ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 4.

УДК: 512.623 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-108-122

О явных конструкциях расширений полных полей

И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова

Жуков Игорь Борисович — доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: i.zhukov@spbu.ru
Иванова Ольга Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: olgaiv80@mail.ru

Аннотация

Статья посвящена применению наборов уравнений Артина – Шрайера для задания p-расширений Галуа полных дискретно нормированных полей смешанной характеристики. Наряду с обзором известных результатов в этом направлении получены некоторые новые результаты для абелевых 2-расширений. Кроме того, продолжено изучение почти максимально разветвлённых расширений, которые были введены С. В. Востоковым при изучении аддитивных модулей Галуа. Доказывается, что если группа Галуа такого расширения имеет период p, она обязательно абелева.

Ключевые слова: дискретно нормированное поле, скачок ветвления, уравнение Артина – Шрайера, почти максимально разветвлённое расширение

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:
Жуков И. Б., Иванова О. Ю. О явных конструкциях расширений полных полей // Чебышёвский сборник, 2025, т.26, вып.4, с. 108–122.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 4.

UDC: 512.623 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-108-122

On explicit constructions of extensions of complete fields

I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova

Zhukov Igor Borisovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Saint Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: i.zhukov@spbu.ru
Ivanova Olga Yur'evna — candidate of physical and mathematical sciences, Saint Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: olgaiv80@mail.ru

Abstract

This article is devoted to the use of sequences of Artin-Schreier equations to defining p-Galois extensions of complete discrete valuation fields of mixed characteristic. Along with a review of known results in this area, some new results for abelian 2-extensions are obtained. Furthermore, the study of almost maximally ramified extensions introduced by S. V. Vostokov in his study of additive Galois modules is continued. It is proved that if the Galois group of such an extension has period p, it is necessarily abelian.

Keywords: discrete valuation field, ramification jump, Artin-Schreier equation, almost maximally ramified extension

Bibliography: 23 titles.

For citation:
Zhukov, I. B., Ivanova, O. Yu. 2025, "On explicit constructions of extensions of complete fields", *Chebyshevskii sbornik*, vol.26, no.4, pp. 108–122.

Памяти дорогого учителя, коллеги, друга

1. Об уравнениях Артина – Шрайера в характеристике 0

Отправной точкой для цикла исследований, связанных с явными конструкциями для расширений Галуа высших локальных полей, послужило наблюдение С. В. Востокова о связи между уравнениями Артина – Шрайера в характеристике 0 и формулами, возникающими в теории Любина-Тэйта ([7]). А именно, пусть K — полное дискретно нормированное поле характеристики 0 с полем вычетов характерстики $p > 0$, содержащее первообразный корень степени p из 1, и пусть $a \in K$ — элемент с $v_K(a) > -pe_K/(p-1)$. Тогда расширение $K(x)/K$, заданное уравнением $x^p - x = a$ и предполагаемое нетривиальным, может быть также получено присоединением $y = wx$, где $w^{p-1} = -p$, и y удовлетворяет уравнению

$$y^p + py = -pwa, \tag{1}$$

причём $v_K(-pwa) > 0$. Далее, в уравнении (1) участвует многочлен $pX + X^p$, задающий некоторую формальную группу Любина-Тэйта (см. [18, 14, 13]), изоморфную мультипликативной группе посредством ряда $f(X) = X + \cdots \in K[[X]]$. Отсюда получается, что уравнение (1) равносильно уравнению Куммера

$$(1 + f(y))^p = 1 + f(-pwa),$$

и тем самым задаёт циклическое расширение степени p.

Обращая это преобразование, получаем, что циклическое расширение L/K степени p, у которого скачок ветвления строго меньше максимального значения $e_L/(p-1)$, может быть задано при помощи уравнения Артина – Шрайера. Далее, отсюда можно вывести, что у поля K, не содержащего первообразный корень степени p из 1, вообще любое циклическое расширение степени p может быть задано уравнением Артина – Шрайера, см. [7], [15, Ch. III, §2] и [10, §3].

Возможность задавать циклические расширения степени p уравнениями Артина – Шрайера была открыта Маккензи и Уэплсом ([19]), но эффективная работа с такими уравнениями стала возможна благодаря результатам Востокова.

В следующих двух параграфах мы показываем, как можно, итерируя расширения Артина – Шрайера полных полей смешанной характеристики, получать конечные p-расширения Галуа — соответственно циклические и произвольные; более подробный обзор соответствующих результатов приведён в [10]. Параграф 4 содержит некоторые новые результаты, касающиеся явного построения расширений с группой Галуа, изморфной заданной конечной абелевой 2-группе.

Наконец, в §5 мы имеем дело с почти максимально разветвлёнными (ПМР) расширениями полного дискретно нормированного поля характеристики 0 с полем вычетов характеристики $p > 0$; это понятие было введено С. В. Востоковым в связи с изучением структуры аддитивных модулей Галуа, см. [2, 3, 1]. В работе [6] были подробно исследованы абелевы ПМР расширения. Может быть, неабелевых ПМР расширений не существует? В данной статье мы отвечаем на этот вопрос утвердительно в предположении, что группа Галуа рассматриваемого расширения имеет период p.

2. Циклические расширения

Хорошо известно, что для поля K характеристики p любое циклическое расширение L/K степени p^n может быть задано некоторым уравнением вида

$$(x_0^p, \dots, x_{n-1}^p) = (x_0, \dots, x_{n-1}) +_{W_n} (a_0, \dots, a_{n-1}),$$

где $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$, а знак $+_{W_n}$ означает сложение в формальной группе p-векторов Витта длины n.

