ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 514.11 + 514.87

О РАЦИОНАЛЬНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ В ПЛОСКОЙ РЕШЕТКЕ

М. И. Штогрин (г. Москва)
stogrin@mi.ras.ru

Аннотация

Исследуются рациональные и иррациональные вращения для множества рациональных направлений в плоской точечной решетке. Доказано, что в случае рациональных вращений порядок некристаллографического поворота может быть равен только 8 или 12. Множество рациональных направлений в прямоугольной точечной решетке с метрической квадратичной формой $x^2 + \lambda^2 y^2$ и в произвольной ее центрировке обладает иррациональным вращением, если и только если число λ^2 рационально.

Ключевые слова: решетка, примитивная ячейка, рациональное направление, вращение, угол, тангенс.

Библиография: 3 наименования.

ON RATIONAL DIRECTIONS IN THE FLAT LATTICE

M. I. Shtogrin (Moscow)

Abstract

Rational and irrational rotations for the set of rational directions in the flat point lattice are considered. It is proved that in the case of rational rotations an order of noncrystallographic turn can be only 8 or 12. The set of rational directions in the rectangular point lattice with metric quadratic form $x^2+\lambda^2 y^2$ and arbitrary its centering has irrational rotation if and only if the number λ^2 is rational.

Keywords: lattice, unit cell, rational direction, rotation, angle, tangent.

Bibliography: 3 titles.

Введение

Теория точечных решеток в $\mathbb{R}^n$ подробно изложена в книге С. С. Рышкова [1]. Для точечных решеток в $\mathbb{R}^3$ в статье А. В. Гадолина [2] было введено понятие равенства направлений и при допущении закона рационального отношения между параметрами найдены все так называемые точечные группы симметрии кристалла, или 32 кристаллографических класса. Для плоской сетки, или точечной решетки в $\mathbb{R}^2$, ниже будут исследованы все те вращения плоскости, при которых все рациональные направления в произвольной точечной решетке, расположенной в двумерной плоскости, остаются рациональными.

1. Плоская сетка

В двумерной евклидовой плоскости рассмотрим произвольный параллелограмм. Построим разбиение плоскости на конгруэнтные и параллельные ему параллелограммы, в котором смежные параллелограммы пересекаются по целым сторонам (такое разбиение мы называем нормальным). Все прямые, на которых расположены стороны параллелограммов, составляют плоскую сетку. Точки пересечения этих прямых называют узлами. Узлы, или вершины данного разбиения, составляют *точечную решетку*, или просто *решетку*, см. [1]. Всякий параллелограмм разбиения называют основным параллелограммом, или *примитивной ячейкой*, плоской точечной решетки.

Каждая точка плоскости принадлежит хотя бы одному параллелограмму рассматриваемого разбиения, а любая достаточно малая ее окрестность принадлежит

1) одному параллелограмму разбиения, если она расположена внутри него,

2) двум параллелограммам разбиения, если расположена внутри стороны,

3) четырем параллелограммам разбиения, если она расположена в вершине.

Следовательно, решетка является дискретной системой точек. Точки произвольной точечной решетки изолированы друг от друга и никакая точка плоскости не является предельной точкой для последовательности точек, или узлов, принадлежащих решетке.

Примем вершину одного из параллелограммов построенного нормального разбиения за начало координат, а ребра параллелограмма, выходящие из начала, примем за единичные отрезки двух координатных осей. Тогда все вершины разбиения и только они будут иметь целочисленные координаты. Таким образом, точечная решетка может быть определена как совокупность точек с целочисленными координатами в каком-то репере, который называют *основным репером* решетки. В качестве начала координат может быть взята любая точка решетки. Если взять какой-то вектор с началом и концом в точках данной решетки, то параллельный ему вектор с началом в точке решетки будет иметь конец в точке этой же решетки. Параллельный перенос на *вектор решетки*, обладающий целочисленными координатами в ее основном репере, совмещает всю решетку с собой. Таким образом, любая точечная решетка обладает свойством параллельной переносности.

