

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 4.

УДК: 510.635

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-212-223

Некоторые специальные случаи интерполяционной теоремы для интуиционистского исчисления предикатов

Д. А. Цибульский

Цибульский Дмитрий Алексеевич — аспирант, Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова РАН (г. Санкт-Петербург).

e-mail: cybulski@pdm.ras.ru

Аннотация

Заметка посвящена доказательству некоторых вариантов интерполяционной теоремы для интуиционистского исчисления предикатов без функциональных символов и равенства с интерполянтом специального вида. Наиболее интересен случай универсального хорновского интерполянта: аксиомы многих алгебраических систем задаются универсальными хорновскими формулами. Результаты, полученные в данной работе, могут быть полезны как с точки зрения теории доказательств, так и в приложениях, например, при решении задач искусственного интеллекта и разработке языков логического программирования. Заметка написана в духе теории доказательств, основным инструментом для решения задачи служат секвенциальные исчисления и такие техники преобразования выводов, как обращение применений правил вывода, перестановка применений правил по С. К. Клини и прополка по В. П. Орекову.

Заметка состоит из введения, разбитой на 3 параграфа основной части и заключения. Введение содержит краткий исторический обзор и обсуждение актуальности работы. В первом параграфе основной части вводятся необходимые определения и формулируется главный результат. Второй параграф посвящён описанию построенного В. П. Орековым секвенциального варианта интуиционистского исчисления предикатов **IGL**. Третий отведён доказательству основной теоремы. Заключение содержит обсуждение полученных результатов и краткий обзор перспектив дальнейшей работы.

Ключевые слова: интерполяционная теорема, интуиционистское исчисление предикатов, универсальный интерполянт, хорновский интерполянт.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Цибульский Д. А. Некоторые специальные случаи интерполяционной теоремы для интуиционистского исчисления предикатов // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 212–223.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 4.

UDC: 510.635

DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-212-223

Some special cases of the interpolation theorem for intuitionistic predicate calculus

D. A. Cybulski

Cybulski Dmitry Alekseevich — postgraduate student, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences (St. Petersburg).

e-mail: cybulski@pdmi.ras.ru

Abstract

The article proves some variants of the interpolation theorem for the intuitionistic predicate calculus without functional symbols and equality with a special-form interpolant. The most interesting case is the universal Horn interpolant: the axioms of many algebraic systems are given by universal Horn formulas. The results obtained in this work can be useful both from the point of view of proof theory and in applications, for example, when solving problems of artificial intelligence and developing logical programming languages. The article is written in the spirit of proof theory, the main tools are sequential calculus and such techniques for proof transforming as reversing the applications of inference rules, rearranging the applications of rules according to S. K. Kleene and weeding according to V. P. Orevkov.

The article consists of an introduction, the main part divided into 3 paragraphs, and a conclusion. The introduction contains a brief historical overview and discussion of the relevance of the work. In the first paragraph of the main part, the necessary definitions are introduced and the main result is formulated. The second paragraph is devoted to the description of the version of sequent intuitionistic predicate calculus **IGL** constructed by V. P. Orevkov. The third one is devoted to the proof of the main theorem. The conclusion contains a discussion of the results obtained and a brief overview of the prospects for further work.

Keywords: interpolation theorem, intuitionistic predicate calculus, universal interpolant, Horn interpolant.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

Cybulski, D. A. 2025, “Some special cases of the interpolation theorem for intuitionistic predicate calculus”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 212–223.

Светлой памяти Сергея Владимировича Востокова

1. Введение

Интерполяционная теорема — это утверждение следующего вида: Пусть секвенция $A \rightarrow B$ доказуема в исчислении **I**, причём выполнены некоторые *дополнительные условия*. Тогда существует формула C , все параметры которой общие для A и B и такая, что в **I** доказуемы секвенции $A \rightarrow C$ и $C \rightarrow B$. Формула C называется *интерполянт*ом формул A и B .

Говоря неформально, интерполяционная теорема означает следующее: если из формулы A выводима формула B , то формулы A и B имеют “общую часть” — интерполянт. Интерполянт выявляет структурные свойства формул, которые играют главную роль в доказательстве.

Для классической логики предикатов интерполяционная теорема была доказана У. Крейгом в 1957. Дополнительным условием теоремы Крейга стало наличие общего для A и B предикатного параметра (см. [1]). В 1959 Р. К. Линдон опубликовал доказательство усиленной интерполяционной теоремы для случая, когда секвенции $A \rightarrow$ и $\rightarrow B$ недоказуемы (см. [2]). В 1962 К. Шютте распространил интерполяционную теорему Крейга на интуиционистскую логику предикатов (см. [3]). Впоследствии интерполяционные теоремы были доказаны разными авторами и для других логик. Например, Л. Л. Максимовой были получены варианты интерполяционной теоремы для суперинтуиционистских и модальных логик (см. [4] и [5]).

