ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 4.

УДК: 512.741.1 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-98-107

Гомоморфизмы обобщённых формальных групп Хонды

О. В. Демченко

Демченко Олег Вячеславович — кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: vasja@eu.spb.ru, st006973@spbu.ru

Аннотация

Обобщённые формальные группы Хонды являются следующей ступенью в цепочке обобщений *мультипликативная формальная группа – формальные группы Любина – Тейта — относительные формальные группы Любина – Тейта — формальные группы Хонды.* Этой работой мы продолжаем исследование свойств этого класса формальных групп, фокусируясь на их гомоморфизмах. В частности показывается, что гомоморфизм обобщённых формальных групп Хонды представляется в виде композиции цепочки выделенных изогений и изоморфизма. С учётом предыдущих результатов это означает, что для обобщённой формальной группы Хонды конечной высоты существует только конечное число изогенных попарно неизоморфных формальных групп. Полученные результаты дают представление о том, как могут быть устроены гомоморфизмы формальных групп над произвольным p-адическим кольцом целых.

Ключевые слова: формальные группы, формальные группы Любина – Тейта, изогении

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:
Демченко О. В. Гомоморфизмы обобщённых формальных групп Хонды // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 98–107.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 4.

UDC: 512.741.1 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-98-107

Homomorphisms of generalized Honda formal groups

O. V. Demchenko

Demchenko Oleg Vyacheslavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Saint Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: vasja@eu.spb.ru

Abstract

Generalized Honda formal groups are the next step in a chain of generalizations *the multiplicative formal group – Lubin-Tate formal groups — relative Lubin-Tate formal groups — Honda formal groups*. This paper continues the study of properties of this class of formal groups focusing on their homomorphisms. In particular, we show that every homomorphism of generalized Honda formal groups can be expressed as a composition of a chain of distinguished isogenies and an isomorphism. It implies that for any generalized Honda formal group of finite height an isogeny class contains only a finite number of isomorphism classes. The results obtained give an idea of the structure of homomorphisms of formal groups over an arbitrary p-adic ring of integers.

Keywords: formal groups, Lubin-Tate formal groups, isogenies

Bibliography: 8 titles.

For citation:
Demchenko, O. V. 2025, “Homomorphisms of generalized Honda formal groups”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 98–107.

Дорогому учителю

1. Введение

(Одномерная) формальная группа над кольцом A — это формальный степенной ряд $F \in A[[x, y]]$ такой, что

1. $F(x, 0) = x$
2. $F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$
3. $F(x, y) = F(y, x)$

Гомоморфизмом из F в G называется $f \in A[[x]]_0$, удовлетворяющий условию $f(F(x, y)) = G(f(x), f(y))$. Любой $f \in \mathrm{Hom}(F, G), f \equiv ax \bmod \deg 2$ однозначно определяется своим линейным коэффициентом a, что записывается как $f = [a]_{F,G}$.

Пусть k_1 — конечное расширение $\mathbb{Q}_p$ с кольцом целых чисел $\mathcal{O}_1$, униформизирующей π и полем вычетов мощности q. Формальные группы Любина-Тейта [6] над $\mathcal{O}_1$, известные по своему применению в локальной теории полей классов, характеризуются наличием выделенной изогении $f \in \mathrm{End}(F)$ такой, что $f \equiv \pi x \bmod \deg 2$ и $f \equiv x^q \bmod \pi$.

Если k_0 — неразветвлённое расширение k_1 с кольцом целых чисел $\mathcal{O}_0$ и автоморфизмом Фробениуса Δ, то можно определить относительные формальные группы Любина-Тейта [5] над $\mathcal{O}_0$, которые уже будут обладать выделенной изогении $f \in \mathrm{Hom}(F, F^{\Delta})$.

Формальные группы Хонды [1] над $\mathcal{O}_0$ определяются соотношениями на коэффициенты своих логарифмов, но могут быть также охарактеризованы наличием выделенной изогении $f \in \mathrm{Hom}(F, F_1)$ такой, что $f \equiv \pi' x \bmod \deg 2$ и $f \equiv x^{q^h} \bmod \pi$ (см. [4]) для некоторых $h > 0, \pi' \in \mathcal{O}_0$ с $\pi/\pi' \in \mathcal{O}_0^*$.

Дальнейшее продвижение на этом пути даёт обобщённые формальные группы Хонды [2] над кольцом целых $\mathcal{O}$ вполне разветвленного расширения k_0 степени e, $e < p$. Как и формальные группы Хонды, они определяются соотношениями на коэффициенты своих логарифмов, но также могут быть охарактеризованы наличием выделенной изогении $f \in \mathrm{Hom}(F, F_1)$ такой, что $f \equiv \pi_1 x \bmod \deg 2$ и $f \equiv x^{q^h} \bmod \pi$ для некоторых $h > 0, \pi_1 \in \mathcal{O}$ с $\pi/\pi_1 \in \mathcal{O}$. При этом, если формальные группы Хонды описывают все формальные группы над кольцом целых локального поля, неразветвленного над $\mathbb{Q}_p$, то обобщённые формальные группы Хонды дают нам описание всех формальных групп над кольцом целых локального поля, слабо разветвленного над $\mathbb{Q}_p$.

