ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 4.

УДК: 512.623 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-139-148

Топологические свойства множеств и колец сходимости многомерного полного поля

А. И. Мадунц, К. И. Пименов

Мадунц Александра Игоревна — кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: madunts@mail.ru
Пименов Константин Игоревич — кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: k.pimenov@spbu.ru

Аннотация

Статья продолжает цикл работ первого автора, посвящённых сходимости последовательностей и рядов в многомерных локальных и полных полях.

Многомерные поля представляют собой цепочку дискретно нормированных полей, в которой каждое следующее – поле вычетов предыдущего. В итоге элементы записываются в виде ряда, причем при использовании стандартной топологии дискретного нормирования ряды, определяющие элементы поля, не обязательно будут сходиться. Поэтому на многомерных полных полях используют сложно сконструированную топологию Паршина, учитывающую топологии полей вычетов (см. [15], [5] и [6]). В ней ряды всех элементов многомерного поля сходятся. Однако и в топологии Паршина не выполнено другое важное свойство – сходимость всех степенных рядов с коэффициентами из кольца целых при подстановке вместо переменной элемента максимального идеала.

В [9] первым автором введено понятия множества сходимости – то есть такого, что ряд с коэффициентами из этого множества сходится на максимальном идеале, и доказан критерий множества сходимости. В [10] множества сходимости исследуются при помощи их мультииндексов, составляющих моноид сходимости, а в [8] конструируются кольца, являющиеся множествами сходимости, и изучаются некоторые их свойства.

В данной работе выясняется, что аддитивный сдвиг множества сходимости дает множество сходимости, что любое множество сходимости секвенциально замкнуто и что сходящаяся последовательность всегда составляет множество сходимости. Эти утверждения в качестве следствия дают удобное для применения достаточное условие того, что последовательность является бесконечно малой, а также позволяют построить кольцо сходимости, которому принадлежит предел сходящейся последовательности и все ее члены.

Ключевые слова: многомерные полные поля, топология Паршина, множество сходимости, кольцо сходимости.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Мадунц А. И., Пименов К. И. Топологические свойства множеств и колец сходимости многомерного полного поля // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 139–148.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 4.

UDC: 512.623 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-139-148

Topological properties of sets and convergence rings of a multidimensional complete field

A. I. Madunts, K. I. Pimenov

Madunts Alexandra Igorevna — candidate of physical and mathematical sciences, Saint Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: madunts@mail.ru
Pimenov Konstantin Igorevich — candidate of physical and mathematical sciences, Saint Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: k.pimenov@spbu.ru

Abstract

This article continues the series of works by the first author on the convergence of sequences and series in multidimensional local and complete fields.

Multidimensional fields are a chain of discretely normalized fields, where each subsequent field is the residue field of the previous one. As a result, the elements are represented as a series, and when using the standard topology of discrete normalization, the series defining the elements of the field may not necessarily converge. Therefore, on multidimensional complete fields, a complexly constructed Parshin topology is used, taking into account the topologies of the residue fields (see [15], [5], and [6]). In this topology, the series of all elements of the multidimensional field converge. However, another important property is not satisfied in the Parshin topology, which is the convergence of all power series with coefficients from the ring of integers when the element of the maximal ideal is substituted for the variable.

In [9] by the first author the concept of a convergence set is introduced, which is a set such that a series with coefficients from this set converges on a maximal ideal, and a criterion for a convergence set is proved. In [10], convergence sets are studied using their multi-indices, which form a convergence monoid, and in [8], rings that are convergence sets are constructed and their properties are studied.

In this work, it is shown that the additive shift of a convergence set gives a convergence set, that any convergence set is sequentially closed, and that a convergent sequence always forms a convergence set. These statements provide a convenient sufficient condition for a sequence to be infinitesimal and allow the construction of a convergence ring that contains the limit of a convergent sequence and all its members.

Keywords: multidimensional complete fields, Parshin topology, convergence set, convergence ring.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Madunts, A. I., Pimenov, K. I. 2025, “Topological properties of sets and convergence rings of a multidimensional complete field”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 139–148.

Статья посвящена памяти
любимого Учителя и незабываемого коллеги
Сергея Владимировича Востокова

1. Введение

Полное дискретно нормированное поле $K = K_n (n \geqslant 1)$ называют n-мерным полным, если его поле вычетов K_{n-1} является $(n-1)$-мерным полным полем, причем под 0-мерным полным полем K_0 подразумевают совершенное. В частном случае конечного K_0 поле K называется многомерным локальным.