Среди следствий интерполяционной теоремы, справедливых как в классическом, так и в интуиционистском случаях, упомянем теоремы Бета об определмости и Робинсона о непротиворечивости (см. [6]–[9]).

Данная заметка посвящена нескольким *специальным случаям* интерполяционной теоремы для интуиционистского исчисления предикатов без функциональных знаков и равенства. Накладывая ограничения на структуру формул A и B , можно доказать существование интерполянта специального вида. Такие утверждения полезны в теории доказательств и в её приложениях, таких как искусственный интеллект или логическое программирование. Некоторые результаты подобного вида для классической логики можно найти в статье [10] автора.

Работа написана в духе теории доказательств. Все представленные методы — синтаксические; понятие интерпретации не используется.

Определениям и формулировкам результатов работы посвящён параграф 2.1. В параграфе 2.2 описывается построенное В. П. Оревкиным интуиционистское исчисление предикатов **IGL**. Доказательства полученных результатов приведены в параграфе 2.3.

Автор рад возможности почтить память Сергея Владимировича Востокова, чьё влияние, как прямое, так и косвенное, ощущают несколько поколений выпускников и сотрудников кафедры высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета СПбГУ.

2. Основной результат

1. Определения и формулировки

Пусть V — вхождение подформулы в формулу A исчисления предикатов. Если V представлено самой формулой A , будем говорить, что V *входит в A положительно*. Пусть теперь A имеет один из следующих видов: $\forall xA'$, $\exists xA'$, $\neg A'''$, $(A' \vee A'')$, $(A' \& A'')$, $(A''' \supset A')$. Будем говорить, что V *входит в A положительно (отрицательно)*, если V входит в A' или в A'' положительно (отрицательно) либо в A''' отрицательно (положительно). *Положительные (отрицательные) вхождения подформулы в секвенцию* суть положительные (отрицательные) вхождения в заключение секвенции и отрицательные (положительные) вхождения в её посылки. *Знак вхождения логического символа в формулу (в секвенцию)* определяется как знак вхождения наименьшей содержащей его подформулы.

Пусть A и B — формулы исчисления предикатов без функциональных знаков и равенства. Формулу C будем называть *интерполянтом A и B* (по Линдону), если она удовлетворяет условиям:

- 1) Секвенция $A \rightarrow C$ доказуема в исчислении предикатов;
- 2) Секвенция $C \rightarrow B$ доказуема в исчислении предикатов;
- 3) В C входят положительно лишь те предикаты, что входят положительно как в A , так и в B ;

- 4) В C входят отрицательно лишь те предикаты, что входят отрицательно как в A , так и в B ;
- 5) В C входят свободно лишь общие для A и B свободные переменные.

Пусть $\circ$ — один из логических символов $\forall, \exists, \neg, \vee, \&, \supset$. Положительное (отрицательное) вхождение $\circ$ в формулу будем называть *вхождением типа $\circ^+$ (типа $\circ^-$)*. Пусть $\circ_1, \dots, \circ_n$ — список логических символов и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — список знаков. Формулу A мы будем называть *формулой типа $\{\circ_1^{\varepsilon_1}, \dots, \circ_n^{\varepsilon_n}\}$* , или *$\{\circ_1^{\varepsilon_1}, \dots, \circ_n^{\varepsilon_n}\}$ -формулой*, если A не содержит вхождений ни одного из типов $\circ_1^{\varepsilon_1}, \dots, \circ_n^{\varepsilon_n}$.

Следующие формулы имеют специальные названия:

- *позитивные* — формулы типа $\{\supset^+, \supset^-, \neg^+, \neg^-\}$;
- *хорновские* — формулы типа $\{\vee^+, \supset^-, \neg^-\}$;
- *универсальные* — предварённые формулы типа $\{\exists^+\}$;
- *экзистенциальные* — предварённые формулы типа $\{\forall^+\}$.

Сформулируем основной результат данной работы.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть A и B — предикатные формулы, не содержащие функциональных знаков. Допустим, что выполняются условия:

- 1) секвенция $A \rightarrow B$ доказуема в интуиционистском исчислении предикатов;
- 2) ни секвенция $A \rightarrow$, ни секвенция $\rightarrow B$ не доказуемы в интуиционистском исчислении предикатов.

Тогда имеют место следующие утверждения:

1. Предположим, что B — универсальная формула. Тогда существует универсальный интерполянт формул A и B .
2. Предположим, что B — формула типа $\{\forall^-, \exists^+, \exists^-\}$. Тогда существует $\{\forall^-, \exists^+, \exists^-\}$ -интерполянт формул A и B .
3. Предположим, что B — формула типа $\{\forall^-, \exists^+\}$. Тогда существует $\{\forall^-, \exists^+\}$ -интерполянт формул A и B .
4. Допустим, что выполняются следующие условия:
 - 1) A — формула типа $\{\forall^-, \exists^+\}$,
 - 2) каждая свободная переменная A является свободной переменной B .

