поверхности $Q_k^3 : K = k$ имеет тип прямого произведения и задается в терминах молекул M_1, M_2, M_3, M_4 , задающих слоение на связанной двумерной некомпактной поверхности и изображенных на рис. 3. Здесь $-M_i$ есть инвариант слоения, полученного из слоения с молекулой M_i путем изменения знака функции, а sM_i есть несвязное объединение с расслоенных поверхностей с инвариантом M_i .

$$\pm M_1 \times 2\mathbb{R} \quad \pm 2M_2 \times 2\mathbb{R}, \quad \pm(M_3 \sqcup M_2) \times 2\mathbb{R}, \quad \pm M^4 \times 2\mathbb{R} \quad \pm 2M_2 \times S^1, \quad \pm(M_3 \sqcup M_2) \times S^1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было установлено ранее для случая Эйлера, тип слоя $f_1 = a, f_2 = b$ в пространстве $\mathbb{R}^3(\vec{x})$, отвечающий вектору \vec{J} , зависит только от знаков $K(\vec{J}), a, b, b^2 - ak$. Если $b^2 - ak \neq 0$ и $k \neq 0$, то положение указанной квадрики в $\mathbb{R}^3(\vec{x})$ задается непрерывными функциями от точки поверхности $K = k$.

Поскольку интеграл системы Жуковского равен интегралу K волчка Эйлера, то слоение на неособых Q_k^3 будет иметь тип прямого произведения двумерной расслоенной поверхности M на невырожденную плоскую квадртку — эллипс, мнимый эллипс или гиперболу. Последние гомеоморфны $S^1, \emptyset, 2R$ соответственно.

Если $a \cdot b = 0$ или $b \neq 0, a > 0$ то тип слоя определяется только знаками a, b, k (особый уровень $b^2 = ak$ либо равен нулю, либо разделяет две зоны с гиперболами разных типов. Если $b \neq 0$ и $a < 0$, то при $k < 0$ неособый слой или пуст, или гомеоморфен окружности S^1 .

Тем самым, для каждого из случаев I-VIII остается проверить, реализуется ли соответствующий инвариант $\pm M_i$ в зонах $k < 0, k > 0$. Теорема доказана. \square

Теперь опишем меченый граф изоэнергетической поверхности Q_{abh}^3 и алгоритм его вычисления для конкретной системы по значениям ее констант и произвольных постоянных a, b .

Для этого приведем алгоритм построения меченого графа для указанного графа по значениям параметров системы и произвольных постоянных a, b, h .

1. По значениям $A_1, A_3, \lambda, \lambda_3$ вычислим значения α, β и определим, какой из областей I-VIII (и какой из подобластей) отвечает данная система. Иными словами, как бифуркационная кривая (1.1) расположена относительно осей координат.

2. По значению h определим, какие дуги бифуркационной диаграммы пересекает горизонтальная прямая $h = \text{const}$. Для этого сравним значение h со значением $h(t)$ в особых точках диаграммы: ее точках возврата, пересечения с осью Oh . Отсюда однозначно восстанавливается, какому графу $\pm M_i$ отвечает такое расположение кривой.

3. Выбор значений a, b задает одну из следующих альтернатив: если $ab = 0$, то имеется одна бифуркационная кривая $k = 0$, а типы слоев при $k < 0$ и $k > 0$ определяются согласно таблице 1 из работы [22]. Если $ab \neq 0$ и прямая h не проходит через особые точки кривой (1.1) и точку ее пересечения с прямой $k = b^2/a$, то трем зонам значений k отвечают разные типы слоев в пространстве $\mathbb{R}^3(\vec{x})$. Проверка указанных условий для конкретного набора параметров системы, значений a, b, h выполняется явно. Последние также задают, каким точкам ребер графа $\pm M_i$ отвечают уровни $k = b^2/a$ и $k = 0$

4. Опишем процедуру построения меченого графа по графу $\pm M_i$ и указанной выше информации. Для этого разрежем граф $\pm M_i$ по значениям, отвечающим уровням $k = b^2/a, k = 0$.