Основываясь на классификации обобщённых одномерных формальных групп Хонды, данном в [2], мы исследуем их гомоморфизмы, пытаясь обобщить известные результаты, касающиеся гомоморфизмов одномерных формальных групп Хонды. Преимущество этой классификации по сравнению с другими классификациями формальных групп над кольцами целых локальных полей (например, [7]) заключается в том, что она также даёт полное описание их гомоморфизмов.

Из арифметики типов Хонды ([1, теорема 3]) легко следует, для любой пары гомоморфизмов, входящих в/исходящих из одной формальной группы таких, что линейный коэффициент одного делится на линейный коэффициент другого, существует (и единственный) гомоморфизм, замыкающий данную диаграмму. На языке категорий, для функтора $\mathfrak{L}$, который все одномерные формальные группы над данным кольцом отображает в некий свободный модуль ранга 1, а каждый гомоморфизм — в умножение на его линейный коэффициент, каждый морфизм формальных групп Хонды является декартовым/кодекартовым. В частном случае, когда две из трёх формальных групп совпадают, из этого свойства следует, что существование изогении из F в G влечёт существование изогении из G в F, а когда совпадают все три формальные группы, это свойство эквивалентно целозамкнутости кольца эндоморфизмов в своем поле частных (ср. [8]). Кроме того, несложно показать, что любая изогения формальных группы Хонды пропускается через выделенную, а значит, любой гомоморфизм может быть представлен, как композиция последовательности выделенных изогений и изоморфизма.

Аналогичные утверждения доказывается в данной работе для обобщённых формальных группы Хонды (теорема 2 и следствие из нее, теорема 3, теорема 5 и следствие из неё). Целозамкнутость кольца эндоморфизмов обобщённых формальных групп Хонды в своем поле частных была доказана ранее в работе [2]. Применением теоремы 5 является получение необходимого и достаточного условия, когда элемент кольца $\mathcal{O}$ может быть линейным коэффициентом гомоморфизма данной обобщённой формальной группы Хонды (теорема 6). Заметим, что эта ситуация контрастирует с ситуацией формальных групп Хонды, когда любой элемент кольца целых является линейным коэффициентом некоторого гомоморфизма, исходящего из данной формальной группы, и значит функтор $\mathfrak{L}$ задаёт фибрацию.

2. Обобщённые формальные группы Хонды

Пусть k/k_1 — конечное расширение локальных полей нулевой характеристики с индексом ветвления e и подполем инерции k_0, т.е. k_0/k_1 — неразветвлённое расширение степени e. Обозначим через Δ его автоморфизм Фробениуса. Пусть поле вычетов $\bar{k}_1 = \bar{k}_0$ имеет характеристику $p \neq 2$ и мощность q. Обозначим через $\mathcal{O}, \mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1$ кольца целых полей k, k_0, k_1 соответственно. Выберем у полей k, k_1 униформизующие Π, π. Предположим, что $\Pi^e = \delta\pi$ для некоторого $\delta \in \mathcal{O}_0^*$. Пусть ν — нормализованное нормирование k, т.е. $\nu(\Pi) = 1$.

Определим “координатные отображения” из k в k_0. Любой элемент $\alpha \in k$ можно однозначно представить в виде $\alpha = a_0 + a_1\Pi + \dots + a_{e-1}\Pi^{e-1}$, где $a_0, a_1, \dots, a_{e-1} \in k_0$. Тогда положим $|\alpha|_0 = a_0, |\alpha|_1 = a_1, \dots, |\alpha|_{e-1} = a_{e-1}$. Эти отображения могут быть естественным образом продолжены до отображений из $k[[x]]$ в $k_0[[x]]$, а именно, для любого $\lambda \in k[[x]]$ однозначно определены $|\lambda|_0, |\lambda|_1, \dots, |\lambda|_{e-1} \in k_0[[x]]$ такие, что

$$\lambda = |\lambda|_0 + |\lambda|_1\Pi + \dots + |\lambda|_{e-1}\Pi^{e-1}.$$

Рассмотрим некоммутативное кольцо $E_0 = \mathcal{O}_0[[\blacktriangle]]$ с правилом умножения $\blacktriangle a = a^{\Delta}\blacktriangle, a \in \mathcal{O}_0$ и определим его левое действие на множестве $k_0[[x]]$ формулой $\blacktriangle\varphi = \varphi^{\Delta}(x^q)$, $\varphi \in k_0[[x]]$.

Нам также понадобится некоммутативное кольцо $E = \mathcal{O}[[\blacktriangle]]$ с тем же правилом умножения $\blacktriangle\alpha = \alpha^{\Delta}\blacktriangle, \alpha \in \mathcal{O}$. Чтобы определить его, продолжим Δ на k по формуле

$$(a_0 + a_1\Pi + \cdots + a_{e-1}\Pi^{e-1})^{\Delta} = a_0^{\Delta} + a_1^{\Delta}\Pi + \cdots + a_{e-1}^{\Delta}\Pi^{e-1}, \quad a_0, \ldots a_{e-1} \in k_0.$$

При этом очевидно $(\alpha+\beta)^{\Delta} = \alpha^{\Delta} + \beta^{\Delta}$, но $(\alpha\beta)^{\Delta} \neq \alpha^{\Delta}\beta^{\Delta}$.

Заметим, что E не ассоциативно, если $\delta \notin \mathcal{O}_1$, однако $A(BD) = (AB)D$ для любых $A, B \in E, D \in E_0$. Это позволяет рассматривать левые главные идеалы E, порождённые элементом E_0.