Для $n = 2$ уравнения можно записать более явно: $L = K(x_0, x_1)$,

$$\begin{aligned} x_0^p - x_0 &= a_0, \\ x_1^p - x_1 &= -p^{-1}((a + x_0)^p - a^p - x_0^p) + a_1. \end{aligned}$$

Оказалось, что и для полных дискретно нормированных полей характеристики 0 расширения степени p^2 можно задавать той же конструкцией ([4, предложение 3.2]):

Теорема 1. *Пусть $a \in K$, $-\frac{p}{p^2-1} e_K < v_K(a) \leqslant 0$. Положим $M = K(x_0, x_1)$, где*

$$(x_0^p, x_1^p) -_{W_2(K)} (x_0, x_1) = (a, 0).$$

Тогда, если $x_0 \notin K$, то M/K — циклическое степени p^2.

Обратим особое внимание на условие $-\frac{p}{p^2-1} e_K < v_K(a)$. Оно говорит о том, что данная конструкция позволяет строить только те расширения степени p^2, у которых «первый этаж» L/K степени p имеет достаточно малый скачок ветвления или достаточно малую глубину ветвления, а именно

$$d_K(L/K) < \frac{1}{p+1} e_K.$$

Напомним, глубина равна $d = d_K(L/K) = \frac{p-1}{p}(-v_K(a_0))$, при условии, что выбрано a, определяющее данное L/K, с максимально возможным $v_K(a)$,

Однако данную границу нельзя существенно улучшить, так как только при условии $d < \frac{1}{p} e_K$ любое циклическое расширение степени p с глубиной d может быть погружено в циклическое расширение степени p^2,) см. [4, Предложение 3.1]. Если же значение глубины ветвления лежит в «критической зоне»

$$\frac{1}{p+1} e_K \leqslant d < \frac{1}{p} e_K,$$

то приходится в формулу Витта добавлять дополнительные члены, что было сделано в [8, теорема 2.1], см. также некоторые подробности в [10, §6].

Другой способ строить циклическое расширение из расширений Артина – Шрайера рассматривался в [12]. Сформулируем основной результат этой работы (см. [12], теорема 4.2, с уточнением в [10], теорема 7.4.).

Теорема 2. *Пусть K двумерное, K содержит первообразный корень p-й степени из единицы. Пусть π – униформизирующая поля K, и $a_1, \dots, a_n \in K$ таковы, что*

$$p^n \mid v_K(a_1), \qquad \overline{\pi^{-v_K(a_1)} a_1} \notin \overline{K}^p,$$

$$-\max\Big\{\frac{1}{n}, \frac{p^{n-1}}{p^n-1}\Big\} e_K < v_K(a_1) < 0,$$

$$v_K(a_i) > \Big(1 + \frac{p^{i-1}-1}{p^{n-1}(p-1)}\Big) v_K(a_1) \text{ при } 2 \leqslant i \leqslant n.$$

Тогда существуют $x_1, \dots, x_n \in K^{alg}$, такие, что

$$\begin{cases} x_1^p - x_1 = a_1 \\ x_2^p - x_2 = a_1 x_1 + a_2 \\ \dots \\ x_i^p - x_i = a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \dots + a_{i-1} x_1 + a_i \\ \dots \end{cases},$$

и $K(x_1, \dots, x_n)/K$ является циклическим свирепым расширением степени p^n.

Здесь поле K называется двумерным, если $[\overline{K} : \overline{K}^p] = p$. Этот класс включает в себя, в частности, двумерные локальные поля характеристики 0 с произвольным совершенным полем вычетов характеристики p.

3. Конструкция Инабы

Существует ещё одна конструкция, позволяющая явно описывать любые конечные p-расширения Галуа полей характеристики p. Она была введена в работе Инабы [17]; для формулировки ключевых результатов мы зафиксируем ряд обозначений и терминов.

Под унипотентной матрицей будем понимать верхнетреугольную квадратную матрицу, у которой все элементы на главной диагонали равны 1; s-я диагональ такой матрицы $A = (a_{ij})$ — это совокупность элементов вида $a_{i,i+s}$; она будет обозначаться через $A[s]$. Если K — поле с дискретным нормированием v_K, через $v_K(A[s])$ будет обозначаться минимум из нормирований элементов $A[s]$.

Для матрицы X через $X^{(p)}$ будем обозначать матрицу, полученную из X возведением каждого элемента в степень p.

Через U_n обозначим множество унипотентных матриц, элементы которых принадлежат $\mathbb{F}_p$

Матричное уравнение Инабы по определению будет иметь вид $X^{(p)} = AX$, где A, X — унипотентные матрицы; расширение, полученное присоединением к K всех элементов матрицы X, будем называть расширением Инабы.

Это уравнение для унипотентной матрицы n-го порядка равносильно системе из $\frac{n^2-n}{2}$ уравнений:

$$\begin{cases} x_{s,1+s}^p - x_{s,1+s} = a_{s,1+s}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant n-1 \\ x_{s,2+s}^p - x_{s,2+s} = a_{s,1+s} x_{1+s,2+s} + a_{s,2+s}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant n-2 \\ \dots \\ x_{s,i+s}^p - x_{s,i+s} = \sum\limits_{j=s+1}^{s+i-1} a_{s,j} x_{j,i+s} + a_{s,i+s}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant n-i \\ \dots \end{cases},$$

при этом для любого i первые i строк системы задают расширение, полученное присоединением к полю K всех элементов первых i диагоналей матрицы X.