Тогда существует $\{\forall^-, \exists^+\}$ -интерполянт формул A и B .

5. Предположим, что B — формула типа $\{\forall^-, \exists^+, \vee^+, \supset^-, \neg^-\}$. Тогда существует универсальный хорновский интерполянт формул A и B .
6. Допустим, что выполняются следующие условия:
 - 1) A — формула типа $\{\forall^-, \exists^+, \vee^+, \supset^-, \neg^-\}$,
 - 2) каждая свободная переменная A является свободной переменной B .

Тогда существует универсальный хорновский интерполянт формул A и B .

7. Допустим, что выполняются следующие условия:

- 1) A — хорновская формула,
- 2) B — формула типа $\{\forall^-, \exists^+\}$.

Тогда существует универсальный хорновский интерполянт формул A и B .

2. Исчисление IGL

Интуиционистское исчисление предикатов **IGL** было описано В. П. Оревковым в [11].

В дальнейшем посредством $\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma$ (возможно, с индексами и штрихами) мы будем обозначать (конечные) списки формул исчисления предикатов, а посредством A, B, C (возможно, с индексами и штрихами) — формулы исчисления предикатов. Выражение $[S]_t^x$ будет обозначать результат подстановки терма t вместо всех свободных вхождений переменной x в формулу или секвенцию S при условии, что терм t свободен для подстановки вместо свободных вхождений переменной x в S . Все рассматриваемые секвенции будут сингулярными, т.е. содержащими не более одной формулы в сукцеденте.

Аксиомы исчисления **IGL** — это секвенции вида

$$\Gamma_1, A, \Gamma_2 \rightarrow A.$$

Логические правила исчисления **IGL** имеют вид

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow (A \supset B)} \rightarrow \supset_1; \quad \frac{\Gamma, A \rightarrow (A \supset B)}{\Gamma \rightarrow (A \supset B)} \rightarrow \supset_2; \\ \frac{\Gamma_1, (A \supset B), \Gamma_2 \rightarrow A; \quad \Gamma_1, (A \supset B), \Gamma_2, B \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, (A \supset B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \supset \rightarrow; \\ \frac{\Gamma \rightarrow A; \quad \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow (A \& B)} \rightarrow \&; \\ \frac{\Gamma_1, (A \& B), \Gamma_2, A \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, (A \& B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \& \rightarrow_1; \quad \frac{\Gamma_1, (A \& B), \Gamma_2, B \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, (A \& B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \& \rightarrow_2; \\ \frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow (A \vee B)} \rightarrow \vee_1; \quad \frac{\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow (A \vee B)} \rightarrow \vee_2; \\ \frac{\Gamma_1, (A \vee B), \Gamma_2, A \rightarrow \Delta; \quad \Gamma_1, (A \vee B), \Gamma_2, B \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, (A \vee B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \vee \rightarrow; \\ \frac{\Gamma, A \rightarrow \neg A}{\Gamma \rightarrow \neg A} \rightarrow \neg; \quad \frac{\Gamma_1, \neg A, \Gamma_2 \rightarrow A}{\Gamma_1, \neg A, \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \neg \rightarrow; \\ \frac{\Gamma \rightarrow [A]_a^x}{\Gamma \rightarrow \forall x A} \rightarrow \forall; \quad \frac{\Gamma_1, \forall x A, \Gamma_2, [A]_t^x \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, \forall x A, \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \forall \rightarrow; \\ \frac{\Gamma \rightarrow [A]_t^x}{\Gamma \rightarrow \exists x A} \rightarrow \exists; \quad \frac{\Gamma_1, \exists x A, \Gamma_2, [A]_a^x \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, \exists x A, \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \exists \rightarrow. \end{array}$$

Структурное правило *сечения* исчисления **IGL** имеет вид

$$\frac{\Gamma \rightarrow A; \quad \Gamma, A \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta}.$$

В правилах $\rightarrow \forall$ и $\exists \rightarrow$ исчисления **IGL** переменная a не входит свободно в формулы заключения правила.

Переменную a в применении L правила $\rightarrow \forall$ или $\exists \rightarrow$ называют *собственной переменной применения правила L* .

Терм t в применении L правила $\forall \rightarrow$ или $\rightarrow \exists$ называют *собственным термом применения правила L* .

Пусть L — одно из правил исчисления **IGL**. Вхождения формул в посылку L , преобразуемые L , называют *боковыми вхождениями применения правила L* . Антецедентное боковое вхождение лежит в посылке L непосредственно перед $\rightarrow$. Вхождение формулы в заключении L , в которое L преобразует боковые вхождения, называют *главным вхождением применения правила L* . Формулу, которой представлено главное или боковое вхождение применения L , называют соответственно *главной* или *боковой формулой применения L* .