Далее K – многомерное полное поле (базовые сведения о многомерных полных полях изложены, например, в [5]).

1 Определение. Число $s = s(K)$ такое, что $charK_s \neq charK_{s-1}$, назовем инерционным числом поля K. Если $charK = charK_0$, положим $s(K) = 0$.

При $s \geqslant 1$ обозначим F_0 поле частных кольца векторов Витта над K_0.

Как обычно, $F((T))$ – поле рядов Лорана со стандартным нормированием. В случае, когда поле F полно относительно дискретного нормирования w, под $F\{\{t\}\}$ подразумеваются ряды Паршина

$$F\{\{t\}\} = \left\{ \alpha = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i t^i : c_i \in F,\ \inf_i w(c_i) > -\infty,\ \lim_{i\to-\infty} w(c_i) = +\infty \right\},$$

которые относительно нормирования $v(\alpha) = \inf_i w(c_i)$ образуют полное дискретно нормированное поле с полем вычетов $\overline{F}((\bar{t}))$ (см. [14], [13], [15]).

Приведем структурную теорему для многомерных полных полей (см. [13], [4]).

Теорема 2. *Пусть $K = K_n$ – n-мерное полное поле.*

1. Если $s(K) = 0$, то $K \cong K_0((t_1))\dots((t_n))$.

2. Если $s(K) = 1$, то $K \cong k((t_2))\dots((t_n))$, причем $k = K_1$ – конечное вполне разветвленное расширение поля F_0.

3. Если $2 \leqslant s(K) \leqslant n$, то K является конечным вполне разветвленным расширением поля $F\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{s-1}\}\}((t_{s+1}))\dots((t_n))$, где F – конечное вполне разветвленное расширение F_0 и $s = s(K)$. Кроме того, K имеет конечное расширение вида $L\{\{T_1\}\}\dots\{\{T_{s-1}\}\}((T_{s+1}))\dots((T_n))$, полученное добавлением элемента, алгебраического над F_0, где L – конечное расширение F_0.

Многомерные полные поля вида $F\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{s-1}\}\}((t_{s+1}))\dots((t_n))$, где F совершенно, назовем стандартными (включая случаи $s = 0, s = 1$).

Для краткости обозначим

$$\vec{r}_i = (r_{i+1}, \dots, r_n), \vec{t}_i^{\,\vec{r}_i} = t_{i+1}^{r_{i+1}} \dots t_n^{r_n}, \vec{0} = (0, \dots, 0), \vec{e}^{\,(i)} = (0, \dots, 1, \dots, 0),$$

причем $\vec{r}_0 = \vec{r}$.

На $\mathbb{Z}^n$ используется следующее лексикографическое упорядочивание: если при некотором $1 \leqslant i \leqslant n$ верно $\vec{r}_i^{\,(1)} = \vec{r}_i^{\,(2)}, r_i^{(1)} < r_i^{(2)}$, полагаем $\vec{r}^{\,(1)} < \vec{r}^{\,(2)}$. Введем также обозначения

$$\mathbb{Z}^n_{>0} = \{\vec{r} \in \mathbb{Z}^n : \vec{r} > \vec{0}\}, \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} = \{\vec{r} \in \mathbb{Z}^n : \vec{r} \geqslant \vec{0}\}.$$

Набор $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n)$ называется системой локальных параметров поля K, если t_n – униформизующая поля K_n относительно нормирования v_n, далее $t_i (1 \leqslant i \leqslant n-1)$ – единицы в K_n, классы вычетов которых в K_{n-1}, ..., K_{i+1} являются единицей, а в K_i униформизующей.

Стандартное n-мерное нормирование имет вид $\vec{v} = (v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$, где

$$v^{(i)}(a) = v_{K_i}\left(\overline{a\vec{t}_i^{\,\vec{r}_i}}\right), \vec{r}_i = -(v^{(i+1)}(a), \dots, v^{(n)}(a)), a \neq 0$$

(надчеркивание обозначает вычет).

Множество $\mathcal{O} = \{a \in K : \vec{v}(a) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}\}$ образует не зависящее от выбора локальных параметров локальное кольцо, называемое кольцом целых нормирования. Его единственным максимальным идеалом является $\wp = \{\, a \in K : \vec{v}(a) \in \mathbb{Z}^n_{>0}\}$.