В [17] для произвольного поля K характеристики $p > 0$ доказаны следующие три теоремы.

Теорема 3. *Пусть L/K — расширение Инабы.*

1) Расширение L/K является расширением Галуа.

2) Пусть унипотентная матрица $X \in M_n(L)$ такова, что L получено из K присоединением элементов X, и X удовлетворяет уравнению Инабы. Тогда для любого $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ существует матрица $\Lambda_X(\sigma) \in U_n$, такая, что $\sigma X = X\Lambda_X(\sigma)$.

3) Отображение $\sigma \mapsto \Lambda_X(\sigma)$ является инъективным гомоморфизмом

$$\mathrm{Gal}(L/K) \to U_n.$$

4) Пусть Y — унипотентная матрица, являющаяся решением того же уравнения Инабы. Тогда представления Λ_X и Λ_Y сопряжены, то есть существует матрица $D \in U_n$, такая, что

$$\Lambda_X(\sigma) = D^{-1}\Lambda_Y(\sigma)D$$

для любого $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$.

Унипотентные матрицы A и B будем называть p-эквивалентными, если существует унипотентная матрица C, такая, что $C^{(p)}AC^{-1} = B$. Очевидно, p-эквивалентность является отношением эквивалентности.

Теорема 4. *Пусть L_1, L_2 — расширения Инабы поля K с p-эквивалентными матрицами. Тогда $L_1 = L_2$.*

Теорема 5. *Пусть L/K — p-расширение Галуа. Пусть Λ — представление $\mathrm{Gal}(L/K)$ в U_n. Тогда существуют унипотентные матрицы $A \in M_n(K)$, $X \in M_n(L)$ такие, что $X^{(p)} = AX$, поле L получено из поля K присоединением элементов матрицы X, и $\Lambda = \Lambda_X$ в обозначениях теоремы 3. Матрица A определена однозначно с точностью до p-эквивалентности.*

Как было обнаружено, уравнения Инабы успешно позволяют описывать также расширения полных дискретно нормированных полей характеристики 0 с малыми скачками ветвления. Сформулируем некоторые результаты из [5], [9] и [11]; во всех утверждениях K — полное дискретно нормированное поле, такое, что $\mathrm{char}\, K = 0$, $\mathrm{char}\, \overline{K} = p$.

Теорема 6. *Пусть n — натуральное число; α — рациональное число, $\alpha < 1/(n-1)$; $A \in M_n(K)$ — унипотентная матрица такая, что*

$$v_K(A[i]) \geqslant -i\alpha e_K$$

для любого i, и пусть X — некоторое решение матричного уравнения $X^{(p)} = AX$. Положим $K_i = K(X[1], \ldots, X[i])$.

1) Имеем $v_K(X[i]) \geqslant -\frac{i\alpha e_K}{p}$ при всех i.

2) Для любого $\sigma \in \mathrm{Gal}(K)$ найдётся единственная унипотентная матрица $\Lambda(\sigma) \in \in M_n(\mathbb{Z}_p)$, элементы которой являются элементами Тайхмюллера, такая, что

$$\sigma(X) - X\Lambda(\sigma) \in M_n(\mathfrak{M}_K).$$

3) При этом $v_K(\Lambda_\sigma[i]) > (1 - i\alpha)e_K$ при всех i.

4) K_i/K — расширение Галуа при всех i.

Доказательство. См. [5], теорема 1, §3. ■

Для случая матриц с одинаковыми элементами на диагонали получаем:

Следствие 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$; $a_1, \ldots, a_n \in K$ таковы, что при всех s выполнено*

$$v_K(a_s) > -\frac{s}{n} e_K,$$

и $x_1, \ldots, x_n \in K^{alg}$ таковы, что

$$\begin{cases} x_1^p - x_1 = a_1 \\ x_2^p - x_2 = a_1 x_1 + a_2 \\ \ldots \\ x_i^p - x_i = a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \cdots + a_{i-1} x_1 + a_i \\ \ldots \end{cases} .$$

Тогда для любого i расширение $K(x_1, \ldots, x_i)/K$ является расширением Галуа.

В следующей работе был доказан аналог теоремы 5, отвечающий на вопрос, какие расширения можно задать как расширения Инабы или погрузить в расширение Инабы (см. [9, теорема 3.3]).

Теорема 7. *Пусть поля*

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \cdots \subset K_n = L$$

таковы, что K_{i+1}/K_i – расширения степени p, заданные уравнениями Артина – Шрайера. Тогда существуют расширения Инабы L_I/K и M_I/K, заданные матрицами порядка $p^{n-1}+2$ и $p^{n-1}+1$ соответственно, такие, что $M_I L = L_I$.

Ещё один результат в этом направлении был опубликован в [11]:

Теорема 8. *Пусть K содержит первообразный корень p-й степени из единицы. Тогда для любого p-расширения Галуа L/K существует поле E, такое, что $K \subset L \subset E$, расширение E/K раскладывается в башню расширений Артина – Шрайера, и $[E : K] \leqslant [L : K]^2$.*

Приведём ещё один результат о разрешимости задачи погружения, в доказательстве которого используются расширения Инабы ([9, теорема 5.2]).

Теорема 9. *Пусть n – натуральное число, $e_K > p - 1$, и h – такое число, что*

$$0 < h < \frac{e_K}{n-1}.$$

Пусть L/K – вполне разветвлённое расширение Галуа, такое, что группа $\mathrm{Gal}(L/K)$ изоморфна $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{n-1}$, и его скачки ветвления в верхней нумерации не превосходят h. Тогда расширение L/K можно погрузить в расширение Галуа с группой Галуа, изоморфной U_n.