Формальный степенной ряд $\lambda \in k[[x]]$ имеет *тип* $(A_0, A_1, \ldots, A_{e-1})$, где $A_0, A_1, \ldots, A_{e-1} \in \in E_0\blacktriangle$, если $\lambda(x) \equiv x \bmod \deg 2$ и $\pi|\lambda|_i \equiv A_i|\lambda|_0 \bmod \pi, 0 \leqslant i \leqslant e-1$.

Напомним, что формальная группа F над $\mathcal{O}_0$ называется формальной группой Хонды, если её логарифм $\ell \in k_0[[x]]$ имеет тип Хонды u для $u \in E_0, u \equiv \pi \bmod \blacktriangle$, то есть $u\ell \equiv 0 \bmod \pi$.

Формальная группа F над $\mathcal{O}$ называется *обобщённой формальной группой Хонды*, если её логарифм имеет тип $(A_0, A_1, \ldots, A_{e-1})$ для некоторых $A_0, A_1, \ldots, A_{e-1} \in E_0\blacktriangle$. При этом любой $\lambda \in k[[x]]_0$, имеющий некоторый тип $(A_0, A_1, \ldots, A_{e-1})$, является логарифмом обобщённой формальной группы Хонды над $\mathcal{O}$ ([3, Теорема 1]), а если $k_1 = \mathbb{Q}_p$ и $e < p$, то любая формальная группа над $\mathcal{O}$ является обобщённой формальной группой Хонды ([3, Теорема 3]).

Заметим, что из сравнения $\pi|\lambda|_0 \equiv A_0|\lambda|_0 \bmod \pi$ следует, что $|\lambda|_0$ имеет тип $\pi - A_0$, а значит является логарифмом формальной группы Хонды над $\mathcal{O}_0$.

Будем говорить, что тип $(A_0, \ldots, A_{e-1})$ имеет *высоту* h, если для любого $0 \leqslant z \leqslant e-1$ коэффициенты A_z при степенях $\blacktriangle$, меньших h, делятся на π, и h — наибольшее число, обладающее этим свойством. Ясно, что высота типа не меньше 1.

Условие существования гомоморфизма между двумя обобщёнными формальными группами Хонды описывается в терминах их типов следующим образом.

Теорема 1 ([3, Теорема 2]). *Пусть $\lambda, \mu \in k[[x]]_0$ — логарифмы формальных групп F и G над $\mathcal{O}$, имеющие типы $(A_0, A_1, \ldots, A_{e-1})$ и $(B_0, B_1, \ldots, B_{e-1})$ соответственно. Предположим, что $e < q^h$, где h — высота $(B_0, B_1, \ldots, B_{e-1})$.*

Пусть $\alpha \in \mathcal{O}$. Тогда $[\alpha]_{F,G} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G)$ тогда и только тогда, когда существуют $U_0, U_1, \ldots, U_{e-1} \in E_0$ такие, что

$$\begin{aligned} (\pi - B_0)(|\alpha|_0 + \delta|\alpha|_1 A_{e-1} + \cdots + \delta|\alpha|_{e-1}A_1) &= U_0(\pi - A_0) \\ |\alpha|_0 A_1 + |\alpha|_1 A_0 + \pi\delta(|\alpha|_2 A_{e-1} + \cdots + |\alpha|_{e-1}A_2)& \\ -B_1(|\alpha|_0 + \delta|\alpha|_1 A_{e-1} + \cdots + \delta|\alpha|_{e-1}A_1) &= U_1(\pi - A_0) \\ &\vdots \\ |\alpha|_0 A_{e-1} + \cdots + |\alpha|_{e-1}A_0& \\ -B_{e-1}(|\alpha|_0 + \delta|\alpha|_1 A_{e-1} + \cdots + \delta|\alpha|_{e-1}A_1) &= U_{e-1}(\pi - A_0) \end{aligned}$$

Система из условия теоремы может быть переписана более компактным способом. Обозначим $A = A_0 + \Pi A_1 + \cdots + \Pi^{e-1}A_{e-1}, B = B_0 + \Pi B_1 + \cdots + \Pi^{e-1}B_{e-1} \in E\blacktriangle$ и

$$D_\alpha^A = |\alpha|_0 + \delta|\alpha|_1 A_{e-1} + \cdots + \delta|\alpha|_{e-1}A_1 \in E_0.$$

Тогда система из условия теоремы 1 эквивалентна сравнению

$$\alpha A \equiv BD_\alpha^A \bmod E(\pi - A_0).$$

Действительно, это следует из формул

$$\begin{aligned} |\alpha A - BD_\alpha^A|_0 =& |\alpha|_0 A_0 + \pi\delta(|\alpha|_1 A_{e-1} + \cdots + |\alpha|_{e-1}A_1) \\ &- B_0(|\alpha|_0 + \delta|\alpha|_1 A_{e-1} + \cdots + \delta|\alpha|_{e-1}A_1) \\ =& (\pi - B_0)(|\alpha|_0 + \delta|\alpha|_1 A_{e-1} + \cdots + \delta|\alpha|_{e-1}A_1) - |\alpha|_0(\pi - A_0). \end{aligned}$$

и

$$|\alpha A - BD_\alpha^A|_z = |\alpha|_0 A_z + \cdots + |\alpha|_z A_0 + \pi\delta(|\alpha|_{z+1}A_{e-1} + \cdots + |\alpha|_{e-1}A_{z+1}) \\ - B_z(|\alpha|_0 + \delta|\alpha|_1 A_{e-1} + \cdots + \delta|\alpha|_{e-1}A_1)$$

для $1 \leq z \leq e-1$.