В силу дискретности и параллельной переносности решетки порядок n поворота, совмещающего решетку с собой, не может быть любым. В [2] доказано, что порядок n не больше 6 и не равен 5, т.е. $n \leqslant 6$ и $n \neq 5$. В самом деле, выберем в плоскости точку решетки, ближайшую к центру поворота и не совпадающую с ним. Размножив эту точку решетки всеми поворотами вокруг центра вращения, совмещающими решетку с собой, получим выпуклый правильный n-угольник, все вершины которого принадлежат решетке. Пусть $n \geqslant 3$. Тогда на двух смежных сторонах n-угольника построим ромб. Три вершины ромба совпадают с вершинами n-угольника и поэтому принадлежат решетке. Значит, четвертая вершина ромба также должна принадлежать решетке. Однако при $n = 5$ и $n \geqslant 7$ четвертая вершина ромба не расположена в центре вращения и является более близкой к центру, чем вершина n-угольника. Но этого не может быть, так как вершина n-угольника была взята ближайшей к центру вращения точкой решетки. Значит, порядок поворота двумерной решетки находится среди целых чисел 1, 2, 3, 4, 6. Он кристаллографический. В итоге получена

Теорема 1. *Правильные многоугольники с вершинами в точках решетки — это правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник.*

Рассмотрим выпуклый правильный n-угольник при $n = 5$ или $n \geqslant 7$. Одну из вершин n-угольника соединим прямолинейными отрезками со всеми остальными его вершинами. Рассмотрим всевозможные линейные комбинации полученной совокупности векторов с целочисленными коэффициентами, т.е. с коэффициентами из $\mathbb{Z}$. Концы всех этих векторов составляют параллельно переносную систему точек. Однако она не является решеткой. В самом деле, четвертая вершина ромба, упомянутого выше, не расположена в центре n-угольника и является более близкой к центру, чем вершина n-угольника. Все четвертые вершины из n таких ромбов являются вершинами меньшего правильного n-угольника. Повторяя эти рассуждения вновь и вновь, мы получаем, что центр n-угольника является предельной точкой для построенного параллельно переносного множества точек, содержащего вершины n-угольника. Следовательно, оно не является точечной решеткой, см. выше и [1], [2].

Произвольная плоская точечная решетка центрально-симметрична с центром симметрии в точке решетки и с центром симметрии в середине отрезка с концами в ее точках.

Если имеется поворот плоскости, совмещающий точечную решетку с собой и не оставляющий ни одной ее точки на том же месте, то имеется такой же поворот, совмещающий решетку с собой и оставляющий некоторую ее точку на том же месте. В самом деле, если при повороте каждая точка решетки заняла новое положение, то посредством параллельного переноса решетки одно из новых положений точки можно вернуть в старое положение. Значит, результирующий поворот будет происходить вокруг старого положения точки решетки. Таким образом, если двумерная точечная решетка обладает поворотом какого-то порядка, совмещающим решетку с собой, то она обладает точно таким же поворотом вокруг точки решетки. Группу поворотов плоскости вокруг точки решетки, совмещающих решетку с собой, называют точечной группой данной решетки. Группу всех поворотов плоскости вокруг точки решетки, совмещающих решетку с собой, то есть максимальную точечную группу решетки, называют *голоэдрией.* Голоэдрия может обладать поворотами 1-го и 2-го рода; поворотом 2-го рода служит зеркальное отражение от прямой.

В $\mathbb{R}^2$ существуют всего четыре различные голоэдрии. Одна из них имеет два целочисленно неэквивалентные представления в виде группы целочисленных (2×2)-матриц. Если представления голоэдрий целочисленно эквивалентны, то решетки относятся к одному *типу Браве*. Имеются пять типов Браве плоских решеток. Эти решетки соответственно имеют названия косоугольная, прямоугольная примитивная, прямоугольная центрированная, квадратная и гексагональная, см. [3].