4. Построение расширений с данной абелевой группой Галуа

Сформулируем лемму, которая помогает проверять цикличность расширений.

Лемма 1. *Пусть p — простое число, поля $K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$ таковы, что для любого i расширение K_i/K_0 является расширением Галуа, $[K_{i+1} : K_i] = p$, и расширение K_{i+2}/K_i является циклическим. Тогда расширение K_n/K_0 является циклическим.*

Доказательство. См. [12], лемма 2.3. ∎

Лемма 2. *Пусть K — полное дискретно нормированное поле,*

$$\operatorname{char} K = 0, \qquad \operatorname{char} \overline{K} = 2,$$

и $a, b, c \in K$, $x, y \in K^{alg}$ таковы, что

$$v_K(b) < 0, \qquad 2 \nmid v_K(b),$$

$$v_K(a) > -\frac{1}{2}e_K, \qquad v_K(b) > -\frac{1}{2}e_K, \qquad v_K(c) > -e_K,$$

$$x^2 - x = a, \qquad y^2 - y = bx + c,$$

и расширение $K(y)/K$ является расширением Галуа. Тогда расширение $K(y)/K$ является циклическим.

Доказательство. Степень расширения $K(y)/K$ равна 1, 2 или 4. Все расширения степени 1 и 2 циклические. Далее считаем, что $[K(y) : K] = 4$. Из этого следует $K(x) \neq K$, $K(y) \neq K(x)$.

Достаточно доказать, что $K(x)$ является единственным подрасширением степени 2 расширения $K(y)/K$. Пусть это не так. Тогда существует элемент

$$z \in K(y) \setminus K(x),$$

степень которого над K равна 2.

Элементы $1, x, y, xy$ образуют базис $K(y)$ как векторного пространства над K. Пусть

$$z = \alpha xy + \beta y + \gamma x + \delta, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in K.$$

Замена z на $z - \delta$ не изменит степени z над K. Поэтому можно считать, что $z = \alpha xy + \beta y + \gamma x$. Пусть $u, w \in K$ таковы, что $z^2 + uz + w = 0$.

Имеем

$$\big((\alpha x + \beta)y + \gamma x\big)^2 + u\big((\alpha x + \beta)y + \gamma x\big) + w = 0.$$

Преобразуем:

$$(\alpha x + \beta)^2(y + bx + c) + 2(\alpha x + \beta)\gamma xy + \gamma^2 x^2 + u(\alpha x + \beta)y + u\gamma x + w = 0.$$

Запишем это равенство как $h_1 y + h_2 = 0$, где

$$h_1 = (\alpha x + \beta)(\alpha x + \beta + 2\gamma x + u),$$

$$h_2 = (\alpha x + \beta)^2(bx + c) + \gamma^2 x^2 + u\gamma x + w.$$

Из того, что $h_1, h_2 \in K(x)$, $y \notin K(x)$, получаем, что $h_1 = h_2 = 0$. Рассмотрим равенство

$$(\alpha x + \beta)\big((\alpha + 2\gamma)x + \beta + u\big) = 0.$$

Первый сомножитель не равен 0, так как $z \notin K(x)$. Следовательно,

$$\alpha + 2\gamma = 0, \qquad \beta + u = 0.$$

Случай $\alpha = \gamma = 0$ невозможен, так как степень y над K равна 4. Поделив z на подходящий ненулевой элемент поля K, будем считать, что $\alpha = 2$, $\gamma = -1$. Подставим в формулу для h_2 эти значения и $u = -\beta$:

$$(2x + \beta)^2(bx + c) + x^2 + \beta x + w = 0.$$

Преобразовав выражение к виду $\ldots x + \ldots$, где многоточия означают элементы поля K, и приравняв коэффициент при x к 0, получим, что

$$4(1 + \beta)b + 4(1 + \beta)c + (4a + \beta^2)b + 1 + \beta = 0,$$

то есть

$$b\beta^2 + (4b + 4c + 1)\beta + (4b + 4ab + 4c + 1) = 0.$$

Если рассматривать левую часть как квадратное уравнение на β, то его дискриминант D равен

$$1 - 4b + \ldots,$$

где многоточие означает слагаемое, нормирование которого больше, чем $v_K(1 - 4b)$. Такие элементы не принадлежат K^2. ∎

Лемма 3. *Пусть K — полное дискретно нормированное поле,* $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} \overline{K} = 2$, $e_K \geqslant 4$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *таково, что* $n < e_K$. *Пусть* $a \in K$ *таково, что* $v_K(a) = -1$, *и* $x_1, \ldots, x_n \in K^{alg}$ *таковы, что*

$$\begin{cases} x_1^2 - x_1 = a \\ x_2^2 - x_2 = a x_1 \\ \ldots \\ x_n^2 - x_n = a x_{n-1} \end{cases}.$$

Тогда расширение $K(x_1, \ldots, x_n)/K$ является вполне разветвленным циклическим расширением степени 2^n.

Доказательство. Положим $K_0 = K$, $K_i = K(x_1, \ldots, x_i)$.

Применяя следствие 1 к $a_1 = a$ и $a_2 = \cdots = a_n = 0$, получаем, что все расширения K_i/K являются расширениями Галуа.