3 Определение. Набор мультииндексов $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ называется допустимым, если существует такое I_n, что для всех $\vec{r} = (r_1 \dots r_n) \in \Omega$ верно $r_n \geqslant I_n$, и при $i = n-1, \dots, 1$ для любого $\vec{r_i}$ существует $I(\vec{r_i}) \in \mathbb{Z}$ такое, что если $\vec{r} = (r_1 \dots r_i \vec{r_i}) \in \Omega$, то $r_i \geqslant I(\vec{r_i})$.

4 Определение. Для допустимого набора $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ при каждом $\vec{r_i}$ величины

$$\omega_i(\vec{r_i}) = \sup I(\vec{r_i}) = \inf_{(r_1,\dots,r_{i-1},l_i,\vec{r_i})\in\Omega} l_i$$

назовем соответствующими характеристическими индексами.

Таким образом, $\omega_i(\vec{r_i}) \in \hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, причем $\omega_i(\vec{r_i}) = +\infty$ означает, что в Ω отсутствуют мультииндексы с окончанием $\vec{r_i}$.

Пусть B – полная система представителей ненулевых элементов K_0 в K, а $\vec{t}$ – система локальных параметров. Тогда любое $a \in K^*$ представляется в виде ряда

$$a = \sum_{\vec{r}\in\Omega(a)} a_{\vec{r}}\, \vec{t}^{\,\vec{r}}, a_{\vec{r}} \in B,$$

где $\Omega(a)$ – допустимый набор. Если в качестве B выбрать мультипликативные представители последнего поля вычетов в сочетании с естественным вложением констант в ряды Лорана (причем в B тогда входят ± 1), данное представление будет единственно (см. [5],[6]).

Далее берем именно это B.

5 Определение. Назовем $\Omega(a)$ допустимым набором элемента $a \in K^*$, а соответствующие характеристические индексы $\omega_i^a(\vec{r_i})$ – характеристическими индексами элемента.

Заметим, что $\omega_i^a(\vec{r_i}) = +\infty$ означает, что в разложении элемента отсутствуют слагаемые с $\vec{t_i}^{\,\vec{r_i}}$. Будем также считать, что для $a = 0$ допустимый набор пуст, то есть $\Omega(0) = \emptyset$, так что при всех $\vec{r_i}$ имеем $\omega_i^0(\vec{r_i}) = +\infty$.

В терминах характеристических индексов кольцо целых, максимальный идеал и группа единиц поля в описываются так:

$$\mathcal{O} = \{a \in K : \omega_i^a(\vec{0}_i) \geqslant 0, i = \overline{n;1}, \}$$

$$\wp = \{a \in K : \omega_i^a(\vec{0}_i) \geqslant 0, i = \overline{n;2},\ \omega_1^a(\vec{0}_1) \geqslant 1, \}$$

$$U = \{a \in K : \omega_i^a(\vec{0}_i) = 0, i = \overline{n;1}\}.$$

2. Множества и кольца сходимости

На многомерных полных полных полях используют топологию Паршина (см. [15]), [5] и [6]), в которой, в отличие от топологии дискретного нормирования, ряды всех элементов многомерного поля сходятся. Однако и в топологии Паршина не выполнено другое важное свойство – сходимость всех степенных рядов с коэффициентами из кольца целых при подстановке вместо переменной элемента максимального идеала.

Далее идут результаты первого автора.

1 Определение. Множество $A \subset K$ назовем множеством сходимости, если любой степенной ряд $c(X) = \sum\limits_{m \geqslant 1} c^{(m)} X^m \in A[[X]]$ сходится при подстановке вместо X произвольного элемента максимального идеала $\wp$.

В одномерном случае кольцо целых – это кольцо сходимости, а уже при $n = 2$ ни кольцо целых, ни даже максиальный идеал таковыми не являются.

Поскольку для конечных расширений многомерных полных полей топология Паршина подполя совпадает с топологией, индуцированной надполем, далее K – стандартное n-мерное полное поле с инерционным числом s.

В [9] доказан критерий множества сходимости.

