ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 4.

УДК: 517 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-88-97

BV-структура на алгебре когомологий Хохшильда локальных алгебр полудиэдрального типа

А. И. Генералов, Н. С.Жамков

Генералов Александр Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: ageneralov@gmail.com
Жамков Никита Сергеевич — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: n.zhamkov@spbu.ru

Аннотация

Получено полное описание BV-структуры на когомологиях Хохшильда для локальных алгебр полудиэдрального типа над алгебраически замкнутым полем характеристики 2, которые по классификации Эрдманн описываются параметром k, для случая чётного параметра $k > 3$. Для этого применяются метод сравнивающих морфизмов и метод стягивающих гомотопий.

Ключевые слова: когомологии Хохшильда, гомологическая алгебра, скобка Герстенхабера, алгебра Ли, BV-структура.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Генералов А. И., Жамков Н. С. BV-структура на алгебре когомологий Хохшильда локальных алгебр полудиэдрального типа // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 4, с. 88–97.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 4.

UDC: 517 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-4-88-97

BV-Structure on the Hochschild Cohomology Algebra of Local Algebras of Semidihedral Type

A. I. Generalov, N. S. Zhamkov

Generalov Alexandr Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg).
e-mail: ageneralov@gmail.com
Zhamkov Nikita Sergeevich — Saint Petersburg State University (Saint Petersburg).
e-mail: n.zhamkov@spbu.ru

Abstract

We give a complete description of the BV-structure on the Hochschild cohomology for local algebras of semidihedral type over an algebraically closed field of characteristic 2. In Erdmann's classification, these algebras are described by a parameter k. We consider the case of even parameter $k > 3$. The methods of comparison morphisms and contracting homotopies are applied.

Keywords: Hochschild cohomology, homological algebra, Gerstenhaber bracket, Lie algebra, BV-structure.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Generalov, A. I., Zhamkov, N. S. 2025, “BV-structure on the Hochschild cohomology algebra of local algebras of semidihedral type”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 88–97.

1. Введение

Для любой ассоциативной алгебры R можно ввести её алгебру когомологий Хохшильда $HH^*(R)$. Этот инвариант богат на структуры: например, $HH^*(R)$ является градуированно коммутативной алгеброй [1] и обладает структурой градуированной алгебры Ли, которую впервые ввёл Герстенхабер [3].

Трэдлер впервые определил и описал BV-структуру на когомологиях Хохшильда в своей работе [2]. Проблеме описания и вычисления BV-структуры и скобки Герстенхабера посвящены работы Меничи (см. [4]), Янга (см. [5]), Трэдлера (см. [6]) и Иванова (см. [7]).

Существенную сложность в работе с вышеупомянутыми структурами вызывает их тесная связь с бар-резольвентой, размерность членов которой растёт экспоненциально. В данной работе используется метод связывающих гомоморфизмов, хорошо представленный в статье А. И. Генералова и Семёнова [13] или в более ранней статье второго автора [11]. Стоит отметить, что помимо данного метода существует подход, использующий диагональные аппроксимации, например, в статье Волкова [8] или в более ранней статье Каледина [12].

Пусть R_k – серия локальных алгебр полудиэдрального типа над алгебраически замкнутым полем характеристики два (см. классификацию в [14]). В настоящей работе вычислена BV-структура на алгебре когомологий Хохшильда для подсемейства алгебр R_k с чётным k. Ранее в работе А. И. Генералова [9] была найдена минимальная проективная бимодульная резольвента и описана мультипликативная структура алгебры когомологий Хохшильда для всех алгебр этой серии.

Для ассоциативной алгебры R над полем K обозначим через $R^e = R \otimes R^{op}$ (или Λ) её обёртывающую алгебру. Для алгебры R можно построить свободную R^e-резольвенту: $(Bar(R), d)$

$$R \xleftarrow{\ \mu\ } R^{\otimes 2} \xleftarrow{\ d_0\ } R^{\otimes 3} \xleftarrow{\ d_1\ } \cdots \xleftarrow{\ d_{n-1}\ } R^{\otimes(n+2)} \xleftarrow{\ d_n\ } R^{\otimes(n+3)} \ldots,$$

$$d_{n-1}(a_0 \otimes ... \otimes a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_0 \otimes ... \otimes a_i a_{i+1} \otimes ... \otimes a_{n+1}.$$

Эта резольвента называется бар-резольвентой.Можно также рассматривать нормализованную бар-резольвенту, в которой $\overline{Bar}(R)_n = R \otimes \overline{R}^{\otimes n} \otimes R$, где $\overline{R} = R/_K\langle 1_R\rangle$.