2. Рациональное направление

Рассмотрим поворот порядка n, $n \geqslant 5$, вокруг точки решетки O. Возьмем прямолинейный отрезок OA, который имеет рациональное направление в решетке. Значит, найдется точка A', принадлежащая решетке и расположенная на луче OA, т.е. расположенная внутри отрезка OA, на его продолжении или совпадающая с A. Пусть при повороте вокруг точки O на угол $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ отрезок OA переходит в отрезок OB, отрезок OB переходит в OC, OC переходит в OD, OD в OE, $\ldots$, причем все они имеют рациональные направления. Тогда их концы A, B, C, D, E, $\ldots$ являются вершинами правильного многоугольника, расположенного в плоскости решетки. Рассмотрим три соседних отрезка OA, OB и OC. Отрезок OB направлен по биссектрисе угла между OA и OC. Так как отрезок OB имеет рациональное направление в решетке, то найдется точка B', принадлежащая решетке и расположенная на луче OB, т.е. расположенная внутри отрезка OB, на его продолжении или совпадающая с B. Построим ромб с диагональю OB', противоположные стороны которого коллинеарны соответственно отрезкам OA и OC. Все четыре стороны ромба рациональны, так как они проходят через точки A и B', принадлежащие рассматриваемой точечной решетке, и имеют в ней рациональные направления. Значит, все вершины ромба рациональны. А так как две вершины ромба, расположенные на лучах OA и OC, имеют рациональные координаты и они равноудалены от вершины O, то на лучах OA и OC имеются точки решетки, равноудаленные от вершины O. Для их получения достаточно координаты имеющихся двух вершин ромба умножить на (наименьшее) общее кратное их знаменателей.

Точно так же, отрезок OD направлен по биссектрисе угла между отрезками OC и OE. Следовательно, на лучах OC и OE имеются точки решетки, равноудаленные от вершины O. Таким образом, в данном случае на луче OC получится какая-то точка решетки. В предыдущем случае на этом же луче OC могла получиться совсем другая точка решетки. Возьмем на луче OC точку, расстояние которой от O кратно расстояниям от O в этих двух случаях. На этом расстоянии имеются точки решетки на всех трех лучах OA, OC и OE. Итак, на лучах OA, OC и OE имеются точки решетки, равноудаленные от O.

Повторяя эти рассуждения вновь и вновь, сделаем полный обход вокруг точки O или же сделаем вокруг точки O два полных обхода. В итоге мы получим одно из двух: либо существует правильный $\frac{n}{2}$-угольник при четном n, либо существует правильный n-угольник при нечетном n. В обоих случаях вершины многоугольника принадлежат точечной решетке. Однако при нечетном $n \geqslant 5$ такого не может быть, см. выше и [2]. При четном n возможно лишь $\frac{n}{2} = 3, 4, 6$, т.е. $n = 6, 8, 12$. В итоге нами получена следующая

Теорема 2. *Если совокупность рациональных направлений в решетке совмещается с собой некристаллографическим поворотом, то его порядок равен* 8 *или* 12.

Осталось выяснить, бывают ли повороты 8-го и 12-го порядков. Если бывают, то решетка должна содержать вершины квадрата или гексагона, см. выше.

Пусть рациональные направления заданы единичными векторами, выпущенных из одной и той же точки. Тогда их концы будут расположены на единичной окружности с центром в этой точке. Наша дальнейшая цель — исследовать некристаллографические повороты множества рациональных направлений в плоской точечной решетке, как множества точек на окружности.

Поворот 8-го порядка. В ортонормированном репере точки с координатами

$$(1,0),\quad (0,1),\quad (-1,0),\quad (0,-1),$$

а также точки с координатами

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

расположены на единичной окружности с центром в начале координат и имеют рациональные направления в квадратной решетке, построенной на упомянутом репере. Совокупность восьми радиус-векторов этих точек совмещается с собой поворотом 8-го порядка вокруг начала координат. Правда, поворот 8-го порядка не совмещает решетку с собой.

Радиус-векторы двух точек $(1,1)$ и $(-1,1)$ данной решетки составляют основной репер другой квадратной решетки, которая является подрешеткой исходной решетки. Она подобна ей с коэффициентом подобия $\sqrt{2}$ и поворотом на угол $\frac{\pi}{4}$. Обе квадратные решетки имеют одну и ту же совокупность рациональных направлений, задаваемых точками единичной окружности. Поворот 8-го порядка вокруг начала совмещает эту совокупность с собой.