Лемма 1. *Пусть $\lambda, \mu \in k[[x]]_0$ — логарифмы формальных групп F и G над $\mathcal{O}$, имеющие типы $(A_0, A_1, \ldots, A_{e-1})$ и $(B_0, B_1, \ldots, B_{e-1})$ соответственно. Если $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ и $[\alpha]_{F,G} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G)$, то $D_\beta^B D_\alpha^A \equiv D_{\beta\alpha}^A \bmod E_0(\pi - A_0)$.*

Доказательство. С учётом того, что $B_z D_\alpha^A \equiv |\alpha A|_z \bmod E_0(\pi - A_0)$ для всех $0 \leq z \leq e-1$, имеем

$$\begin{aligned} D_\beta^B D_\alpha^A =& |\beta|_0 D_\alpha^A + \delta|\beta|_1 B_{e-1} D_\alpha^A + \cdots + \delta|\beta|_{e-1} B_1 D_\alpha^A \\ \equiv& |\beta|_0(|\alpha|_0 + \delta|\alpha|_1 A_{e-1} + \cdots + \delta|\alpha|_{e-1}A_1) \\ &+ \delta|\beta|_1(|\alpha|_0 A_{e-1} + \cdots + |\alpha|_{e-1}A_0) + \cdots \\ &+ \delta|\beta|_{e-1}\Big(|\alpha|_0 A_1 + |\alpha|_1 A_0 + \delta\pi(|\alpha|_2 A_{e-1} + \cdots + |\alpha|_{e-1}A_2)\Big) \\ \equiv& |\beta|_0(|\alpha|_0 + \delta|\alpha|_1 A_{e-1} + \cdots + \delta|\alpha|_{e-1}A_1) \\ &+ \delta|\beta|_1(|\alpha|_0 A_{e-1} + \cdots + |\alpha|_{e-1}\pi) + \cdots \\ &+ \delta|\beta|_{e-1}\Big(|\alpha|_0 A_1 + |\alpha|_1 \pi + \delta\pi(|\alpha|_2 A_{e-1} + \cdots + |\alpha|_{e-1}A_2)\Big) \\ =& |\alpha|_0|\beta|_0 + \delta\pi(|\alpha|_1|\beta|_{e-1} + \cdots + |\alpha|_{e-1}|\beta|_1) \\ &+ \delta\Big(|\alpha|_0|\beta|_1 + |\alpha|_1|\beta|_0 + \delta\pi(|\alpha|_2|\beta|_{e-1} + \cdots + |\alpha|_{e-1}|\beta|_2)\Big)A_{e-1} + \cdots \\ &+ \delta(|\alpha|_0|\beta|_{e-1} + \cdots + |\alpha|_{e-1}|\beta|_0)A_1 \\ =& |\alpha\beta|_0 + \delta|\alpha\beta|_1 A_{e-1} + \cdots + \delta|\alpha\beta|_{e-1}A_1 = D_{\beta\alpha}^A \bmod E_0(\pi - A_0) \end{aligned}$$

□

Лемма 2. *Пусть $\lambda, \mu \in k[[x]]_0$ — логарифмы формальных групп F и G над $\mathcal{O}$, имеющие типы $(A_0, A_1, \ldots, A_{e-1})$ и $(B_0, B_1, \ldots, B_{e-1})$ соответственно. Предположим, что $A_0 \not\equiv 0 \bmod \pi$. Если $\alpha \in \mathcal{O}$ и $[\alpha]_{F,G} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G)$ и $\alpha \neq 0$, то $D_\alpha^A \not\equiv 0 \bmod E_0(\pi - A_0)$.*

Доказательство. Предположим $D_\alpha^A \equiv 0 \bmod E_0(\pi - A_0)$. Тогда $\alpha A \equiv BD_\alpha^A \equiv 0 \bmod E(\pi - A_0)$ и, обозначив $\alpha_z = |\alpha|_z$, $0 \leqslant z \leqslant e-1$, получим

$$\begin{cases} \alpha_0\pi + \pi\delta(\alpha_{e-1}A_1 + \cdots + \alpha_1 A_{e-1}) & \equiv 0 \bmod E_0(\pi - A_0) \\ \alpha_1\pi + \alpha_0 A_1 + \pi\delta(\alpha_{e-1}A_2 + \cdots + \alpha_2 A_{e-1}) & \equiv 0 \bmod E_0(\pi - A_0) \\ & \vdots \\ \alpha_{e-1}\pi + \alpha_{e-2}A_1 + \cdots + \alpha_0 A_{e-1} & \equiv 0 \bmod E_0(\pi - A_0) \end{cases}$$

Заметим, что первое сравнение системы может быть заменено на

$$\alpha_0 + \delta(\alpha_{e-1}A_1 + \cdots + \alpha_1 A_{e-1}) \equiv 0 \bmod E_0(\pi - A_0).$$

Обозначим

$$d = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \delta\alpha_{e-1} & \delta\alpha_{e-2} & \cdots & \delta\alpha_1 \\ \pi\alpha_1 & \alpha_0 & \pi\delta\alpha_{e-1} & \cdots & \pi\delta\alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi\alpha_{e-1} & \alpha_{e-2} & \alpha_{e-3} & \cdots & \alpha_0 \end{vmatrix}.$$