Вхождения формулы A в сукцедент и в антецедент аксиомы S исчисления **IGL** называют *главными вхождениями аксиомы S* , а формулу A — *главной формулой аксиомы S* .

В секвенциальных исчислениях части одних секвенций в доказательствах преобразуются в части других секвенций. Чтобы корректно описывать такие переходы, С. К. Клини разработал язык отношений родства в доказательствах. Мы будем пользоваться этой терминологией (см. [8]). В частности, вхождение V формулы в доказательство D в качестве члена секвенции (в качестве подформулы) называется *потомком (образом) вхождения W формулы в D в качестве члена секвенции (в качестве подформулы)*, если W преобразуется применениями правил вывода в V . В этом случае W называется *предком (прообразом) вхождения V* .

Отметим некоторые свойства исчисления **IGL**.

Доказательство D называется *регулярным*, если главные формулы всех аксиом в D элементарны. Всякая доказуемая в **IGL** секвенция, очевидно, обладает регулярным доказательством.

Будем говорить, что вхождение формулы в доказательство *прослеживается до аксиом*, если среди предков этого вхождения есть главное вхождение аксиомы. Доказательство D называется *прополотым*, если все боковые вхождения применений правил вывода в D прослеживаются до аксиом. Всякая доказуемая в **IGL** секвенция обладает прополотым доказательством (см. [12]).

Пусть D — регулярное доказательство в исчислении **IGL** секвенции

$$\Gamma \rightarrow \forall x A.$$

Индукцией по высоте доказательство D , не увеличивая высоты, можно перестроить в регулярное доказательство секвенции

$$\Gamma \rightarrow [A]_a^x,$$

где переменная a не входит в секвенции D ни свободно, ни связано.

Таким образом, все применения в D правила $\rightarrow \forall$, образы главных вхождений которых совпадают с вхождением $\forall x A$, перемещаются к последней секвенции доказательства.

Заметим, что в D могут применяться сечения. Аналогично можно построить алгоритм обращения правил $\exists \rightarrow$ и $\rightarrow \neg$.

Пусть D — регулярное доказательство в исчислении **IGL** секвенции

$$\Gamma_1, (A \& B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta.$$

Индукцией по высоте доказательство D можно перестроить в регулярное доказательство секвенции

$$\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \rightarrow \Delta.$$

Аналогично можно построить алгоритм обращения правила $\rightarrow \supset$.

Пусть D — регулярное доказательство в исчислении **IGL** секвенции

$$\Gamma \rightarrow (A \& B).$$

Индукцией по высоте доказательство D можно перестроить в регулярное доказательство секвенции

$$\Gamma \rightarrow A$$

и в регулярное доказательство секвенции

$$\Gamma \rightarrow B.$$

Аналогично можно построить алгоритм обращения правила $\vee \rightarrow$.

Аналогичного алгоритма обращения правил $\supset \rightarrow$, $\rightarrow \vee$, $\neg \rightarrow$, $\rightarrow \exists$ и $\forall \rightarrow$ построить нельзя.

Более подробно обратимость правил секвенциальных исчислений доказывается, например, в [13].

Для исчисления **IGL** справедлива основная теорема Г. Генцена: всякая доказуемая секвенция может быть доказана без использования правила сечения (см. [14]).

С. К. Клини была доказана теорема о перестановочности применений правил вывода в секвенциальных исчислениях (см. [15]). Для наших нужд подойдёт следующая её формулировка:

*Пусть D — доказательство секвенции S в исчислении **IGL** и пусть $X \uplus Y$ — такое разбиение множества вхождений логических символов секвенции S , что*

- *Если $L \in Y$ — вхождение логического символа, находящееся в области действия вхождения L' , то $L' \in Y$.*
- *Если L/L' входит в приведённый ниже список исключённых пар правил и $L' \in X$, то $L \in Y$ (если только L' не находится в области действия L):*

$$\frac{\forall \rightarrow}{\rightarrow \forall}, \quad \frac{\forall \rightarrow \text{ или } \rightarrow \exists}{\exists \rightarrow}, \quad \frac{\supset \rightarrow \text{ или } \neg \rightarrow}{\rightarrow \supset_2 \text{ или } \rightarrow \neg}, \quad \frac{\supset \rightarrow, \rightarrow \vee_1, \rightarrow \vee_2, \neg \rightarrow \text{ или } \rightarrow \exists}{\vee \rightarrow}.$$

Тогда применения логических правил в D можно, не изменяя заключительной секвенции, переставить так, что применения логических правил, принадлежащие вхождениям логических символов из X , будут выше применений правил, принадлежащих вхождениям логических символов из Y .