Пусть $a < 0$. Тогда уровню $k = b^2/a$ отвечает слой-точка (пара мнимых пересекающихся прямых), а близким значениям $k > b^2/a$ — малые эллипсы. Удалим из разрезанного графа компоненту, отвечающую значениям $k < b^2/a$. Свободный конец уровня $k = b^2/a$ завершается 3-атомом A . Компонента графа $\pm M_i$, лежащая между уровнями $k = 0$ и $k = b^2/a$, умножается на S^1 . Уровень $k = 0$ отвечает перестройке эллипса в гиперболу через параболу. При этом одно из двух семейств ветвей гиперболы имеет поточечным пределом параболу (отвечающую значению $k = 0$), а для другого семейства предельное множество на уровне $k = 0$ пусто. Этим перестройкам отвечают атомы X_u и O_2 . Для построения графа умножим его компоненту $k > 0$ на несвязное объединение $2\mathbb{R}$. При этом одна из компонент отвечает атому O_2 , а второй — атому X_u . 3-атомы указанной компоненты $k > 0$ получаются из аналогичных 2-атомов графа $\pm M_i$ путем умножения на \mathbb{R} , т.е. имеют тип \hat{B} и \hat{A} вместо 3-атомов Фоменко B, A .

Если $a > 0$, то умножим компоненту M_i , лежащую между $k = 0, k = b^2/a$ на $2\mathbb{R}$, причем один из экземпляров склеим обратно с компонентой $k < 0$ через 3-атом X_u , а второй — завершим атомом O_2 на уровне $k = 0$. Если промежуток $0 < k < b^2/a$ содержит 2-атомы графа $\pm M_i$, то отвечающие им 3-атомы получены из них умножением на \mathbb{R} , т.е. имеют тип \hat{B} и \hat{A} .

Компоненту графа $\pm M_i$, отвечающую значениям $k > b^2/a$, также умножают на $2\mathbb{R}$. При этом перестройка в слое затрагивает ветви гиперболы уровня $0 < k < b^2/a$, т.е. каждой вершине B'' инцидентны ребра, идущие из компонент с атомами X_u и O_2 . На уровнях $k > b^2/a$ имеем атомы типа \hat{B} и \hat{A} .

Результат работы алгоритма приведен на рис. 4, 5 для двух примеров значений параметров. Также отметим, что для получения полного списка возможных инвариантов имеется следующий путь. На рис 3 каждому графу $\pm M_i$ красным цветом сопоставлено, каким его уровням может отвечать значение $k = 0$ для систем с разными параметрами $A_1, A_3, \lambda, \lambda_3$ и значениями h . Путем применения описанного выше алгоритма удается сопоставить каждому из них набор инвариантов, возможных при различных значениях a, b .

Программная реализация работы алгоритма доступна по следующей ссылке:
<https://colab.research.google.com/drive/1Ttfp5NplxOj61a5Sqj4cuWjch1jOKJgJ>.

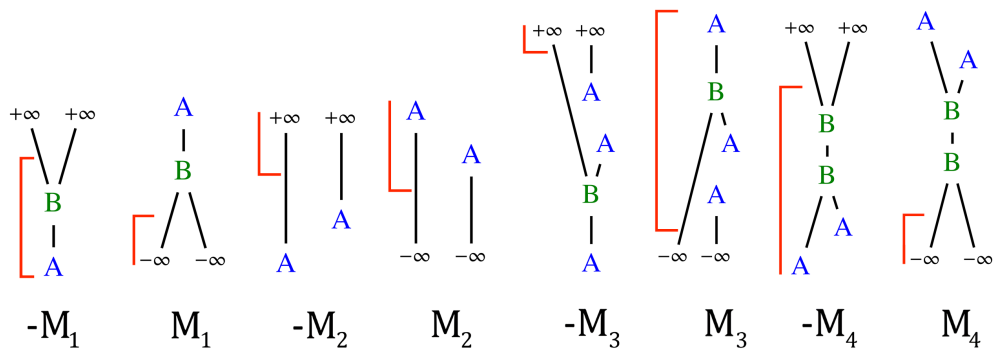


Рис. 3: Инварианты слоения, заданного функцией H на неособых уровнях функции $K = k$, в пространстве $\mathbb{R}^3(\vec{J})$.

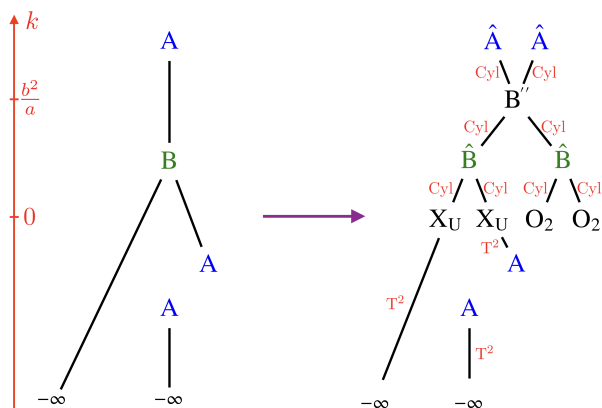


Рис. 4: Пример работы алгоритма по построению меченых графов для неособых изоэнергетических поверхностей.