Последовательно умножая сравнения из предыдущей системы на соответствующие элементы $\mathcal{O}_0$ и складывая их, получим $d \equiv 0 \bmod E_0(\pi - A_0)$, откуда очевидно следует, что $d = 0$. Если $\alpha \neq 0$, то можно поделить его на максимальную степень π и без потери общности предположить, что одно из $\alpha_0, \ldots, \alpha_{e-1}$ не делится на π. Несложно видеть, что из $d = 0$ вытекает $\alpha_0 = \pi\alpha_0', \alpha_0' \in \mathcal{O}_0$. Тогда

$$\begin{vmatrix} \alpha_0' & \delta\alpha_{e-1} & \delta\alpha_{e-2} & \cdots & \delta\alpha_1 \\ \alpha_1 & \pi\alpha_0' & \pi\delta\alpha_{e-1} & \cdots & \pi\delta\alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{e-1} & \alpha_{e-2} & \alpha_{e-3} & \ldots & \pi\alpha_0' \end{vmatrix} = 0.$$

Теперь $\alpha_1 = \pi\alpha_1', \alpha_1' \in \mathcal{O}_0$. Рассуждая таким образом дальше, мы приходим к противоречию. $\square$

Лемма 3. *Пусть $u, v, X, W \in E_0$, причём u, v — типы Хонды, то есть $u \equiv v \equiv \pi \bmod \blacktriangle$, а $W \not\equiv 0 \bmod E_0 v$. Если $uW \equiv XW \equiv 0 \bmod E_0 v$, то $X \equiv 0 \bmod E_0 u$.*

Доказательство. Прежде всего представим W в виде $W = a\blacktriangle^m w + sv$, где $a \in \mathcal{O}_0^*, s, w \in E_0$ и $w \equiv 1 \bmod \blacktriangle$. Для этого будем последовательно заменять одночлены W наименьшей степени вида $\pi b \blacktriangle^j$, $b \in \mathcal{O}_0$, на $b\blacktriangle^j(\pi - v)$, пока младший коэффициент не станет обратимым. Поскольку $W \not\equiv 0 \bmod v$, то процесс замены завершится за конечное число шагов.

Теперь заметим, что $Xa\blacktriangle^m w \equiv XW \equiv 0 \bmod E_0 v$ и $ua\blacktriangle^m w \equiv uW \equiv 0 \bmod E_0 v$, откуда $Xaw^{\Delta^m} \equiv 0 \bmod E_0 v^{\Delta^m}$ и $uaw^{\Delta^m} \equiv 0 \bmod E_0 v^{\Delta^m}$. Пусть $\ell \in k_0[[x]], \ell \equiv x \bmod \deg 2$ имеет тип Хонды v^{Δ^m}, тогда $Xa(w^{\Delta^m}\ell) = (Xaw^{\Delta^m})\ell \equiv 0 \bmod \pi$. Аналогично $ua(w^{\Delta^m}\ell) \equiv 0 \bmod \pi$. Последнее сравнение означает, что $w^{\Delta^m}\ell$ имеет тип Хонды $a^{-1}ua$. Тогда из первого сравнения с учетом предложения 2.6, [1] следует, что $Xa = sa^{-1}ua$ для некоторого $s \in E_0$, откуда получаем требуемое $X \equiv 0 \bmod E_0 u$. $\square$

Теорема 2. *Пусть F, G и G' — обобщённые формальные группы Хонды над $\mathcal{O}$ конечной высоты. Пусть $\alpha, \beta \in \mathcal{O}, \alpha \neq 0$ и $[\alpha]_{F,G} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G), [\alpha\beta]_{F,G'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G')$. Тогда $[\beta]_{G,G'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(G, G')$.*

Доказательство. Пусть $(A_0, A_1, \ldots, A_{e-1}), (B_0, B_1, \ldots, B_{e-1})$ и $(C_0, C_1, \ldots, C_{e-1})$ — типы логарифмов формальных групп F, G и G' соответственно. Обозначим $A = A_0 + \Pi A_1 + \cdots + \Pi^{e-1}A_{e-1}, B = B_0 + \Pi B_1 + \cdots + \Pi^{e-1}B_{e-1}$ и $C = C_0 + \Pi C_1 + \cdots + \Pi^{e-1}C_{e-1}$, откуда $\alpha A \equiv BD_\alpha^A \bmod E(\pi - A_0)$ и $\alpha\beta A \equiv CD_{\alpha\beta}^A \bmod E(\pi - A_0)$. Тогда

$$\beta BD_\alpha^A \equiv \beta\alpha A \equiv CD_{\alpha\beta}^A \bmod E(\pi - A_0),$$

поэтому для $X = \beta B - CD_\beta^B \in E$ с учётом леммы 1 имеем

$$XD_\alpha^A = \beta BD_\alpha^A - CD_\beta^B D_\alpha^A \equiv CD_{\beta\alpha}^A - CD_\beta^B D_\alpha^A \equiv 0 \bmod E(\pi - A_0).$$