3. Доказательство основной теоремы

По сравнению с классической логикой, в интуиционистской меньше обратимых правил и больше исключений в теореме Клини. Во многих интересных случаях данное обстоятельство делает невозможным прямой перенос методов, использованных в [10], в интуиционистский контекст. В таких ситуациях мы будем модифицировать процесс построения интерполянта из доказательства леммы 1, восходящей к С. Маэхаре и Г. Такеути (см. [16] и [17]).

Пусть D — доказательство секвенции $E \rightarrow F$ в исчислении **IGL**. *EF-аксиомой* в D называется вхождение аксиомы, одно из главных вхождений которого является предком формулы E , а второе — формулы F в заключительной секвенции. *E-аксиомой* (*F-аксиомой*) в D называется вхождение аксиомы, оба главных вхождения которого являются предками формулы E (формулы F) в заключительной секвенции. Применение логического правила вывода в D называется *E-применением* (*F-применением*), если принадлежит формуле E (формуле F) в заключительной секвенции. В записи $\Gamma_E, \Gamma_F \rightarrow \Delta_E, \Delta_F$ секвенции S в D посредством Γ_E, Δ_E (посредством Γ_F, Δ_F) будем обозначать *E-часть S* (*F-часть S*) — список членов S , являющихся предками E (предками F) в заключительной секвенции. *E-часть* (*F-часть*) доказательства D получается «стиранием» *F-частей* (*E-частей*) всех секвенций в D . Конечно, ни *E-часть*, ни *F-часть* D доказательствами быть не обязаны, однако, проведя несложные «восстановительные работы», их можно достроить до полноценных выводов.

ЛЕММА 1. *Дано доказательство D секвенции $E \rightarrow F$ в исчислении **IGL** без функциональных знаков. Для любой секвенции $S : \Gamma_E, \Gamma_F \rightarrow \Delta_E, \Delta_F$ в D , где $|\Delta_E, \Delta_F| < 2$, имеет место одна из следующих возможностей:*

1. Над вхождением S в D есть EF -аксиомы и

- (а) $|\Delta_E| = 1$. Тогда существует такая формула C , что в **IGL** доказуемы секвенции $C, \Gamma_E \rightarrow \Delta_E$ и $\Gamma_F \rightarrow C$ и все параметры C — общие для Γ_E, Δ_E и Γ_F .
- (б) $|\Delta_E| = 0$. Тогда существует такая формула C , что в **IGL** доказуемы секвенции $\Gamma_E \rightarrow C$ и $C, \Gamma_F \rightarrow \Delta_F$ и все параметры C — общие для Γ_E и Γ_F, Δ_F .

2. Над вхождением S в D есть лишь E -аксиомы. Тогда в **IGL** доказуема секвенция $\Gamma_E \rightarrow \Delta_E$.

3. Над вхождением S в D есть лишь F -аксиомы. Тогда в **IGL** доказуема секвенция $\Gamma_F \rightarrow \Delta_F$.

Исчерпывающе подробное доказательство аналога леммы 1 для классического исчисления можно найти в книге Клини (см. теорему 40 в [8]). Сохранив обозначения и терминологию Клини, внесём необходимые корректировки и адаптируем доказательство под наши цели.

(2b) Вхождения аксиом вида $\Gamma_{1E}, \Gamma_{1F}, A_F, \Gamma_{2E}, \Gamma_{2F} \rightarrow A_E$ переходят в $A, \Gamma_{1E}, \Gamma_{2E} \rightarrow A_E$ в E -части и в $\Gamma_{1F}, A_F, \Gamma_{2F} \rightarrow A$ в F -части с A в роли интерполянта.

(5a) Рассмотрим E -применение L однопосылочного пропозиционального правила с EF -посылкой. Пусть C_1 — интерполянт посылки. Лемма утверждает существование интерполянта C заключения.

А. Пусть L — применение правила $\neg \rightarrow$, не содержащее E -формулы в сукцеденте заключения. Тогда $C = \neg C_1$.

В. В остальных случаях $C = C_1$.

Аналогично рассматривается E -применение правила $\rightarrow \forall$ или $\exists \rightarrow$ с EF -посылкой.

(7a) Рассмотрим E -применение L двухпосылочного пропозиционального правила с EF -посылкой и E -посылкой. Пусть C_1 — интерполянт EF -посылки. Лемма утверждает существование интерполянта C заключения.

А. Пусть L — применение правила $\supset \rightarrow$ с левой EF -посылкой и правой E -посылкой, причём сукцедент заключения L не содержит E -формулы. Тогда $C = \neg C_1$.

В. В остальных случаях $C = C_1$.

(8a) Рассмотрим E -применение L двухпосылочного правила с двумя EF -посылками. Пусть C_1 и C_2 — интерполянты посылок. Лемма утверждает существование интерполянта C заключения.