Теорема 2. *$A \subset K$ является множеством сходимости тогда и только тогда, когда объединение допустимых наборов всех элементов A является допустимым набором.*

3 Определение. Объединение допустимых наборов всех элементов множества сходимости A назовем допустимым набором A и обозначим $\Omega(A)$, а характеристические индексы $\omega_i^A(\vec{r}_i)$ этого набора назовем характеристическими индексами A.

Каждому множеству сходимости A соответствует допустимый набор $\Omega(A)$, причем любое множество сходимости имеет вид $A = \vec{t}^{\,\vec{r}} G$, $G \subset \mathcal{O}$.

4 Определение. Множеством сходимости допустимого набора Ω назовем

$$C^{\Omega} = \left\{ \sum_{\vec{r} \in \Omega} a_{\vec{r}} \vec{t}^{\,\vec{r}},\ a_{\vec{r}} \in B \cup \{0\} \right\}.$$

То есть в C^{Ω} входят все элементы, допустимые наборы которых – подмножества Ω. Очевидно, что это действительно множество сходимости, причем $A \subset C^{\Omega(A)}$ и $C^{\emptyset} = \{0\}$.

Для задач, связанных с рядами, необходимы множества сходимости, котороые являются кольцами. Назовем их кольцами сходимости.

5 Определение. Пусть A – множество сходимости. Наименьшее по включению кольцо сходимости, содержащее A, будем называть кольцом сходимости, порожденным A, и обозначать $\tilde{A}$.

6 Определение. Моноидом допустимого набора Ω назовем подмоноид $M(\Omega)$ группы $\mathbb{Z}^n$, порожденный $\Omega \cup \vec{e}^{\,(s)}$.

В [10] доказан критерий его допустимости.

Теорема 7. *Моноид $M(\Omega)$ допустимого набора Ω является допустимым набором тогда и только тогда, когда $\Omega \subset \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$.*

В [8] доказаны следующие утверждения.

Теорема 8. *Пусть Ω – допустимый набор со свойством $\Omega(A) \subset \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. Тогда $C^{M(\Omega)}$ – кольцо сходимости, причем оно содержится в кольце целых.*

9 Определение. Назовем $C^{M(\Omega)}$ каноническим кольцом сходимости, порожденным допустимым набором Ω.

Теорема 10. *Множество сходимости A порождает кольцо сходимости $\tilde{A}$ тогда и только тогда, когда $A \subset \mathcal{O}$. В этом случае $\tilde{A} \subset \mathcal{O}$.*

Кроме того, если A – множество сходимости, $A \subset \mathcal{O}$, тогда $C^{M(\Omega(A))}$ является кольцом сходимости, причем $A \subset C^{M(\Omega(A))} \subset \tilde{A} \subset \mathcal{O}$.

3. Топологические свойства множеств сходимости

В [11] доказан критерий бесконечно малой.

Теорема 1. *Последовательность $\{a^{(m)}\}_{m\geqslant 1}$ является бесконечно малой тогда и только тогда, когда*

1. для $i=\overline{n;1}$ при всех $\vec{r}_i$ имеем $R_i(\vec{r}_i)=\inf_m \omega_i^{a^{(m)}}(\vec{r}_i)>-\infty$,

2. при всех $\vec{r}_1$ имеем $\lim_{m\to+\infty}\omega_1^{a^{(m)}}(\vec{r}_1)=+\infty$.

В частности, объединение допустимых наборов всех $\{a^{(m)}\}_{m\geqslant 1}$ является допустимым набором (см. [9]), и мы получаем

1.1 Следствие. *Бесконечно малая $\{a^{(m)}\}_{m\geqslant 1}$ – множество сходимости с характеристическими индексами $R_i(\vec{r}_i)$.*

Докажем еще одно свойство множеств сходимости.

1.1. Предложение. Пусть D – множество сходимости, a – произвольный элемент поля, $a+D=\{a+d, d\in D\}$. Тогда $a+D$ – множество сходимости, то есть любой аддитивный сдвиг множества сходимости является множеством сходимости.