Если $X = X_0 + \Pi X_1 + \cdots + \Pi^{e-1}X_{e-1}, X_0, \ldots, X_{e-1} \in E_0$, то $X_z D_\alpha^A \equiv 0 \bmod E_0(\pi - A_0)$ для всех $0 \leq z \leq e-1$. Заметим, что $A_0 \not\equiv 0 \bmod \pi$ по предложению 5.2, [3], поэтому $D_\alpha^A \not\equiv 0 \bmod E_0(\pi - A_0)$ по лемме 2. Теперь $(\pi - B_0)D_\alpha^A \equiv 0 \bmod E_0(\pi - A_0)$ и по лемме 3 получаем $X_z \equiv 0 \bmod E_0(\pi - B_0), 0 \leq z \leq e-1$, т.е. $X \equiv 0 \bmod E_0(\pi - B_0)$. Следовательно $\beta B \equiv CD_\beta^B \bmod E_0(\pi - B_0)$ и $[\beta]_{G,G'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(G, G')$. $\square$

Следствие 1. *Пусть F, G — обобщённые формальные группы Хонды конечной высоты над $\mathcal{O}$ и $[\alpha]_{F,G} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G)$. Если $\nu(\alpha) \leq se$ для некоторого $s > 0$, то существует гомоморфизм $[\pi^s/\alpha]_{G,F} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(G, F)$.*

Доказательство. Применим теорему 2 к гомоморфизмам $[\alpha]_{F,G} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F,G)$ и $[\pi^s]_F \in$ $\in \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(F)$. □

Теорема 3. *Пусть F, G и G' — обобщённые формальные группы Хонды над $\mathcal{O}$ конечной высоты. Пусть $\alpha, \beta \in \mathcal{O}, \alpha \neq 0$ и $[\alpha\beta]_{F,G} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F,G), [\alpha]_{G',G} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(G',G)$. Тогда $[\beta]_{F,G'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F,G')$.*

Доказательство. Пусть $\nu(\alpha\beta) \le se$ для некоторого $s > 0$. По следствию из теоремы 2 существуют $[\pi^s/\alpha]_{G,G'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(G,G'), [\pi^s/(\alpha\beta)]_{G,F} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(G,F)$. Тогда $(\pi^s/\alpha) = \pi^s/(\alpha\beta)\cdot\beta$ и $[\beta]_{F,G'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F,G')$ по теореме 2. □

3. Выделенные изогении

Обобщённые формальные группы Хонды над $\mathcal{O}$ обладают “каноническими” типами.

Лемма 4. *Любая обобщённая формальная группы Хонды над $\mathcal{O}$ конечной высоты имеет тип $(B_0\blacktriangle^{h_0}, B_1\blacktriangle^{h_1}, \ldots, B_{e-1}\blacktriangle^{h_{e-1}})$ такой, что $B_0 \in E_0^*$ и для всех $1 \leqslant z \leqslant e-1$ либо $B_z \in E_0^*$, либо $B_z = 0$. При этом высота типа равняется $h = \min(h_0, \ldots, h_{e-1})$.*

Доказательство. Лемма 5.1 и предложение 5.2, [3]. □

Подобно формальным группам Хонды ([4, Теорема 1]), обобщённые формальные группы Хонды также обладают выделенными изогениями.

Теорема 4 ([3, Теорема 5]). *Пусть F — обобщённая формальная группа Хонды конечной высоты над $\mathcal{O}$ с логарифмом типа $(B_0\blacktriangle^{h_0}, B_1\blacktriangle^{h_1}, \ldots, B_{e-1}\blacktriangle^{h_{e-1}})$, описанного в лемме 4. Тогда существует формальная группа F_1 над $\mathcal{O}$ такая, что $f = [\delta^{-1}\varepsilon_t^{-1}\Pi^{e-t}]_{F,F_1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F,F_1)$ и $f \equiv x^{q^{h_t}} \bmod \Pi^{e-t}$, где $0 \leqslant t \leqslant e-1$ — наименьший индекс, для которого $h_t = h$, и $B_t \equiv \varepsilon_t \bmod \blacktriangle$.*

Построим с помощью этой теоремы цепочку формальных групп

$$F = F_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_j} F_j \xrightarrow{f_{j+1}} F_{j+1} \xrightarrow{f_{j+2}} \cdots$$

так, что $f_j \equiv \pi_j x \bmod \deg 2$ и $f_j \equiv x^{q^{h_j^*}} \bmod \pi_j, j \geqslant 1$ для некоторого натурального h_j^* и $\pi_j \in \mathcal{O}, 1 \leqslant \nu(\pi_j) \leqslant e$. Определим $f^{(n)} = f_n \circ \cdots \circ f_1, n \geqslant 1$.

Для набора $(h_0, \ldots, h_{e-1})$ рекурсивно определим последовательность индексов: $t_0 = e$ и t_{j+1} — наименьший индекс, для которого достигается минимум $h_0, \ldots, h_{t_j-1}$, т. е. $0 \leqslant t_{j+1} \leqslant$ $\leqslant t_j - 1$ и $h_i > h_{t_{j+1}}$ при $0 \leqslant i \leqslant t_{j+1}-1$; $h_i \geqslant h_{t_{j+1}}$ при $t_{j+1}+1 \leqslant i \leqslant t_j - 1$. Для единообразия предположим, что $h_e = 0$. Поскольку t_j строго убывают, существует индекс r такой, что $t_r = 0$.