Определение 1. *Когомологии Хохшильда алгебры R определяются как* Ext-*группы в категории R-бимодулей:*

$$HH^n(R) = \mathrm{Ext}^n_{R^e}(R, R).$$

Таким образом, когомологии Хохшильда можно вычислить, используя бар-резольвенту $HH^n(R) = H^n(Hom_{R^e}(Bar_*(R), R), \delta^*)$, где $\delta^n = Hom_{R^e}(d_n, R)$.
Заметим ещё, что $Hom_{R^e}(Bar_n, R) \cong Hom_K(R^{\otimes n}, R) =: C^n(R)$. На когомологиях Хохшильда вводится структура градуированной алгебры.

Определение 2. *Определим кап-произведение формулой:*

$$(f \smile g)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+m}) = f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \cdot g(a_{n+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+m}),$$

где $f \in C^n(R)$, $g \in C^m(R)$.

Это произведение распространяется на $HH^*(R) = \bigoplus_{n \geqslant 0} HH^n(R)$, и относительно него $HH^*(R)$ – градуированно коммутативная алгебра.

На когомологиях Хохшильда можно ввести ещё одну структуру. Пусть $f \in C^n(R)$, $g \in \in C^m(R), n, m \geq 1$, тогда положим

$$f \circ_i g(a_1 \otimes ... \otimes a_{n+m-1}) =$$

$$= f(a_1 \otimes ... \otimes a_{i-1} \otimes g(a_i \otimes ... \otimes a_{i+m-1}) \otimes a_{i+m} \otimes ... \otimes a_{m+n-1});$$

если $m = 0$, то

$$f \circ_i g(a_1 \otimes ... \otimes a_{n-1}) = f(a_1 \otimes ... \otimes a_{i-1} \otimes g \otimes a_i \otimes ... \otimes a_{n-1}).$$

В остальных случаях полагаем $f \circ_i g$ равным нулю. Далее определим

$$f \circ g := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)(m-1)} f \circ_i g.$$

И, наконец, скобка Герстенхабера определится формулой:

$$[f, g] = f \circ g - (-1)^{(n-1)(m-1)} g \circ f.$$

Определение 3. Алгеброй Герстенхабера *называется тройка* $(A^*, \smile, [-,-])$, *где:*

- $A^* = \bigoplus_{n \geq 0} A^n$ – *градуированное векторное пространство;*
- $(A^*, \smile)$ – *градуированно коммутативная ассоциативная алгебра;*
- $(A^*, [-,-])$ – *градуированная алгебра Ли степени* -1;

удовлетворяющие тождеству совместимости (тождеству Пуассона):

$$[a, b \smile c] = [a, b] \smile c + (-1)^{(|a|-1)|b|} b \smile [a, c].$$

Теорема 1. [3] $(HH^*(R), \smile, [-,-])$ *является градуированной алгеброй Ли, в которой выполнено тождество Пуассона.*

Определение 4. *Алгеброй Баталина-Вилковского (или BV-алгеброй) называется алгебра Герстенхабера* $(A^*, \smile, [-,-])$ *вместе с оператором* Δ *степени* -1, *таким, что* $\Delta \circ \Delta = 0$ *и*

$$[a, b] = -(-1)^{(|a|-1)|b|}(\Delta(a \smile b) - \Delta(a) \smile b - (-1)^{|a|} a \smile \Delta(b)).$$

Определение 5. *Ассоциативная алгебра* R *над полем* K *называется симметрической, если существует невырожденная симметрическая билинейная форма* $\langle -,- \rangle : R \times R \to K$, *удовлетворяющая условию:*

$$\langle ab, c \rangle = \langle a, bc \rangle \quad \text{для всех } a, b, c \in R.$$