Поворот 12-го порядка. В ортонормированном репере точки с координатами

$$(1,0),\quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\quad (-1,0),\quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right),\quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right),$$

а также точки с координатами

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right),\quad (0,1),\quad \left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right),$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},-\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right),\quad (0,-1),\quad \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},-\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)$$

расположены на единичной окружности с центром в начале координат и имеют рациональные направления в гексагональной решетке, построенной на первых шести точках — вершинах правильного 6-угольника. Совокупность двенадцати радиус-векторов упомянутых точек совмещаются с собой поворотом 12-го порядка вокруг начала координат. Поворот 12-го порядка не совмещает решетку с собой. Радиус-векторы двух точек

$$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\quad \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

заданной гексагональной решетки составляют основной репер другой гексагональной решетки, которая является подрешеткой исходной решетки. Она подобна ей с коэффициентом подобия $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ и поворотом на угол $\frac{\pi}{6}$. Обе гексагональные решетки имеют одну и ту же совокупность рациональных направлений, задаваемых точками единичной окружности. Поворот 12-го порядка вокруг начала совмещает эту совокупность с собой.

Таким образом, некристаллографическими поворотами обладает совокупность рациональных направлений квадратной решетки и произвольной ее центрировки, а также гексагональной решетки и произвольной ее центрировки. На этом исследование рациональных вращений, т.е. поворотов конечного порядка, завершено.

3. Иррациональное вращение

Продолжим исследование множества рациональных направлений в решетке. Порядок некристаллографического поворота может быть равен 8 или 12, см. выше, если он конечен. Теперь нас интересуют повороты бесконечного порядка.

Луч, выпущенный из точки решетки, имеет рациональное направление в решетке, если на нем имеется еще хотя бы одна точка этой решетки. Значит, таких точек бесконечно много. Рациональное направление в решетке можно задавать примитивным вектором решетки, т.е. вектором с взаимно простыми целыми координатами в основном ее репере.

Из точки O произвольной плоской точечной решетки выпустим два неколлинеарных примитивных вектора. Их концы A и B являются точками решетки. Предположим, что отрезки OA и OB соизмеримы и их общую меру обозначим через e. Тогда $|OA| = ae$, $|OB| = be$, где $a, b \in \mathbb{N}$. Гомотетично увеличив отрезок OA с центром гомотетии в точке O и коэффициентом гомотетии b, получим отрезок OA', $|OA'| = b|OA| = b(ae)$. Так как b целое, то точка A' принадлежит решетке. Точно так же на луче OB получаем точку B', $|OB'| = a|OB| = a(be)$, которая также принадлежит решетке. Точки A' и B' равноудалены от O. Построим ромб с вершинами O, A' и B'. Его четвертая вершина также принадлежит решетке. Значит, диагонали ромба являются векторами решетки. Они перпендикулярны.

Таким образом, из соизмеримости длин двух неколлинеарных векторов решетки следует наличие в ней прямоугольной подрешетки. А сама решетка является некоторой центрировкой (см. [1]) прямоугольной решетки, если она не совпадает с ней. Множество рациональных направлений в решетке и ее подрешетке всегда является одним и тем же.

Примем ортогональные примитивные векторы прямоугольной решетки за единичные векторы координатных осей. Пусть, для определенности, длина примитивного вектора вдоль оси абсцисс равна 1, а длина примитивного вектора вдоль оси ординат равна λ. Тогда квадрат длины вектора с координатами x и y будет равен $x^2 + \lambda^2 y^2$.

В данной системе координат точки с целыми координатами составляют прямоугольную решетку. Радиус-векторы двух точек с координатами (p, q) и $(-\lambda^2 q, p)$ перпендикулярны друг другу и отношение их длин равно отношению длин единичных отрезков на осях координат. Если $p, q \in \mathbb{N}$, то точка (p, q) принадлежит прямоугольной решетке с метрической квадратичной формой $x^2 + \lambda^2 y^2$. Однако вторая точка имеет рациональные координаты, если и только если λ^2 рационально. (В противном случае в решетке имеются лишь два ортогональные рациональные направления.) В таком случае для радиуса-вектора произвольной точки (p, q) прямоугольной решетки имеется перпендикулярный ему радиус-вектор другой точки $(-\lambda^2 qd, pd)$ этой же решетки, где через d обозначен знаменатель рационального числа λ^2.