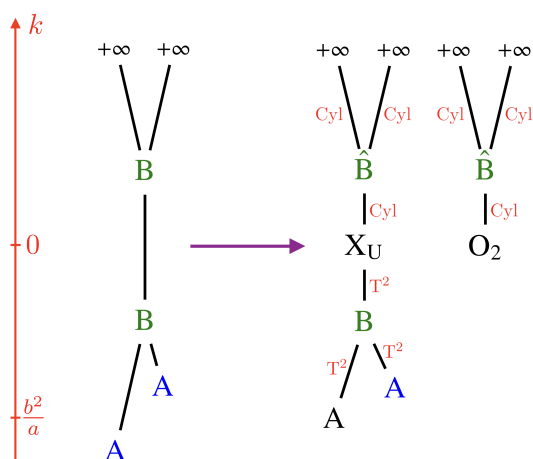


Рис. 5: Пример работы алгоритма по построению меченых графов для неособых изоэнергетических поверхностей.

4. Заключение

В работе приведен детальный топологический анализ псевдо-евклидова аналога интегрируемого случая Жуковского для осесимметричного тела. На многомерном пространстве параметров системы удалось выделить два существенных параметра, α и β , в терминах этих параметров удалось построить разделяющее множество. Кривые на данной плоскости образуют восемь областей, каждой из которых соответствует своя конфигурация бифуркационной диаграммы. Для каждой области на плоскости параметров явно описано расположение бифуркационной кривой $(k(t), h(t))$ на плоскости Okh с типами 2-атомов.

Удалось построить и программно реализовать алгоритм построения меченого графа (как и инварианты Фоменко–Цишанга систем с компактными слоениями, описывающего слоение на неособой трехмерной поверхности) по набору значений параметров системы. В дальнейшем планируется более детально развить построенное моделирование системы, в первую очередь, вблизи прообразов бифуркационных значений первых интегралов. В окрестности особых траекторий, а также на некомпактных слоях, фазовые траектории могут быть устроены весьма причудливо, что вызывает интерес к их визуализации методами виртуальной и дополненной реальности.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ, проект № 23-Ш05-27. Е.С. Агуреева (Якимова) является стипендиатом Фонда “БАЗИС”.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фоменко А.Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил., 1988. Т.22, №4. С.38-51.
2. Фоменко А.Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // УМН, 1989. Т.44, №1. С.145-173.
3. Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Известия АН СССР, 1990. Т.54, №3. С.546-575.
4. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Т. 1, 2. Ижевск: Удмуртский университет, 1999.
5. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые топологические билиарды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. матем., 2017. Т.81, №4. С.20-67.
6. Фоменко А.Т., Ведюшкина В.В. Билиарды и интегрируемые системы // УМН, 2023. Т.78, №5. С.93-176.
7. Gavrilov L. Bifurcations of invariant manifolds in the generalized Henon–Heiles system // Phys. D, 1989. Vol.34, №1-2. P.223-239.
8. Кудрявцева Е.А. Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками // Докл. РАН, 2012. Т.445, №4. С.383-385.
9. Алёшкин К.Р. Топология интегрируемых систем с неполными полями // Матем. сб., 2014. Т.205, №9. С.49-64.

10. Федосеев Д.А., Фоменко А.Т. Некомпактные особенности интегрируемых динамических систем // *Фундамент. и прикл. матем.*, 2016. Т.21, №6. С.217-243.
11. Новиков Д.В. Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $e(3)$ // *Матем. сб.*, 2011. Т.202, №5. С.127-160.
12. Новиков Д.В. Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(3,1)$ // *Матем. сб.*, 2014. Т.205, №8. С.41-66.
13. Borisov A.V., Mamaev I.S. Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // *Rus. J. of Math. Phys.*, 2016. Vol.23, №4. P.431-454.
14. Николаенко С.С. Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях // *Матем. сб.*, 2020. Т.211, №8. С.68-101.
15. Николаенко С.С. Топологическая классификация некомпактных 3-атомов с действием окружности // *Чебышевский сб.*, 2021. Т.22, №5. С.185-197.
16. Соколов С.В. Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных // *Труды МАИ*, 2018. №100. 13 с.
17. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // *Собр. соч.*, 1949. Т.2. С.152-309.
18. Кибкало В.А. Свойство некомпактности слоев и особенностей неевклидовой системы Ковалевской на пучке алгебр Ли // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2020. №6. С.56-59.
19. Кибкало В.А. Первый класс Аппельрота псевдоевклидовой системы Ковалевской // *Чебышевский Сборник*, 2023. Т.24, №1. С.69-88.
20. Алтуев М.К., Кибкало В.А. Топологический анализ псевдоевклидова волчка Эйлера при особых значениях параметров // *Матем. сб.*, 2023. Т.214, №3. С.54-70.
21. Белоусов Н.А., Кибкало В.А. Инварианты псевдоевклидова волчка Эйлера с некомпактными слоями // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2025. №3. С.17-22.
22. Агуреева Е.А., Кибкало В.А. Топологический анализ осесимметричной системы Жуковского в случае алгебры $e(2,1)$ // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2024. № 5. С. 3-16.