А. Пусть L — применение правила $\supset \rightarrow$ или $\vee \rightarrow$ с E -формулой в сукцеденте заключения или правила $\rightarrow \&$. Тогда $C = (C_1 \& C_2)$.

В. Пусть L — применение правила $\supset \rightarrow$, не содержащее E -формулы в сукцеденте заключения. Тогда $C = (C_1 \supset C_2)$.

С. Пусть L — применение правила $\vee \rightarrow$, не содержащее E -формулы в сукцеденте заключения. Тогда $C = (C_1 \vee C_2)$.

(9a) Рассмотрим такое E -применение L правила $\forall \rightarrow$ с EF -посылкой, что собственная переменная u этого применения не содержится в E -части заключения L , однако входит свободно в интерполянт $[C_1]_u^x$ посылки. Лемма утверждает существование интерполянта C заключения.

А. Пусть сукцедент заключения L содержит E -формулу. Тогда $C = \exists x C_1$.

В. В противном случае $C = \forall x C_1$.

Доказательство леммы 2 для интуиционистского исчисления ничем не отличается от классического случая (см. [10]).

ЛЕММА 2. Пусть D — регулярное прополотое доказательство без сечений в исчислении **IGL** секвенции $A \rightarrow B$, в котором выше применений правил, принадлежащих A , нет применений правил, принадлежащих B .

Предположим, что $S_1, \dots, S_k$ — список всех “средних” секвенций доказательства D . Выше S_i нет применений, принадлежащих B , а ниже нет применений, принадлежащих A . Секвенция S_i имеет вид

$$A, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i.$$

В поддоказательстве секвенции S_i не прослеживаемы до аксиом вхождения формулы B и неэлементарных формул списков Σ_i и Π_i . Удалив в поддоказательстве секвенции S_i не прослеживаемые до аксиом вхождения формул, получим доказательство секвенции

$$A, \Sigma'_i \rightarrow \Pi'_i,$$

где Σ'_i и Π'_i — подписки элементарных формул списков Σ_i и Π_i .

Тогда интерполянт формул A и B является универсальная хорновская формула

$$C = \forall \bar{x} \& \bigvee_{i=1}^k (\& \Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i),$$

где $\bar{x}$ — список переменных, которые входят свободно в формулу B или в формулу списка $\Sigma_1, \Pi_1, \Sigma_2, \Pi_2, \dots, \Sigma_k, \Pi_k$, но не входят свободно в A .

Перейдём к доказательству основной теоремы. Мы будем рассматривать лишь регулярные прополотые доказательства без сечений.

1. Спустим применения обратимого правила $\rightarrow \forall$, принадлежащие B , к доказываемой секвенции. Пусть все B -применения правила $\rightarrow \forall$ — и только они — лежат в полученном доказательстве ниже секвенции $A \rightarrow B'$. Применим алгоритм из леммы 1 к подвыводу $A \rightarrow B'$, исключив, однако, пункты (9a), (9b), (10a) и (10b), т.е. не используя кванторные правила при построении «интерполянта». Мы получим доказательства секвенций $A \rightarrow C'$ и $C' \rightarrow B'$, где C' — бескванторная формула, удовлетворяющая всем требованиям к интерполянту, кроме, может быть, ограничения на переменные (мы готовы утверждать лишь, что $FV(C') \subseteq FV(B')$; в силу этого факта ограничения на собственные переменные применений $\rightarrow \forall$ и $\exists \rightarrow$ в A -части удовлетворены). Пусть $\bar{x}$ — список всех свободных переменных C' , не входящих свободно хотя бы в одну из формул A и B . Тогда $C = \forall \bar{x} C'$ — универсальный интерполянт A и B .
2. Как и в доказательстве 1, исключим пункты (9a), (9b), (10a) и (10b) из процесса построения «интерполянта». При этом могут оказаться нарушенными ограничения на собственные переменные применений правила $\rightarrow \forall$ в B -части. Рассмотрим верхнее из таких применений. Пусть соответствующее применение в исходном доказательстве имеет вид

$$L : \frac{\Gamma_A, \Gamma_B \rightarrow [B']_a^x}{\Gamma_A, \Gamma_B \rightarrow \forall x B'}.$$

Восстановив A -часть и B -часть вывода посылки L , получим доказательства секвенций

$$\Gamma_A \rightarrow [C']_a^x; \quad [C']_a^x, \Gamma_B \rightarrow [B']_a^x.$$