Лемма 5 ([2, Лемма 2]). *Пусть F — обобщённая формальная группа Хонды конечной высоты над $\mathcal{O}$ с логарифмом типа $(B_0\blacktriangle^{h_0}, B_1\blacktriangle^{h_1}, \ldots, B_{e-1}\blacktriangle^{h_{e-1}})$, описанного в лемме 4. При $1 \leqslant j \leqslant r, m \geqslant 0$ имеем $h_{rm+j}^* = h_{t_j} - h_{t_{j-1}}$ и $\nu(\pi_{rm+j}) = t_{j-1} - t_j$.*

Кроме того, из теоремы 3, [2] следует, что формальная группа F_r имеет тип

$$\left(\varepsilon_0^{-1}B_0\blacktriangle^{h_0}\varepsilon_0, \varepsilon_0^{-1}B_1\blacktriangle^{h_1}\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_0^{-1}B_{e-1}\blacktriangle^{h_{e-1}}\varepsilon_0\right),$$

где $B_0 \equiv \varepsilon_0 \bmod \blacktriangle, \varepsilon_0 \in \mathcal{O}_0^*$, откуда следует, что существует изоморфизм $\varphi = [\varepsilon_0^{-1}]_{F,F_r}$ между F и F_r и более обще, изоморфными являются любые две формальные группы F_s и $F_{s'}$, если $s' \equiv s \bmod r$. С другой стороны, из леммы 2, [2] можно заключить, что $\pi_1 \cdots \pi_r = \varepsilon_0^{-1}\pi$, откуда $f^{(r)} = \varphi \circ [\pi]_F$.

Теорема 5. *Пусть F, G — обобщённые формальные группы Хонды конечной высоты над $\mathcal{O}$ и $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G)$. Если g не является изоморфизмом, то g пропускается через выделенную изогению f, т.е. существует $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F_1, G)$ такой, что $g = \varphi \circ f$.*

Доказательство. Обозначим через $(B_0\blacktriangle^{h_0}, B_1\blacktriangle^{h_1}, \ldots, B_{e-1}\blacktriangle^{h_{e-1}})$ тип логарифма F из леммы 4. Пусть $h_t \le h_z$ для $0 \le z \le e-1$ и $h_t < h_z$ для $0 \le z \le t$.

Если $g = [\gamma]_{F,G}$, то из его необратимости следует $\gamma \notin \mathcal{O}^*$, откуда $|\gamma|_0 \equiv 0 \bmod \pi$. Докажем, что $|\gamma|_z \equiv 0 \bmod \pi$ для всех $0 \le z \le e-t-1$ индукцией по z. База очевидна. Предположим, что $1 \le z \le e-t-1$ и $|\gamma|_1 \equiv \cdots \equiv |\gamma|_{z-1} \equiv 0 \bmod \pi$. Обозначим через $(C_0, C_1, \ldots, C_{e-1})$ тип логарифма G, тогда из теоремы 1 в частности следует, что

$$\begin{aligned}
&|\gamma|_0 B_{z+t}\blacktriangle^{h_{z+t}} + \cdots + |\gamma|_{z-1}B_{t+1}\blacktriangle^{h_{t+1}}\\
&+|\gamma|_z B_t\blacktriangle^{h_t} + |\gamma|_{z+1}B_{t-1}\blacktriangle^{h_{t-1}} + \cdots + |\gamma|_{z+t}B_0\blacktriangle^{h_0}\\
&+\pi\delta(|\gamma|_{z+t+1}B_{e-1}\blacktriangle^{h_{e-1}} + \cdots + |\gamma|_{e-1}B_{z+t+1}\blacktriangle^{h_{z+t+1}})\\
&-C_{z+t}(|\gamma|_0 + \delta|\gamma|_1 B_{e-1}\blacktriangle^{h_{e-1}} + \cdots + \delta|\gamma|_{e-1}B_1\blacktriangle^{h_1})\\
&\qquad = U_{z+t}(\pi - B_0\blacktriangle^{h_0})
\end{aligned}$$

для некоторого $U_{z+t} \in E_0$. С учётом индукционного предположения и того, что $h_0, \ldots, h_{t-1} > h_t$, а $h_1, \ldots, h_{e-1} \ge h_t$, это равенство можно переписать как

$$\pi X\blacktriangle + |\gamma|_z\varepsilon_t\blacktriangle^{h_t} + Y\blacktriangle^{h_t+1} = U_{z+t}(\pi - B_0\blacktriangle^{h_0})$$

для некоторых $X, Y \in E_0$. Наконец

$$|\gamma|_z\varepsilon_t\blacktriangle^{h_t} + Y'\blacktriangle^{h_t+1} = U'(\pi - B_0\blacktriangle^{h_0}),$$

где $Y' = Y + XB_0^{\Delta}\blacktriangle^{h_0-h_t}, U' = U_{z+t} - X\blacktriangle$. Отсюда следует, что $U' \equiv a\blacktriangle^{h_t} \bmod \blacktriangle^{h_t+1}$ для некоторого $a \in \mathcal{O}_0$, и $|\gamma|_z = \varepsilon_t^{-1}a\pi \equiv 0 \bmod \pi$.