Проверим, что для любого i расширение K_{i+2}/K_i удовлетворяет условию леммы 2. Все расширения K_{i+1}/K_i вполне разветвлены, и выполнено

$$e_{K_i} = 2^i e_K \geqslant 2^{i+2}, \qquad v_{K_i}(a) = -2^i, \qquad v_{K_i}(a x_{i-1}) = -(2^{i+1} - 1).$$

Следовательно,

$$v_{K_i}(a x_{i-1}) > -\frac{1}{2} e_{K_i}, \qquad v_{K_i}(a) > -\frac{1}{2} e_{K_i}.$$

Получаем, K_{i+2}/K_i – циклическое расширение. Применяя лемму 1, получаем, что все расширения K_i/K — циклические. ∎

Лемма 4. *Пусть K — полное дискретно нормированное поле,*

$$\operatorname{char} K = 0, \qquad \operatorname{char} \overline{K} = 2,$$

π — униформизирующая K, пусть $u, w \in K$ таковы, что

$$v_K(u) = v_K(w) = 0, \qquad \overline{u^{-1}w} \notin (\overline{K})^2.$$

Пусть $x, y \in K^{alg}$ таковы, что что

$$x^2 - x = u\pi^{-1}, \qquad y^2 - y = w\pi^{-1}.$$

Тогда $K(x) \neq K(y)$.

Доказательство. Предположим, что $K(x) = K(y)$. Обозначим это поле через L.

Расширение L/K вполне разветвлено, и

$$\overline{u^{-1}w} = \overline{(x^{-1}y)^2} \in (\overline{L})^2 = (\overline{K})^2. \blacksquare$$

Следствие 2. *Пусть K — полное дискретно нормированное поле,*

$$\operatorname{char} K = 0, \qquad \operatorname{char} \overline{K} = 2,$$

поле, π — униформизирующая K, пусть $s \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\big((\overline{K})^* : ((\overline{K})^*)^2\big) > s.$$

Тогда для любых полей $L_1, \ldots, L_s$, являющихся расширениями поля K степени 2, найдётся такой элемент $u \in U_K$, что расширение, заданное уравнением $x^2 - x = u\pi^{-1}$, не совпадает ни с одним из полей L_i.

Доказательство. Будем считать, что для некоторого $t \leqslant s$ при $i \leqslant t$ расширения L_i/K задаются уравнениями $x^2 - x = w_i\pi^{-1}$ для некоторых $w_i \in U_K$, а при $i > t$ расширения нельзя задать уравнениями такого вида. Из леммы 4 следует, что подойдет любой элемент u, для которого выполнено $\overline{u^{-1}w_i} \notin (\overline{K})^2$ при $1 \leqslant i \leqslant t$. $\blacksquare$

Лемма 5. *Пусть G — конечная абелева 2-группа,*

$$G \cong (\mathbb{Z}/2^{n_1}\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/2^{n_m}\mathbb{Z}).$$

Тогда количество подгрупп индекса 2 группы G равно $2^m - 1$.

Теорема 10. *Пусть G — конечная абелева 2-группа,*

$$G \cong (\mathbb{Z}/2^{n_1}\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/2^{n_m}\mathbb{Z}),$$

и K — полное дискретно нормированное поле, такое, что $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} \overline{K} = 2$, $\big((\overline{K})^* : ((\overline{K})^*)^2\big) \geqslant 2^m$, $e_K > \max\{n_1, \ldots, n_m\}$. Тогда существует расширение Галуа L/K, такое, что $\operatorname{Gal}(L/K) = G$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение Инабы, заданное матрицей A, у которой все элементы каждой диагонали равны друг другу. Тогда в качествея X можно взять матрицу, у которой тоже на каждой диагонали записаны одинаковые элементы. Если a_i, x_i — элементы i-х диагоналей, матричное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x_1^p - x_1 = a_1 \\ x_2^p - x_2 = a_1x_1 + a_2 \\ \ldots \\ x_i^p - x_i = a_1x_{i-1} + a_2x_{i-2} + \cdots + a_{i-1}x_1 + a_i \\ \ldots \end{cases}.$$

Будем называть башней Инабы высоты n с коэффициентами $a_1, \ldots, a_n \in K$ расширение $K(x_1, \ldots, x_n)$, заданное такой системой.

Для $u \in U_K$ обозначим через $L(u,n)$ башню Инабы высоты n, заданную последовательностью $u\pi^{-1}, 0, \ldots, 0$. По лемме 3 для любого u и любого $n < e_K$ расширение $L(u,n)/K$ является циклическим расширением степени 2^n. Для любого набора $u_1, \ldots, u_m$ расширение

$$L(u_1, n_1) \ldots L(u_m, n_m)/K$$

является расширением Галуа.

Докажем, что для некоторого набора $u_1, \ldots, u_m$ выполнено

$$L(u_1, n_1) \ldots L(u_i, n_i) \cap L(u_{i+1}, n_{i+1}) = K \tag{2}$$

для любого $i = 1, \ldots, m-1$; тогда поле $L(u_1, n_1) \ldots L(u_m, n_m)$ будет подходящим расширением.