Ясно, что угол α между радиус-векторами точек $(1, 0)$ и (p, q) является углом поворота вокруг начала $O(0, 0)$, при котором множество рациональных направлений решетки совмещается с собой. Этот угол, очевидно, можно удвоить, утроить, ... А так как прямоугольная решетка зеркально симметрична относительно координатных осей, то угол $-\alpha$ между радиус-векторами точек $(1, 0)$ и $(p, -q)$, противоположный углу α, также является углом поворота вокруг начала $O(0, 0)$, при котором множество рациональных направлений решетки совмещается с собой. Значит, это множество совмещается с собой при поворотах на угол $z\alpha$, где $z \in \mathbb{Z}$ и $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda q}{p}\right)$. Таким образом, нами получена следующая

Теорема 3. *Если λ^2 рационально, то угол $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda q}{p}\right)$ порождает группу поворотов с углами $z\alpha$, $z \in \mathbb{Z}$, совмещающих с собой множество рациональных направлений прямоугольной решетки, соответсвующей метрической квадратичной форме $x^2 + \lambda^2 y^2$.*

Напомним, что любой примитивный вектор решетки задает в ней рациональное направление. Однако рациональные направления можно задавать единичными векторами, выпущенными из одной и той же точки. Их концы расположены на единичной окружности с центром в этой точке. Любой их поворот задается вещественным числом $\frac{2\pi}{\alpha}$.

Не нарушая общности, мы будем считать, что $\lambda^2 \in \mathbb{N}$ и более подробно остановимся на следующих трех случаях: $\lambda^2 = 1$, $\lambda^2 = 3$ и $\lambda^2 = p_1 p_2 \dots p_k$, где сомножители p_i являются простыми при каждом $i = 1, 2, \dots, k$, $p_j \neq p_i$ при $j \neq i$ и $p_1 \neq 3$ при $k = 1$.

Случай $\lambda^2 = 1$. Все точки в $\mathbb{R}^2$ с целочисленными координатами в ортонормированном репере составляют квадратную решетку. Решетка обладает поворотом 4-го порядка (поворотом 2-го порядка обладает каждая решетка); поворот 3-го или 6-го порядка у нее отсутствует. Любой примитивный вектор решетки задает в ней рациональное направление. Множество всех рациональных направлений в квадратной решетке обладает поворотом 8-го порядка, см. выше. Более того, множество рациональных направлений произвольной центрировки квадратной решетки совпадает с множеством рациональных направлений самой квадратной решетки, значит, оно также обладает поворотом 8-го порядка. Поворотом 12-го порядка оно не обладает.

Так как в исходной квадратной решетке радиус-векторы точек (p, q) и $(-q, p)$ перпендикулярны и имеют одну и ту же длину, то они составляют основной репер квадратной подрешетки данной решетки. А так как множество рациональных направлений в решетке и подрешетке одно и то же, то оно совмещается с собой при тех же поворотах. Все остальные повороты, существующие по теореме 3, имеют бесконечный порядок. В итоге имеет место

Теорема 4. *Если $p, q \in \mathbb{N}$ и $q \neq p$, то число $u = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{q}{p}\right)$ иррационально.*

Случай $\lambda^2 = 3$. В случае метрической формы $x^2 + 3\,y^2$ центрированная прямоугольная решетка содержит не только вершины нормального разбиения на прямоугольники, но и центры всех этих прямоугольников. В итоге она является гексагональной решеткой. Она совмещается с собой поворотом 6-го порядка. Поэтому множество рациональных направлений в данной прямоугольной решетке обладает поворотом 6-го порядка. Оно обладает некристаллографическим поворотом 12-го порядка, см. выше. (В данной группе поворотов 12-го порядка поворот 2-го, 3-го или 6-го порядка является кристаллографическим, однако поворот 4-го порядка не является кристаллографическим, что вполне согласуется с [2].) Множество рациональных направлений произвольной центрировки этой прямоугольной решетки совпадает с множеством рациональных направлений самой прямоугольной решетки, значит, также обладает поворотом 12-го порядка. Поворотом 8-го порядка оно не обладает. Все остальные повороты имеют бесконечный порядок. Следовательно, имеет место