Если исходная алгебра симметрическая, то на когомологиях Хохшильда можно ввести BV-структуру следующим образом: пусть $f \in C^n(R)$, тогда $\Delta_{Bar}(f) \in C^{n-1}(R)$ определяется соотношением:

$$\langle \Delta_{Bar}(f)(a_1 \otimes ... \otimes a_{n-1}), a_n \rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i(n-1)} \langle f(a_i \otimes ... \otimes a_{n-1} \otimes a_n \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_{i-1}), 1 \rangle.$$

Теорема 2. [2] *Выше определённый оператор Δ_{Bar} задаёт BV-структуру на когомологиях Хохшильда симметрической алгебры R.*

2. Стягивающая гомотопия

Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики 2. Для $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, определим K-алгебру $R_k = K\langle X, Y \rangle / I$, где I — идеал свободной алгебры $K\langle X, Y \rangle$, порождённый элементами

$$X^2 - Y(XY)^{k-1}, \quad Y^2.$$

Образы элементов X, Y относительно канонического гомоморфизма из $K\langle X, Y \rangle$ в R_k обозначаем через x и y соответственно. Алгебра R_k — симметрическая локальная алгебра, имеющая ручной тип представления [14, III.1.2]; кроме того, в терминах [14, гл. VIII] алгебра R_k — это алгебра полудиэдрального типа.

Замечание 1. *Как правый R-модуль, Λ свободен с базисом*

$$1 \otimes 1,\ (xy)^i \otimes 1,\ x \otimes 1,\ y \otimes 1,\ (yx)^i \otimes 1,\ y(xy)^i \otimes 1,\ x(yx)^i \otimes 1,\ x^3 \otimes 1,\ 1 \leq i \leq k-1.$$

Через $Q_\bullet \xrightarrow{\mu} R$ будем обозначать минимальную проективную бимодульную резольвенту алгебры R, построенную в [9].

Определение 6. *Стягивающей гомотопией для комплекса*

$$R \xleftarrow{\mu} P_0 \xleftarrow{d_0} P_1 \xleftarrow{d_1} ...$$

называется гомоморфизм правых R-модулей $\eta : R \longrightarrow P_0$ и набор гомоморфизмов правых R-модулей $t_i : P_i \longrightarrow P_{i+1}$, $i \geq 0$, таких, что $\mu\eta = 1_R$, $\eta\mu + d_0 t_0 = 1_{P_0}$, $d_{i+1} t_{i+1} + t_i d_i = 1_{P_{i+1}}$.

Построим бикомплекс (в категории правых R-модулей):

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \cdots & \cdots & \\
 & & & \Lambda \arrow[r, "m"] & \Lambda \arrow[u, "T"'] \arrow[r, "\beta"] & \Lambda \arrow[u, "0"'] \arrow[r, "\beta"] & \cdots \\
 & & \Lambda \arrow[r, "W"] & \Lambda^2 \arrow[u, "(\mu_1,\mu_2)"'] \arrow[r, "(\beta,\xi)"] & \Lambda \arrow[u, "0"'] \arrow[r, "\beta"] & \Lambda \arrow[u, "0"'] \arrow[r, "\beta"] & \cdots \\
 & \Lambda \arrow[r, "m"] & \Lambda \arrow[u, "T"'] \arrow[r, "\beta"] & \Lambda \arrow[u, "0"'] \arrow[r, "\beta"] & \Lambda \arrow[u, "0"'] \arrow[r, "\beta"] & \Lambda \arrow[u, "0"'] \arrow[r, "\beta"] & \cdots \\
\Lambda \arrow[r, "W"] & \Lambda^2 \arrow[u, "(\mu_1,\mu_2)"'] \arrow[r, "(\beta,\xi)"] & \Lambda \arrow[u, "0"'] \arrow[r, "\beta"] & \Lambda \arrow[u, "0"'] \arrow[r, "\beta"] & \Lambda^2 \arrow[u, "0"'] \arrow[r, "\beta"] & \Lambda \arrow[u, "0"'] \arrow[r, "\beta"] & \cdots
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