Доказательство. По свойствам характеристических индексов (см. [8]) при $i\geqslant s$, где s – инерционное число, выполнены неравенства

$$\omega_i^{a+d}(\vec{r}_i)\geqslant \inf(\omega_i^{a}(\vec{r}_i),\omega_i^{d}(\vec{r}_i)),$$

а при $i<s$ – неравенства

$$\omega_i^{a+d}(r_{i+1},\ldots,r_s,\ldots,r_n)\geqslant \inf_{l_s\leqslant r_s}(\omega_i^{a}(r_{i+1},\ldots,l_s,\ldots,r_n),\omega_i^{d}(r_{i+1},\ldots,l_s,\ldots,r_n)).$$

Итак, при $i\geqslant s$ верно

$$\omega_i^{a+D}(\vec{r}_i)\geqslant \inf(\omega_i^{a}(\vec{r}_i),\omega_i^{D}(\vec{r}_i))>-\infty,$$

а при $i<s$ из условия $l_s\geqslant \omega_s^{a+D}(\vec{r}_s)$ следует, что

$$\omega_i^{a+D}(r_{i+1},\ldots,r_s,\ldots,r_n)\geqslant$$
$$\geqslant \inf_{\omega_s^{a+D}(\vec{r}_s)\leqslant l_s\leqslant r_s}(\omega_i^{a}(r_{i+1},\ldots,l_s,\ldots,r_n),\omega_i^{D}(r_{i+1},\ldots,i_s,\ldots,r_n))>-\infty.$$

Значит, по критерию $a+D$ – множество сходимости.

1.2 Следствие. *Любая сходящаяся последовательность $\{a^{(m)}\}$ – множество сходимости.*

Доказательство. Пусть $a^{(m)}\to a$. Тогда бесконечно малая $\{a^{(m)}-a\}_{m\geqslant 1}$ – множество сходимости. Значит, $\{a^{(m)}\}=a+\{a^{(m)}-a\}$ тоже.

1.3 Следствие. *Если хоть одна последовательность, составленная из коэффициентов ряда $c(X)=\sum\limits_{m\geqslant 1}c^{(m)}X^m$, взятых в любом порядке, сходится, то и сам ряд сходится при подстановке вместо переменной произвольного элемента максимального идеала.*

Теорема 2. *Пусть Ω – допустимый набор, $\Omega\subset\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ и $A=C^{M(\Omega)}$ – каноническое кольцо сходимости, порожденное Ω. Тогда A секвенциально замкнуто, то есть предел любой сходящейся последовательности из A лежит в A.*

Доказательство. Пусть Ω – допустимый набор и выбрано некоторое $\vec{r} \in \Omega$. Обозначим $\alpha = \alpha(r_1, \ldots, r_{s-1}, r_{s+1}, \ldots, r_n)$ величину

$$\alpha = \min_{(r_1,\ldots,r_{s-1},l_s,r_{s+1},\ldots,r_n)\in\Omega} l_s.$$

Поскольку взято наименьшее значение индекса с номером s при закрепленных остальных, имеем $l_s \geqslant \omega_s(\vec{r}_s)$, причем исходное

$$\vec{r} = (r_1, \ldots, r_{s-1}, r_s, r_{s+1}, \ldots, r_n) \in \Omega,$$

поэтому $\omega_s(\vec{r}_s) \leqslant \alpha \leqslant r_s$.

Для фиксированного элемента x и некоторого y сравним допустимые наборы x, y и $x - y$. В $\Omega(x-y)$ могут войти не только все мультииндексы из $\Omega(x)$ и $\Omega(y)$: если $\vec{r} \in \Omega(x) \cap \Omega(y)$, то в $\Omega(x-y)$ может оказаться мультииндекс $(r_1, \ldots, r_{s-1}, r_s + j, r_{s+1}, \ldots, r_n), j \in \mathbb{N}$, а исходного не быть (напоминим, что в допустимый набор элемента мы включаем лишь те индексы, для которых коэффициенты разложения отличны от нуля).

По $\vec{r} \in \Omega(x)$ составим $\vec{\alpha} = (r_1, \ldots, r_{s-1}, \alpha, r_{s+1}, \ldots, r_n) \in \Omega(x)$. В случае, когда $\vec{\alpha} \notin \Omega(y)$, имеем $\vec{\alpha} \in \Omega(x-y)$, так как слагаемые с другими мультииндексами не могли давать в разности данный индекс из-за минимальности α.