Будем выбирать элементы u_i последовательно. В качестве u_1 можно взять произвольный элемент U_K. Пусть уже выбраны u_1 при $1 \leqslant i \leqslant t$ так, что условие (2) выполнено при $1 \leqslant i \leqslant t-1$. Обозначим поле $L(u_1, n_1) \ldots L(u_t, n_t)$ через E. Тогда

$$\mathrm{Gal}(E/K) \cong (\mathbb{Z}/2^{n_1}\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/2^{n_t}\mathbb{Z}).$$

Следовательно, по лемме 5 у расширения E/K есть $2^t - 1$ подрасширений степени 2. Количество подрасширений меньше, чем $\left((\overline{K})^* : ((\overline{K})^*)^2\right)$, следовательно, по следствию 2 существует $u_{t+1} \in U_K$, для которого расширение F/K, заданное уравнением $x^2 - x = u_{t+1}\pi^{-1}$, не является подрасширением расширения E/K. Этот элемент u_{t+1} подходит, так как F является единственным подрасширением степени 2 расширения $L(u_{t+1}, n_{t+1})/K$, и, следовательно, расширения E/K и $L(u_{t+1}, n_{t+1})/K$ не содержат ни одного общего подрасширения степени 2. ∎

5. Почти максимально разветвленные расширения с группой Галуа периода p

Пусть L/K — конечное сепарабельное расширение полного дискретно нормированного поля смешанной характеристики; через $D_{L/K}$ будем обозначать его дифференту (см. [20]). Известно, что

$$v_L(D_{L/K}) = e(L/K) - 1 + d_L(L/K), \tag{3}$$

см. [21, 22], формула (1) или [16], формула 1–4. Расширение L/K называется почти максимально разветвленным, если $[L:K] \mid D_{L/K}$.

Лемма 6. *Пусть K — дискретно нормированное поле,* $\mathrm{char}\, K = 0$, $\mathrm{char}\, \overline{K} = p$, $\zeta_p \in K$, *L/K — разрешимое p-расширение, $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, и*

$$h(\sigma) > \frac{e_L}{p-1}.$$

Тогда $\sigma = id$.

Доказательство. Пусть поля K_i таковы, что

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = L.$$

Индукцией по i докажем, что σ действует тождественно на K_i; при $i = n$ получим, что σ действует тождественно на L.

Переход от i к $i+1$. Имеем $K_{i+1} = K_i(a)$ для некоторого a, такого, что $a \in O_{K_{i+1}}$ и $a^p \in K_i$. Достаточно проверить, что $\sigma a = a$.

Пусть это не так. По индукционному предположению выполнено $\sigma(a^p) = a^p$. Следовательно, $\sigma a/a = \zeta_p^q$ для некоторого q, $p \nmid q$. Тогда

$$v_L\Big(\frac{\sigma a}{a} - 1\Big) = v_L(\zeta_p^q - 1) = \frac{e_L}{(p-1)} < h(\sigma),$$

противоречие. ■

Лемма 7. *Пусть $K \subset L$ — дискретно нормированные поля, L/K — расширение Галуа, и $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Тогда*

1) $v_L\Big(\dfrac{\sigma\tau x - \tau\sigma x}{x}\Big) \geqslant h(\sigma) + h(\tau)\ \forall x \in O_L$;

2) $h([\sigma, \tau]) \geqslant h(\sigma) + h(\tau)$.

Доказательство. Положим $i = h(\sigma)$, $j = h(\tau)$.

1) Обозначим через π произвольную униформизирующую поля L. Для любого $x \in O_L$ обозначим через a_x, b_x такие элементы O_L, что

$$\frac{\sigma x}{x} = 1 + \pi^i a_x, \qquad \frac{\tau x}{x} = 1 + \pi^j b_x.$$

Имеем

$$\frac{\sigma\tau x}{x} = \frac{\sigma(x(1+\pi^j b_x))}{x} = (1+\pi^i a_x)(1+\pi^j(1+\pi^i a_\pi)^j b_x(1+\pi^i a_{b_x})).$$

Пусть

$$c = (1+\pi^i a_\pi)^j - 1.$$

Тогда $v_L(c) \geqslant i$ и

$$\begin{aligned}\frac{\sigma\tau x}{x} &= (1+\pi^i a_x)(1+\pi^j(1+c)b_x(1+\pi^i a_{b_x})) = \\ &= (1+\pi^i a_x)(1+\pi^j b_x) + (1+\pi^i a_x)\pi^j b_x\big(c(1+\pi^i a_{b_x}) + \pi^i a_{b_x}\big).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$v\Big(\frac{\sigma\tau x}{x} - (1+\pi^i a_x)(1+\pi^j b_x)\Big) \geqslant i + j.$$

Аналогично получаем, что

$$v\Big(\frac{\tau\sigma x}{x} - (1+\pi^i a_x)(1+\pi^j b_x)\Big) \geqslant i + j.$$

2) Пусть $x \in O_L$. Положим $y = \sigma\tau x$. Тогда

$$[\sigma, \tau]x = \sigma^{-1}\tau^{-1}y.$$

поэтому из 1) следует, что

$$v_L\Big(\frac{\sigma^{-1}\tau^{-1}y - \tau^{-1}\sigma^{-1}y}{y}\Big) \geqslant i + j.$$

Учитывая, что $\tau^{-1}\sigma^{-1}y = x$ и $v_L(y) = v_L(x)$, получаем нужное утверждение. ■

Лемма 8. *Пусть L/K — расширение Галуа полных дискретно нормированных полей $[L:K] = p^n$, $K' = K(\zeta_p)$, $L' = L(\zeta_p)$, $\varepsilon = n - \frac{d_L(L/K)}{e_L}$.*

1) Пусть $\sigma \in \mathrm{Gal}(L'/K')$, $\mathrm{ord}\,\sigma = p$. Тогда

$$h(\sigma) \geqslant \frac{1}{(p-1)} e_{L'}(1-\varepsilon);$$

2) Если расширение L/K является почти максимально разветвленным, то $\varepsilon \leqslant \frac{p^n - 1}{e_L}$.