Зададим соответствующие морфизмы следующими соотношениями.

$$
\beta(b\otimes 1)=\begin{cases} x(yx)^{i-1}\otimes 1, & b=(xy)^i,\ 1\le i\le k,\\ (yx)^i\otimes 1, & b=y(xy)^i,\ 0\le i\le k-1,\\ 0, & b=(yx)^i, x(yx)^i,\ 0\le i\le k-1,\end{cases}
$$

$$
\xi(b\otimes 1)=\begin{cases} (yx)^{i-1}\otimes (xy)^{k-1}, & b=(yx)^i,\ 1\le i\le k,\\ x(yx)^{i-1}\otimes (xy)^{k-1}, & b=x(yx)^i,\ 0\le i\le k-1,\\ 0, & b=y(xy)^i, (xy)^i,\ 0\le i\le k-1,\end{cases}
$$

$$
\mu_1(b\otimes 1)=\begin{cases} x\otimes y, & b=x^3,\\ x\otimes 1, & b=x(yx)^{k-1},\\ 0, & \text{для остальных}\, b,\end{cases}
$$

$$
\mu_2(b\otimes 1)=\begin{cases} y(xy)^{i-1}\otimes 1, & b=(yx)^i,\ 1\le i\le k-1,\\ (xy)^i\otimes 1, & b=x(yx)^i,\ 0\le i\le k-1,\\ y(xy)^{k-1}\otimes 1+1\otimes y(xy)^{k-1}, & b=x^3,\\ 1\otimes x, & b=y(xy)^{k-1},\\ 0, & b=(xy)^i, y(xy)^i,\ 0\le i\le k-1,\end{cases}
$$

$$
m(b\otimes 1)=\begin{cases} \sum_{\substack{\alpha+\beta=i-1\\ \alpha,\beta\ge 0}}(yx)^\alpha\otimes (xy)^\beta, & b=(yx)^i,\ 1\le i\le k,\\ \sum_{\substack{\alpha+\beta=i-1\\ \alpha,\beta\ge 0}} x(yx)^\alpha\otimes (xy)^\beta, & b=x(yx)^i,\ 0\le i\le k-1,\\ 0, & b=y(xy)^i, (xy)^i,\ 0\le i\le k-1,\end{cases}
$$

$$
T(b\otimes 1)=\begin{cases} 1\otimes y, & b=x^3,\\ 1\otimes 1, & b=x(yx)^{k-1},\\ 0, & \text{для остальных}\, b,\end{cases}
$$

$$
W((yx)^i\otimes 1)=\begin{pmatrix} \sum_{\substack{\alpha+\beta=i-1\\ \alpha,\beta\ge 0}}(yx)^\alpha\otimes x(yx)^\beta\\ \sum_{\substack{\alpha+\beta=i-1\\ \alpha,\beta\ge 0}}(yx)^\alpha y\otimes (yx)^\beta \end{pmatrix},\ 1\le i\le k-1,
$$

$$W(x(yx)^i \otimes 1) = \begin{pmatrix} \sum_{\substack{\alpha+\beta=i-1\\ \alpha,\beta\geq 0}} (xy)^\alpha x \otimes x(yx)^\beta \\ \sum_{\substack{\alpha+\beta=i\\ \alpha,\beta\geq 0}} (xy)^\alpha \otimes (yx)^\beta \end{pmatrix}, \ 0 \leq i \leq k-1,$$

$$W((xy)^i \otimes 1) = \begin{pmatrix} \sum_{\substack{\alpha+\beta=i-1\\ \alpha,\beta\geq 0}} (xy)^\alpha x \otimes (xy)^\beta \\ \sum_{\substack{\alpha+\beta=i-1\\ \alpha,\beta\geq 0}} (xy)^\alpha \otimes y(xy)^\beta \end{pmatrix}, \ 1 \leq i \leq k-1,$$

$$W(y(xy)^i \otimes 1) = \begin{pmatrix} \sum_{\substack{\alpha+\beta=i\\ \alpha,\beta\geq 0}} (yx)^\alpha \otimes (xy)^\beta \\ \sum_{\substack{\alpha+\beta=i-1\\ \alpha,\beta\geq 0}} (yx)^\alpha y \otimes y(xy)^\beta \end{pmatrix}, \ 0 \leq i \leq k-1,$$