Пусть теперь $a^{(m)} \to a, \vec{r} \in \Omega(a)$. Предположим, что для соответствующего $\vec{\alpha}$ (с наименьшим возможным $l = \alpha$) при любом $k \in \mathbb{N}$ существует $m_k \geqslant k$ с условием $\vec{\alpha} \notin \Omega(a^{(m_k)})$. Тогда $\vec{\alpha} \in \Omega(a^{(m_k)} - a)$ при всех $k \in \mathbb{N}$, что противоречит свойству бесконечно малой, поскольку $\omega_1^{a^{(m_k)}-a}(\vec{\alpha}_1) \leqslant r_1$ и $\lim_{k\to+\infty} \omega_1^{a^{(m_k)}-a}(\vec{\alpha}_1) \neq +\infty$.

Итак, для любого $\vec{r} \in \Omega(a)$ существует $m_0(r_1, \ldots, r_{s-1}, r_{s+1}, \ldots, r_n)$ такое, что
$\vec{\alpha} = (r_1, \ldots, r_{s-1}, \alpha, r_{s+1}, \ldots, r_n) \in \Omega(a^{(m)})$ при всех $m \geqslant m_0$. В частности, $\vec{\alpha} \in \cup_m \Omega(a^{(m)})$.

Напомним, что $M(\Omega)$ (моноид допустимого набора Ω) порожден Ω и $\vec{e}^{\,(s)}$, причем в случае $\Omega \subset \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ множество $A = C^{M(\Omega)}$ является кольцом, из которого взяты все $a^{(m)}$. Поскольку $\vec{r} = \vec{\alpha} + j\vec{e}^{\,(s)}, j \in \mathbb{N}$, из условия $\vec{\alpha} \in \Omega(a^{(m)})$ следует, что $\vec{r} \in M(\Omega)$, а также $\Omega(a) \subset M(\Omega)$ и, наконец, $a \in A = C^{M(\Omega)}$. Теорема доказана.

Кроме того, мы получили несколько следствий.

2.1 Следствие. *Если $a^{(m)} \to a$ и $\vec{r} \in \Omega(a)$, то для*

$$\vec{\alpha} = (r_1, \ldots, r_{s-1}, \alpha, r_{s+1}, \ldots, r_n) \in \Omega(a),$$

где

$$\alpha = \min_{(r_1,\ldots,r_{s-1},l_s,r_{s+1},\ldots,r_n)\in\Omega(a)} l_s,$$

существует $m_0(r_1, \ldots, r_{s-1}, r_{s+1}, \ldots, r_n)$ такое, что $\vec{\alpha} \in \cap_{m\geqslant m_0} \Omega(a^{(m)})$.

2.2 Следствие. *Если последовательность сходится и не существует мультииндекса $\vec{r}$, принадлежащего допустимым наборам почти всех ее членов, то она является бесконечно малой.*

2.3 Следствие. *Пусть $a^{(m)} \to a$ и непустое Ω составлено из всех мультииндексов, для которых начиная с некоторого номера выполено условие $\vec{r} \in \Omega(a^{(m)})$. Тогда $a \in C^{M(\Omega)}$.*

2.4 Следствие. *Если $a^{(m)} \to a$, то $a \in C^{M(\Omega)}$, где $\Omega = \cup_{m\geqslant 1} \Omega(a^{(m)})$.*

4. Заключение

Топология Паршина многомерных полных полей, органично связанная с их основными свойствами, устроена очень сложно, и проверка по определению сходимости конкретных последовательностей или рядов требует долгих вычислений. Кроме того, кольцо целых в данной топологии не является кольцом сходимости – то есть ряды с коэффициентами из этого кольца не всегда сходятся на главном идеале.

С одной стороны, требуются различные варианты более легких для применения признаков сходимости последовательностей и рядов. С другой, важно знать, как выглядят множества сходимости и когда они являются кольцами.

Данная работа продолжает исследования в этом направлении: выясняется, что аддитивный сдвиг множества сходимости дает множество сходимости, что любое множество сходимости секвенциально замкнуто и что сходящаяся последовательность всегда составляет множество сходимости.

Кроме того, доказан удобный для применения признак бесконечно малой, а также построено кольцо сходимости, которому принадлежит предел сходящейся последовательности и все ее члены.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kato K. A generalization of local class field theory by using K-groups. I // Journal of the Faculty of Science. University of Tokyo. Section IA. Mathematics. — 1979. — Т. 27. — С. 303–376.

2. Kato K. A generalization of local class field theory by using K-groups. II // Journal of the Faculty of Science. University of Tokyo. Section IA. Mathematics. — 1980. — Т. 27. — С. 603–683.