Теорема 5. *Пусть $p, q \in \mathbb{N}$ и $q \neq p \neq 3q$. Тогда число $v = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{q\sqrt{3}}{p}\right)$ является иррациональным.*

Случай $\lambda^2 = p_1 p_2 \dots p_k$. Здесь все p_i простые, $p_j \neq p_i$ при $j \neq i$ и $p_1 \neq 3$ при $k = 1$. При данном λ^2 прямоугольная решетка с метрической формой $x^2 + \lambda^2\,y^2$ (здесь, в частности, при $k = 1$ число λ^2 является простым, отличным от 3) обладает только поворотом 2-го порядка, значит, не обладает поворотом 3-го, 4-го или 6-го порядка. Множество рациональных направлений в этой прямоугольной решетке не обладает поворотом 8-го или 12-го порядка. То же самое можно сказать о множестве рациональных направлений произвольной центрировки рассматриваемой прямоугольной решетки. Все остальные повороты имеют бесконечный порядок. Следовательно, имеет место следующая

Теорема 6. *Пусть $p, q \in \mathbb{N}$ и $\lambda^2 = p_1 p_2 \dots p_k$, где все p_i простые и разные и $p_1 \neq 3$ при $k = 1$. Тогда число $w = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda q}{p}\right)$ является иррациональным.*

Заключение

Таким образом, если в плоской решетке нет двух неколлинеарных радиус-векторов, чьи длины соизмеримы, то решетка *косоугольная*. В любой другой плоской решетке имеются два ортогональных радиус-вектора. В ней может быть либо только одна пара ортогональных примитивных векторов (*особая* прямоугольная решетка), либо таких пар бесконечно много. В последнем случае угол между любыми двумя радиус-векторами решетки является углом поворота вокруг ее точки $O(0,0)$, совмещающим множество рациональных направлений решетки с собой. Среди них встречаются *общая* прямоугольная решетка (см. теорему 6) и произвольная ее центрировка (более густая рещетка — надрешетка прямоугольной подрешетки, см. [1]), а также два *частных* случая прямоугольной решетки и произвольных ее центрировок (см. теорему 4 и теорему 5). К ним относятся *квадратная* решетка и произвольная ее центрировка, а также *гексагональная* решетка и произвольная ее центрировка. В общем случае число λ^2 может принимать различные простые значения, отличные от 3. Во всех этих случаях множество рациональных направлений решетки обладает различными поворотами бесконечного порядка.

Все полученные таким образом бесконечные группы поворотов являются подгруппами одной из известных семи предельных групп Кюри, см. [3].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рышков С. С. Основы теории точечных решеток и систем Делоне. М.: Издательство МГУ, 2014. 142 с.

2. Гадолин А. В. Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала // Записки Императорского С.-Петербургского Минералогического Общества. Вторая серия. Часть четвертая. 1867. С. 112–200.

3. Шубников А. В., Копцик В. А. Симметрия в науке и искусстве. М.: Наука, 1972. 339 с.

REFERENCES

1. Ryshkov, S. S. 2014, "Fundamentals of the theory of point lattices and systems Delone" , *Moscow, Publishing house of the Moscow State University*, 142 p.

2. Gadolin, A. B. 1867, "Displays all crystallographic systems and their units of one common origin" , *Notes of the Imperial St. Petersburg Mineralogical Society.*, The second series. Part Four. pp. 112–200.

3. Shubnikov, A. V. & Koptsik, V. A. 1974. "Symmetry in Science and Art" Ed. by David Harker. *New York and London: Plenum Press.* 420 p.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Получено 08.05.2015