Все положительные и отрицательные предикатные параметры формулы $[C']_a^x$ — общие для формул $\&\Gamma_A$ и $\&\Gamma_B \supset [B']_a^x$; также $\text{FV}([C']_a^x) \subseteq \text{FV}(\&\Gamma_B \supset [B']_a^x)$ и $a \notin \text{FV}(\&\Gamma_A)$; наконец, $[C']_a^x$ есть $\{\forall^-, \exists^+, \exists^-\}$ -формула. Очевидно, что $\{\forall^-, \exists^+, \exists^-\}$ -формула $\forall x C'$ удовлетворяет определению «интерполянта» формул $\&\Gamma_A$ и $\&\Gamma_B \supset \forall x B'$ с ослабленными ограничениями на переменные. Прделаав эту процедуру для всех B -применений $\rightarrow \forall$ в D , получим доказательства секвенций $A \rightarrow C''$ и $C'' \rightarrow B$, где C'' есть $\{\forall^-, \exists^+, \exists^-\}$ -«интерполянт» формул A и B . Для превращения C'' в искомый $\{\forall^-, \exists^+, \exists^-\}$ -интерполянт остаётся связать всеобщностью все свободные переменные, не содержащиеся в A .

3. Аналогично 2, однако наряду с применениями $\rightarrow \forall$ в B -части следует рассматривать применения $\exists \rightarrow$. Они могут дать вхождения типа $\exists^-$ в интерполянт.
4. Исключим пункты (9b) и (10b) из процесса построения «интерполянта». Пусть над секвенцией $\Gamma_A, \Gamma_B \rightarrow \Delta_A, \Delta_B$ (здесь $|\Delta_A, \Delta_B| < 2$) в доказательстве $A \rightarrow B$ есть AB -аксиомы. При нашей модификации интерполяционного процесса мы можем утверждать следующее:

- (a) Если $|\Delta_A| = 1$, то существует такая формула C' , что в **IGL** доказуемы секвенции $C', \Gamma_A \rightarrow \Delta_A$ и $\Gamma_B \rightarrow C'$, все предикатные параметры C' — общие для Γ_A, Δ_A и Γ_B и все свободные переменные C' входят свободно в формулы списка Γ_A, Δ_A .
- (b) Если $|\Delta_A| = 0$, то существует такая формула C' , что в **IGL** доказуемы секвенции $\Gamma_A \rightarrow C'$ и $C', \Gamma_B \rightarrow \Delta_B$, все предикатные параметры C' — общие для Γ_A и Γ_B, Δ_B и все свободные переменные C' входят свободно в формулы списка Γ_A .

Поскольку все свободные переменные A входят свободно в B , в конце мы получим искомый $\{\forall^-, \exists^+\}$ -интерполянт A и B .

5. В доказательстве секвенции $A \rightarrow B$ формуле B не принадлежат применения правил $\forall \rightarrow, \rightarrow \exists, \rightarrow \vee, \supset \rightarrow$ и $\neg \rightarrow$. Таким образом, все правила, принадлежащие B , обратимы. Спустим применения правил, принадлежащие B , к доказываемой секвенции. По лемме 2 универсальная хорновская формула

$$\forall \bar{x} \& (\&\Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i)$$

есть интерполянт A и B .

6. Разобьём множество применений правил вывода на два класса: к «верхнему» отнесём принадлежащие вхождению A в заключительную секвенцию, к «нижнему» — те, что принадлежат вхождению B . Заметим, что вхождению A в заключительную секвенцию не принадлежат применения правил $\rightarrow \forall, \exists \rightarrow, \vee \rightarrow, \rightarrow \supset$ и $\rightarrow \neg$. Таким образом, мы можем перестроить доказательство секвенции $A \rightarrow B$ в соответствии с разбиением. По лемме 2 универсальная хорновская формула

$$\forall \bar{x} \& (\&\Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i)$$

будет интерполянтом A и B .

7. Разобьём множество применений правил вывода аналогично 6. Поскольку доказательство не содержит ни A -применений правил $\vee \rightarrow, \rightarrow \supset$ и $\rightarrow \neg$, ни B -применений правил $\forall \rightarrow$ и $\rightarrow \exists$, мы можем перестроить доказательство в соответствии с разбиением. По лемме 2 универсальная хорновская формула

$$\forall \bar{x} \& (\&\Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i)$$

будет интерполянтом A и B .