Таким образом, $\gamma = (\delta^{-1}\varepsilon_t^{-1}\Pi^{e-t})\beta$ для некоторого $\beta \in \mathcal{O}$. Теперь из теоремы 2 следует, что $[\beta]_{F_1,G} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F_1, G)$. Наконец

$$[\beta]_{F_1,G} \circ f = [\beta]_{F_1,G} \circ [\delta^{-1}\varepsilon_t^{-1}\Pi^{e-t}]_{F,F_1} = [\gamma]_{F,G} = g.$$

□

Следствие 2. *Пусть F, G — обобщённые формальные группы Хонды конечной высоты над $\mathcal{O}$ и $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G), g \ne 0$. Тогда $g = \psi \circ f^{(n)}$ для некоторых $n \geqslant 0$ и изоморфизма $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F_n, G)$.*

Следствие 3. *Пусть F, G — обобщённые формальные группы Хонды конечной высоты над $\mathcal{O}$, между которыми существует изогения. Тогда G изоморфна F_j для некоторого $0 \le j < r$.*

Теорема 6. *Пусть F — обобщённая формальная группа Хонды конечной высоты над $\mathcal{O}$ и $\alpha \in \mathcal{O}$. Существует обобщённая формальная группа Хонды G над $\mathcal{O}$ и $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G)$, $g = [\alpha]_{F,G}$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathcal{O}^*$ или $\nu(\alpha) = se - t_j, s \geqslant 1, 0 \le j < r$.*

Доказательство. Очевидно, что если $\alpha \in \mathcal{O}^*$, то существует обобщённая формальная группа Хонды G над $\mathcal{O}$ такая, что $[\alpha]_{F,G} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G)$.

Предположим, что $\nu(\alpha) = se - t_j, s \geqslant 1, 0 \le j < r$. Положим $n = r(s-1) + j + 1$. Поскольку $\nu(\pi_{rm+1}) + \cdots + \nu(\pi_{rm+r}) = (t_0 - t_1) + \cdots + (t_{r-1} - t_r) = e$ для любого $m \geqslant 0$ по лемме 5, имеем

$$\nu(\pi_1) + \cdots + \nu(\pi_n) = (s-1)e + \nu(\pi_{r(s-1)+1}) + \cdots + \nu(\pi_{r(s-1)+j+1}) = se - t_j$$

и $\nu(\beta) = \nu(\alpha)$ для $\beta = \pi_1 \cdots \pi_n$. Теперь для $\alpha\beta^{-1} \in \mathcal{O}^*$ существует обобщённая формальная группа Хонды G над $\mathcal{O}$ такая, что $[\alpha\beta^{-1}]_{F^{(n)},G} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F^{(n)}, G)$. Композиция $f^{(n)}$ и этого изоморфизма даёт гомоморфизм с линейным коэффициентом α.

Наконец, рассмотрим обобщённую формальную группу Хонды G над $\mathcal{O}$ и гомоморфизм $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G), g = [\alpha]_{F,G}$. По следствию из теоремы 5 для некоторых $n \geqslant 0$ и изоморфизма $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F_n, G)$ имеем $g = \psi \circ f^{(n)}$. Если $n = 0$, то $\alpha \in \mathcal{O}^*$. Иначе $n = r(s-1) + j + 1, 0 \leq j < r, s \geqslant 1$ и $\nu(\alpha) = \nu(\pi_1) + \cdots + \nu(\pi_n) = se - t_j$. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Honda T. On the theory of commutative formal groups // J. Math. Soc. Japan 1970. Vol. 22, P. 213–246.

2. Демченко О. В., Востоков С.В. Точки кручения обобщённых формальных групп Хонды, // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия 2020. Vol. 7, №4, P. 597–606.

3. Демченко О. В. Формальные группы над p-адическими кольцами целых с малым ветвлением и выделенные изогении, // Алгебра и анализ 2002. Vol. 14, №3, P. 55–85.

4. Демченко О. В. Новое в отношениях формальных групп Любина–Тэйта и формальных групп Хонды, // Алгебра и анализ 1998. Vol. 10, №5, P. 77–84.

5. de Shalit E. Relative Lubin–Tate groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 95, P. 1–4.

6. Lubin J., Tate J. Formal complex multiplication in local fields. // Ann. of Math. 1965. Vol. 81, P. 380–387.

7. Бондарко М. В., Востоков С. В. Явная классификация формальных групп над локальными полями, // Труды математического института им. В.А.Стеклова 2003. Vol. 241, P. 43–67.

8. Lubin J. Entireness of the endomorphism rings of one-dimensional formal groups. // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 52, P. 8–10.

REFERENCES

1. Honda, T. 1970, “On the theory of commutative formal groups”, *J. Math. Soc. Japan*, vol.22, pp. 213–246.

2. Demchenko, O., Vostokov, S. 2020, “Torsion points of generalized Honda formal groups”, *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.*, vol.53, no.4, 404–411.

3. Demchenko, O. 2003, “Formal groups over p-adic rings of integers with small ramification, and distinguished isogenies”, *St.Petersburg Math. J.*, vol.14, no.3, 405–428.

4. Demchenko, O. 1999, “New relationship between formal Lubin-Tate groups and formal Honda groups”, *St.Petersburg Math. J.*, vol.10, no.5, 785–789.

5. de Shalit, E. 1985, “Relative Lubin–Tate groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol.95, pp. 1–4.

6. Lubin, J., Tate, J. 1965, “Formal complex multiplication in local fields”, *Ann. of Math.*, vol.81, pp.380–387.

7. Bondarko, M., Vostokov, S. 2003, “Explicit classification of formal groups over local fields”, *Proc. Steklov Math. Inst.*, vol.241, pp. 35–57.

8. Lubin, J. 1975,“Entireness of the endomorphism rings of one-dimensional formal groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol.52, pp.8–10.

Получено: 19.06.2025
Принято в печать: 17.10.2025