Доказательство. 1) Пусть M — неподвижное поле подгруппы $\langle\sigma\rangle$. Имеем $\operatorname{ord}\sigma = p$, следовательно, $[L' : M] = p$.

Глубина ручных расширений K'/K и L'/L равна 0 по [16], лемма 2–12, и по [16], лемма 2–4 глубина аддитивна, следовательно,

$$d_{L'}(L'/K') = d_{L'}(L/K).$$

и

$$d_{L'}(L'/K') = d_{L'}(L/K) = e(L'/L)d_L(L/K) = e(L'/L)e_L(n-\varepsilon) = e_{L'}(n-\varepsilon).$$

Применяя еще раз аддитивность глубины, получаем, что

$$\begin{aligned} d_{L'}(L'/M) = d_{L'}(L'/K') - d_{L'}(M/K') \geqslant \\ \geqslant e_{L'}(n-\varepsilon) - (n-1)e_{L'} = e_{L'} - \varepsilon e_{L'}. \end{aligned}$$

Число $h(\sigma)$ является единственным скачком расширения L'/M, следовательно, оно равно $\frac{1}{p-1}e_{L'}L'/M$.

2) Применяя формулу (3), получаем, что

$$\begin{aligned} ne_L = v_L([L:K]) \leqslant v_L(D_{L/K}) = e(L/K) - 1 + d_L(L/K) = \\ = e(L/K) - 1 + ne_L - \varepsilon e_L, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\varepsilon \leqslant \frac{e(L/K)-1}{e_L} \leqslant \frac{p^n-1}{e_L}. \blacksquare$$

Лемма 9. *Пусть L/K — расширение Галуа полных дискретно нормированных полей $[L:K] = p^n$, $\sigma^p = id$ для любого $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, и*

$$n - \frac{d_L(L/K)}{e_L} < \frac{1}{2}.$$

Тогда расширение L/K абелево.

Доказательство. Пусть $K' = K(\zeta_p)$, $L' = L(\zeta_p)$. Тогда L'/K' расширение Галуа, и $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Gal}(L'/K')$. По лемме 8 выполнено $h(\sigma) > \frac{e_{L'}}{2(p-1)}$ для любого $\sigma \in \mathrm{Gal}(L'/K')$. Применяя леммы 7 и 6 к расширению L/K получаем, что любой коммутатор является тождественным отображением. $\blacksquare$

Теорема 11. *Пусть L/K — почти максимально разветвленное расширение Галуа полных дискретно нормированных полей $[L:K] = p^n$, $\sigma^p = id$ для любого $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, и $\frac{p^n-1}{e_L} < \frac{1}{2}$. Тогда расширение L/K абелево.*

Доказательство. Следует из лемм 8 и 9. $\blacksquare$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондарко М. В., Востоков С. В., Жуков И. Б. Аддитивные модули Галуа в полных дискретно нормированных полях // Алгебра и анализ. — 1997. — Т. 9, № 4. — С. 28–46.

2. Востоков С. В. Идеалы абелева p-расширения иррегулярного локального поля как модули Галуа // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1974. — Т. 46. — С. 14–35.

3. Востоков С. В. Идеалы абелева p-расширения локального поля как модули Галуа // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1976. — Т. 57. — С. 64–84.

4. Востоков С. В., Жуков И. Б. Некоторые подходы к построению абелевых расширений для $\mathfrak{p}$-адических полей // Труды Санкт-Петербургского математического общества. — 1995. — Т. 3. — С. 194–214.

5. Востоков С. В., Жуков И. Б., Иванова О. Ю. Расширения Инабы полных полей характеристики 0 // Чебышёвский сборник. — 2019. — Т. 20, № 3. — С. 124–133.

6. Востоков С. В., Жуков И. Б., Пак Г. К. Расширения с почти максимальной глубиной ветвления // Записки научных семинаров ПОМИ. — 1999. — Т. 265. — С. 77–109.

7. Востоков С. В., Жуков И. Б., Фесенко И. Б. К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции // Алгебра и анализ. — 1990. — Т. 2, № 4. — С. 91–118.

8. Жуков И. Б., Лысенко Е. Ф. Построение циклического расширения степени p^2 полного поля // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2017. — Т. 455. — С. 52–66.

9. Жуков И. Б., Иванова О. Ю. О расширениях Инабы двумерных локальных полей смешанной характеристики // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2022. — Т. 513. — С. 57–73.

10. Жуков И. Б., Иванова О. Ю. Явные конструкции расширений полных полей характеристики 0 // Чебышёвский сборник. — 2023. — Т. 24, № 2. — С. 179–196.

11. Жуков И. Б., Иванова О. Ю. Устранение максимальных скачков // Чебышёвский сборник. — 2024. — Т. 25, № 1. — С. 176–183.

12. Иванова О. Ю. Задание свирепого циклического расширения уравнением Инабы // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2022. — Т. 513. — С. 74–84.

13. Ивасава К. Локальная теория полей классов. — М.: Мир, 1983. — 220 с.

14. Алгебраическая теория чисел / под ред. Дж. Касселса, А. Фрёлиха. — М.: Мир, 1969. — 500 с.

15. Fesenko I. B., Vostokov S. V. Local Fields and Their Extensions: A Constructive Approach. — 2nd ed. — Providence: American Mathematical Society, 2002. — 172 c.