3. Заключение

Нами получен ряд достаточных условий существования интерполянтов специального вида: универсального, обобщённо-универсального и универсального хорновского. Мы показали, что интерполянт во многих случаях сохраняет структурные свойства интерполируемых формул. Дальнейшая работа по теме может состоять как в более глубоком исследовании этой структурной связи, так и в приложении полученных результатов к нуждам теории доказательств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Craig W. Linear Reasoning. A New Form of the Herbrand–Gentzen Theorem // Journal of Symbolic Logic. — 1957. — Vol. 22. — P. 250–268.
2. Lyndon R. C. An Interpolation Theorem in the Predicate Calculus // Pacific Journal of Mathematics. — 1959. — Vol. 9. — P. 129–142.
3. Schütte K. Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikatenlogik // Mathematische Annalen. — 1962. — Vol. 148. — P. 192–200.
4. Максимова Л. Л. Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 6. — С. 643–681.
5. Maksimova L. On Variable Separation in Modal and Superintuitionistic Logics // Studia Logica. — 1995. — Vol. 55. — P. 99–112.
6. Beth E. W. On Padoa’s Method in the Theory of Definition // Indagationes Mathematicae. — 1953. — Vol. 56. — P. 330–339.
7. Robinson A. A Result of Consistency and Its Application to the Theory of Definition // Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Proceedings. Series A. — 1956. — Vol. 59. — P. 47–58.
8. Kleene S. C. Mathematical Logic. — New York: John Wiley & Sons, 1967. — 394–441 p.
9. Troelstra A. S., Schwichtenberg H. Basic Proof Theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000. — 116–126 p.
10. Цибульский Д. А. Специальные случаи интерполяционной теоремы для классического исчисления предикатов // Чебышевский сборник. — 2024. — Т. 25, № 2. — С. 222–234.
11. Оревков В. П. Верхние оценки удлинения выводов при устранении сечений // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1984. — Т. 137. — С. 87–98.
12. Оревков В. П. О гливенковских классах секвенций // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 1976. — Т. 98. — С. 131–154.
13. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. — М.: Наука, 1987. — 209–214 с.
14. Gentzen G. Untersuchungen über das logische Schließen. I, II // Mathematische Zeitschrift. — 1934. — Vol. 39. — P. 176–210, 405–443.
15. Kleene S. C. Permutability of Inferences in Gentzen’s Calculi LK and LJ // Memoirs of the American Mathematical Society. — 1952. — Vol. 10. — P. 1–26.

16. Maehara S. On the Interpolation Theorem of Craig // Sugaku. — 1960. — Vol. 12. — P. 235–237.
17. Maehara S., Takeuti G. A Formal System of First-order Predicate Calculus With Infinitely Long Expressions // Journal of the Mathematical Society of Japan. — 1961. — Vol. 13. — P. 357–370.

REFERENCES

1. Craig, W., 1957, “Linear Reasoning. A New Form of the Herbrand–Gentzen Theorem”, *Journal of Symbolic Logic*, 22, pp. 250–268.
2. Lyndon, R.C., 1959, “An Interpolation Theorem in the Predicate Calculus”, *Pacific Journal of Mathematics*, 9, pp. 129–142.
3. Schütte, K., 1962, “Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikatenlogik”, *Mathematische Annalen*, 148, pp. 192–200.
4. Maksimova, L.L., 1977, “Craig’s Theorem for Superintuitionistic Logics and Amalgamated Varieties of Pseudo-Boolean Algebras”, *Algebra and Logic*, 16(6), pp. 643–681.
5. Maksimova, L.L., 1995, “On Variable Separation in Modal and Superintuitionistic Logics”, *Studia Logica*, 55, pp. 99–112.
6. Beth, E.W., 1953, “On Padoa’s Method in the Theory of Definition”, *Indagationes Mathematicae*, 56, pp. 330–339.
7. Robinson, A., 1956, “A Result of Consistency and Its Application to the Theory of Definition”, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Proceedings. Series A*, 59, pp. 47–58.
8. Kleene, S.C., 1967, *Mathematical Logic*, New York: John Wiley & Sons, pp. 394–441.
9. Troelstra, A.S., and Schwichtenberg, H., 2000, *Basic Proof Theory*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 116–126.
10. Cybulski, D.A., 2024, “Special Cases of the Interpolation Theorem for Classical Predicate Calculus”, *Chebyshevskii Sbornik*, 25(2), pp. 222–234.
11. Orevkov, V.P., 1984, “Upper Bounds of Inference Elongation When Eliminating Cuts”, *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 137, pp. 87–98.
12. Orevkov, V.P., 1976, “On Glivenko’s Classes of Sequents”, *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*, 98, pp. 131–154.
13. Ershov, Yu.L., and Paliutin, E.A., 1987, *Mathematical Logic*, Moscow: Nauka, pp. 209–214.
14. Gentzen, G., 1934, “Untersuchungen über das logische Schließen. I, II”, *Mathematische Zeitschrift*, 39, pp. 176–210, 405–443.
15. Kleene, S.C., 1952, “Permutability of Inferences in Gentzen’s Calculi LK and LJ”, *Memoirs of the American Mathematical Society*, 10, pp. 1–26.
16. Maehara, S., 1960, “On the Interpolation Theorem of Craig”, *Sugaku*, 12, pp. 235–237.
17. Maehara, S., and Takeuti, G., 1961, “A Formal System of First-order Predicate Calculus With Infinitely Long Expressions”, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 13, pp. 357–370.

Получено: 20.06.2025

Принято в печать: 17.10.2025