REFERENCES

1. Fomenko, A. T. 1987, "The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability", *Math. USSR-Izv.*, vol. 29, no. 3, pp. 629–658.
2. Fomenko, A. T. 1988, "Symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems", *Russian Math. Surveys*, vol. 44, no. 1, pp. 145–173.
3. Fomenko, A. T. & Zieschang, H. 1991, "A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom", *Math. USSR-Izv.*, vol. 36, no. 3, pp. 567–596.
4. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, *Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington.

5. Vedyushkina (Fokicheva), V. V. & Fomenko, A. T. 2017, “Integrable topological billiards and equivalent dynamical systems”, *Izv. Math.*, vol. 81, no. 4, pp. 688–733.
6. Fomenko, A. T. & Vedyushkina, V. V. 2023, “Billiards and integrable systems”, *Russian Math. Surveys*, vol. 78, no. 5, pp. 881–954.
7. Gavrilov, L. 1989, “Bifurcations of invariant manifolds in the generalized Hénon–Heiles system”, *Physica D*, vol. 34, no. 1–2, pp. 223–239.
8. Kudryavtseva, E. A. 2012, “An analogue of the Liouville theorem for integrable Hamiltonian systems with incomplete flows”, *Doklady Mathematics*, vol. 86, no. 1, pp. 527–529.
9. Aleshkin, K. R. 2014, “The topology of integrable systems with incomplete fields”, *Sb. Math.*, vol. 205, no. 9, pp. 1264–1278.
10. Fedoseev, D. A. & Fomenko, A. T. 2020, “Noncompact Bifurcations of Integrable Dynamic Systems”, *J. Math. Sc.*, vol. 248, pp. 810–827.
11. Novikov, D. V. 2011, “Topological features of the Sokolov integrable case on the Lie algebra”, *Sb. Math.*, vol. 202, no. 5, pp. 749–781.
12. Novikov, D. V. 2014, “Topological features of the Sokolov integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(3,1)$ ”, *Sb. Math.*, vol. 205, no. 8, pp. 1107–1132.
13. Borisov, A. V. & Mamaev, I. S. 2016, “Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces”, *Rus. J. of Math. Phys.*, vol. 23, no. 4, pp. 431–454.
14. Nikolaenko, S. S. 2020, “Topological classification of Hamiltonian systems on two-dimensional noncompact manifolds”, *Sb. Math.*, vol. 211, no. 8, pp. 1127–1158.
15. Nikolaenko, S. S. 2021, “Topological classification of non-compact 3-atoms with a circle action”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 22, no. 5, pp. 185–197.
16. Zhukovsky, N. E. 1949, “On the motion of a rigid body containing cavities filled with a homogeneous droplet liquid”, *Collected Works*, vol. 2, pp. 152–309. (in Russian)
17. Sokolov, S. V. 2018, “The integrable case of Kovalevskaya in a non-Euclidean space: separation of variables”, *Trydi MAI*, vol. 100, pp. 1–13.
18. Kibkalo, V. A. 2020, “Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 75, no. 6, pp. 263–267.
19. Kibkalo, V. A. 2023, “First Appelrot class of the pseudo-Euclidean Kovalevskaya system”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 24, no. 1, pp. 69–88.
20. Altuev, M. K. & Kibkalo, V. A. 2023, “Topological analysis of pseudo-Euclidean Euler top for special values of the parameters”, *Sb. Math.*, vol. 214, no. 3, pp. 334–348.
21. Agureeva, E. A. & Kibkalo, V. A. 2024, “Topological Analysis of Axisymmetric Zhukovsky System in the Case of Lie Algebra $\mathfrak{e}(2,1)$ ”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 79, no. 5, pp. 207–222
22. Belousov, N. A. & Kibkalo, V. A. 2025, “Invariants of Pseudo-Euclidean Euler Top with Noncompact Leaves”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 80, no. 3, pp. 167–172.

Получено: 31.04.2025

Принято в печать: 17.10.2025