16. Hyodo O. Wild ramification in the imperfect residue field case // Galois Representations and Arithmetic Algebraic Geometry. — Amsterdam: North-Holland, 1987. — Vol. 12. — P. 287–314. — (Advanced Studies in Pure Mathematics).

17. Inaba E. On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p // Natural Science Report of the Ochanomizu University. — 1961. — Vol. 12. — P. 26–36.

18. Lubin J., Tate J. Formal complex multiplication in local fields // Annals of Mathematics. — 1965. — Vol. 81. — P. 380–387.

19. MacKenzie R. E., Whaples G. Artin–Schreier equations in characteristic zero // American Journal of Mathematics. — 1956. — Vol. 78. — P. 473–485.

20. Serre J.-P. Local Fields. — Springer, 1979. — 241 c.

21. Xiao L., Zhukov I. Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions // Алгебра и анализ. — 2014. — Т. 26, № 5. — С. 1–63.

22. Xiao L., Zhukov I. Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions // Valuation Theory in Interaction: Proceedings of the 2nd International Conference and Workshop on Valuation Theory. — Zürich: European Mathematical Society, 2014. — P. 600–656.

23. Zhukov I. Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields // Invitation to Higher Local Fields / ed. by I. Fesenko, M. Kurihara. — Geometry and Topology Monographs, 2000. — Vol. 3. — P. 117–122.

REFERENCES

1. Bondarko, M.V., Vostokov, S.V., and Zhukov, I.B., 1998, "Additive Galois modules in complete discretely valued fields", *St. Petersburg Math. J.*, 9(4), pp. 675-693.

2. Vostokov, S.V., 1974, "Ideals of abelian p-extension of irregular local field as Galois modules", *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, 46, pp. 14–35.

3. Vostokov, S.V., 1976, "Ideals of abelian p-extension of local field as Galois modules", *J. Soviet Math.*, 11(4), pp. 567–584.

4. Vostokov, S.V., and Zhukov, I.B., 1995, "Some approaches to the construction of abelian extensions for $\mathfrak{p}$-adic fields", *Proceeding of the St. Peterburg Mathematical Society*, III, pp. 194–214.

5. Vostokov, S.V., Zhukov, I.B., and Ivanova, O.Y., 2019, "Inaba extensions of complete fields of characteristic 0", *Chebyshevskii Sbornik*, 20(3), pp. 124–133.

6. Vostokov, S.V., Zhukov, I.B., and Pak, G.K., 1999, "Extensions with almost maximal ramification depth", *J. Math. Sci*, 112(3), pp. 4285–43022.

7. Vostokov, S.V., Zhukov, I.B., and Fesenko, I.B., 1991, "On the theory of multidimensional local fields. Methods and constructions", *Leningrad Math. J.*, 2(4), pp. 775–800.

8. Zhukov, I.B., and Lysenko, E.F., 2018, "Construction of a cyclic extension of degree p^2 for a complete field", *J. Math. Sci.*, 234(2), pp. 148-157.

9. Zhukov, I.B., and Ivanova, O.Y., 2025, "On the Inaba extensions of two-dimensional local fields of mixed characteristic", *J. Math. Sci.*, 288, pp. 305–316.

10. Zhukov, I.B., and Ivanova, O.Y., 2023, "Explicit constructions of extensions of complete fields of characteristic 0", *Chebyshevskii Sbornik*, 24(2), pp. 179–196.

11. Zhukov, I.B., and Ivanova, O.Y., 2024, "Elimination of maximal jumps", *Chebyshevskii Sbornik*, 25(1), pp. 176–183.

12. Ivanova, O.Y., 2025, "Construction of cyclic ferocious extensions by the Inaba equation", *J. Math. Sci.*, 288, pp. 317–324.

13. Iwasawa, K., 1986, *Local Class Field Theory*, Oxford University Press, 155 p.

14. Cassels, J.W.S., and Fröhlich, A. (eds), 1967, *Algebraic Number Theory*, London: Academic Press, 366 p.

15. Fesenko, I.B., and Vostokov, S.V., 2002, *Local Fields and Their Extensions: A Constructive Approach*, 2nd ed., Providence: American Mathematical Society, 172 p.

16. Hyodo, O., 1987, “Wild ramification in the imperfect residue field case”, in *Galois Representations and Arithmetic Algebraic Geometry*, Amsterdam: North-Holland, pp. 287–314.

17. Inaba, E., 1961, “On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p”, *Natural Science Report of the Ochanomizu University*, 12, pp. 26–36.

18. Lubin, J., and Tate, J., 1965, “Formal complex multiplication in local fields”, *Annals of Mathematics*, 81, pp. 380–387.

19. MacKenzie, R.E., and Whaples, G., 1956, “Artin–Schreier equations in characteristic zero”, *American Journal of Mathematics*, 78, pp. 473–485.

20. Serre, J.-P., 1979, *Local Fields*, Springer, 241 p.

21. Xiao, L., and Zhukov, I., 2015, “Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions”, *St. Petersburg Math. J.*, 26(5), pp. 695–740.

22. Xiao, L., and Zhukov, I., 2014, “Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions”, in *Valuation Theory in Interaction: Proceedings of the 2nd International Conference and Workshop on Valuation Theory*, Zürich: European Mathematical Society, pp. 600–656.

23. Zhukov, I., 2000, “Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields”, in *Invitation to Higher Local Fields*, edited by Fesenko, I., and Kurihara, M., Geometry and Topology Monographs, 3, pp. 117–122.

Получено: 25.06.2025
Принято в печать: 17.10.2025