3. Kato K. The existence theorem for higher local class field theory // Publications Mathématiques de l'IHÉS. — 1980. — Т. 43. — С. 1–37.

4. Жуков И. Б. Структурная теорема для полных полей // Труды Санкт-Петербургского математического общества. — 1994. — Т. 3. — С. 215–234.

5. Жуков И. Б., Мадунц А. И. Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия // Труды Санкт-Петербургского математического общества. — 1994. — Т. 3. — С. 4–46.

6. Жуков И. Б., Мадунц А. И. Аддитивные и мультипликативные разложения в многомерных локальных полях // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2000. — Т. 272. — С. 186–196.

7. Мадунц А. И. Классификация множеств сходимости многомерных полных полей // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2024. — Т. 531. — С. 117–126.

8. Мадунц А. И. Кольца, порожденные множествами сходимости многомерного полного поля // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2021. — Т. 500. — С. 117–126.

9. Мадунц А. И. Множества сходимости многомерного полного поля // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2020. — Т. 492. — С. 125–133.

10. Мадунц А. И. Построение колец сходимости многомерного полного поля // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2022. — Т. 513. — С. 139–146.

11. Мадунц А. И. Сходимость последовательностей и рядов в многомерных полных полях: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — СПб., 1995. — 14 с.

12. Мадунц А. И., Востоков С. В., Востокова Р. П. Формальные группы над подкольцами кольца целых многомерного локального поля // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2019. — Т. 6, № 1. — С. 88–97.

13. Паршин А. Н. Абелевы накрытия арифметических схем // Доклады Академии наук СССР. — 1978. — Т. 243. — С. 855–858.

14. Паршин А. Н. К арифметике двумерных схем. I. Распределения и вычеты // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1976. — Т. 40. — С. 736–773.

15. Паршин А. Н. Локальная теория полей классов // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 1984. — Т. 165. — С. 143–170.

REFERENCES

1. Kato, K., 1979, “A generalization of local class field theory by using K-groups. I”, *Journal of the Faculty of Science. University of Tokyo. Section IA. Mathematics*, 27, pp. 303–376.

2. Kato, K., 1980, “A generalization of local class field theory by using K-groups. II”, *Journal of the Faculty of Science. University of Tokyo. Section IA. Mathematics*, 27, pp. 603–683.

3. Kato, K., 1980, “The existence theorem for higher local class field theory”, *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 43, pp. 1–37.

4. Zhukov, I.B., 1996, “Structure theorems for complete fields”, *American Mathematical Society Translations, Ser. 2*, 166, pp. 175–192.

5. Madunts, A. I., and Zhukov, I.B, 1996, “Multidimensional complete fields: topology and other basic constructions”, *American Mathematical Society Translations, Ser. 2*, 166, pp. 1–34.

6. Zhukov, I.B., and Madunts, A.I., 2003, “Additive and multiplicative decompositions in multidimensional local fields”, *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 116, pp. 2987–2992.

7. Madunts, A.I., 2024, “Classification of convergence sets of multidimensional complete fields”, *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 531, pp. 117–126.

8. Madunts, A.I., 2021, “Rings generated by convergence sets of multidimensional complete field”, *Journal of Mathematical Sciences*, 272, pp. 444–449.

9. Madunts, A.I., 2022, “Convergence sets of multidimensional local field”, *Journal of Mathematical Sciences*, 264, pp. 80–85.

10. Madunts, A.I., 2025, “Construction of convergence rings of multidimensional complete field”, *Journal of Mathematical Sciences*, 288, pp. 362–366.

11. Madunts, A.I., 1995, “Convergence of sequences and series in multidimensional complete fields”, *Abstract of Candidate of Sciences Dissertation*, St. Petersburg, 14 p.

12. Madunts, A.I., Vostokov, S.V., and Vostokova, R.P., 2019, “Formal groups over subrings of the ring of integers of a multidimensional local field”, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta: Matematics*, 52, pp. 59–65.

13. Parshin, A.N., 1978, “Abelian coverings of arithmetic schemes”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 243, pp. 855–858.

14. Parshin, A.N., 1976, “On the arithmetic of two-dimensional schemes. I. Distributions and residues”, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, 40, pp. 736–773.

15. Parshin, A.N., 1984, “Local class field theory”, *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*, 165, pp. 143–170.

Получено: 30.06.2025
Принято в печать: 17.10.2025