$$W(x^3 \otimes 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \otimes x + 1 \otimes y(xy)^{k-1} + y(xy)^{k-1} \otimes 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Тотализация $(T_n, t_n)_{n\geq 0}$ этого бикомплекса вместе с гомоморфизмом $\eta : R \longrightarrow \Lambda$, $\eta(1) = 1 \otimes 1$ является стягивающей гомотопией для комплекса $Q_\bullet$ (дополненного μ).*

Доказательство. Доказательство проводится непосредственной проверкой всех соответствующих соотношений. □

Для вычисления оператора Δ в терминах резольвенты $Q_\bullet \to R$ построим связывающие гомоморфизмы комплексов:

$$\Phi : Q_\bullet \longrightarrow \overline{Bar}_\bullet(R), \quad \Psi : \overline{Bar}_\bullet(R) \longrightarrow Q_\bullet.$$

Заметим, что для комплекса $\overline{Bar}_\bullet(R)$ определена стягивающая гомотопия

$$s_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes 1) = 1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes 1.$$

Положим $\Phi_n = s_{n-1}\Phi_{n-1}d_Q^{n-1}$, $n \geq 1$, и $\Phi_0 = \mathrm{Id}$. Следуя [10], определим гомоморфизм Ψ рекуррентно:

$$\Psi_0 = \mathrm{Id},$$

$$\Psi_n(1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes 1) = t_{n-1}(a_1\Psi_{n-1}(1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes 1)).$$

Пусть $a \in Hom_\Lambda(Q_n, R)$, $n \geq 1$, тогда:

$$\Delta(a) = \Delta_{Bar}(a\Psi_n)\Phi_{n-1}, \tag{1}$$

$$\Delta(a) = 0 \ \text{для } a \in Hom_\Lambda(Q_0, R).$$

3. Формулировка основного результата

Пусть по-прежнему K – алгебраически замкнутое поле характеристики 2, $R = R_k$, где $k \in \mathbb{N}$, k чётное, $k > 2$. В работе [9] показано, что алгебра $HH^*(R)$ может быть представлена с помощью образующих и определяющих соотношений следующим образом.

Образующие:

$$-\text{степени } 0 : p_1 = xy + yx,\ p_2 = x(yx)^{k-1},\ p_3 = y(xy)^{k-1},\ p_4 = x^3, \tag{2}$$

$$-\text{степени } 1 : u_1 = (1, y(xy)^{k-2}),\ u_2 = (0, 1),\ u_3 = (y, 0), \tag{3}$$

$$-\text{степени } 2 : v_1 = (y, 0),\ v_2 = (0, y),\ v_3 = (x, 0), \tag{4}$$

$$-\text{степени}\,3: w_1 = (0,1),\; w_2 = (0,y), \tag{5}$$

$$-\text{степени}\,4: t = (0,0,1). \tag{6}$$

Соотношения:

$$
\begin{aligned}
&p_1^k = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = 0,\\
&p_ip_j = 0 \quad \text{для } 1 \le i < j \le 4;\\
&p_1u_1 = p_2u_2, \quad p_3u_1 = p_2u_2, \quad p_1u_2 = 0,\\
&p_3u_3 = p_4u_3 = 0, \quad p_1u_1 = p_2u_3, \quad p_2u_2 = p_1^{k-1}u_3,\\
&p_3v_1 = p_4v_1 = p_1^{k-1}v_2 = p_3v_2 = p_4v_2 = 0, \quad p_1v_1 = p_2v_2,\\
&p_2v_1 = p_4v_1^2,\\
&p_1v_3 = p_2v_3 = p_4v_3 = 0,\\
&u_1u_2 = u_2u_3 = u_3^2 = 0, \quad p_2v_2 = p_3v_3 = p_4u_2^2,\\
&p_3w_2 = p_4w_2 = 0,\\
&u_2^2 = u_2v_2 = 0, \quad p_1w_1 = u_1v_2, \quad p_3w_1 = u_2v_1, \quad p_4w_1 = p_2w_2,\\
&u_3v_3 = 0, \quad p_3w_1 = u_1v_3 = p_1^{k-2}u_3v_2, \quad p_1w_1 = u_2v_3,\\
&p_4w_1 = u_3v_1, \quad p_1w_2 = u_3v_2, \quad u_1^2u_3 = u_1v_1 + p_2w_1,\\
&v_1^2 = v_1v_2 = 0, \quad v_2^2 = p_1^2t,\\
&v_1v_3 = v_2v_3 = v_3^2 = 0,\\
&u_2w_1 = u_2w_2 = u_3w_2 = 0, \quad u_1w_2 = u_3w_1,\\
&v_2w_1 = p_3w_2t,\\
&v_3w_2 = 0, \quad v_1w_2 = p_4w_1t, \quad v_2w_2 = p_1u_3t, \quad v_3w_1 = p_3u_1t,\\
&u_1u_3w_1 = \begin{cases} v_1w_1 + p_2u_1t, & \text{если } k > 2,\\ v_1w_1 + (p_2u_1 + p_4u_2)t, & \text{если } k = 2,\end{cases}\\
&w_2^2 = 0, \quad w_1^2 = u_1^2t,\\
&w_1w_2 = u_1u_3t.
\end{aligned}
$$

BV-структура на алгебре $HH^*(R)$ описывается следующим образом:

Теорема 4. *Для алгебры R_k, где k чётное и $k > 2$, BV-оператор из теоремы 2 определяется следующими соотношениями:*

$$\Delta(p_3u_1) = \Delta(p_2u_2) = p_1^{k-1}, \quad \Delta(p_4u_1) = \Delta(p_2u_3) = p_2, \quad \Delta(p_4u_2) = p_3,$$

$$\Delta(u_3u_1) = u_1,$$

$$\Delta(p_1w_1) = u_2^2, \quad \Delta(p_2w_1) = u_1^2,$$

$$\Delta(p_4w_1) = v_1, \quad \Delta(p_1w_2) = v_2, \quad \Delta(u_1v_1) = u_1^2,$$

$$\Delta(p_3t) = \Delta(p_4t) = w_2, \quad \Delta(u_1w_2) = \Delta(u_3w_1) = w_1,$$

$$\Delta(v_1w_1) = p_4t, \quad \Delta(v_3w_1) = p_1^{k-1}t + p_4t, \quad \Delta(v_1w_2) = u_1w_2 + p_2t,$$

$$\Delta(w_2w_1) = u_1t.$$

На остальных образующих и их произведениях оператор Δ равен нулю.

Доказательство. Покажем на элементах малых степеней основную схему вычислений. Дальше всё делается аналогично, но более громоздко. Распишем формулу (1) для элементов первой степени:

$$\Delta(a) = \sum_{z\in\beta,\, b\neq 1} \langle at_0(z\otimes 1), 1\rangle z^*, \quad a \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1, R).$$

Отсюда нетрудными вычислениями получаем:

$$\Delta(p_3u_1) = \Delta(p_2u_2) = p_1^{k-1}, \quad \Delta(p_4u_1) = \Delta(p_2u_3) = p_2, \quad \Delta(p_4u_2) = p_3.$$

Для остальных образующих и их произведений степени 1 значение оператора Δ равно нулю.

Далее для элементов второй степени:

$$\Delta(a)\begin{pmatrix}1\otimes 1\\ 0\end{pmatrix} = \sum_{z\in\beta,\, z\neq 1} \langle as_1ys_0(z\otimes 1) + as_1zs_0(y\otimes 1), 1\rangle z^*,$$

$$\Delta(a)\begin{pmatrix}0\\ 1\otimes 1\end{pmatrix} = \sum_{z\in\beta,\, z\neq 1} \langle as_1xs_0(z\otimes 1) + as_1zs_0(x\otimes 1), 1\rangle z^*.$$

Следовательно,

$$\Delta(u_3u_1) = u_1.$$

Для остальных образующих и их произведений степени 2 значение оператора Δ равно нулю. □

Замечание 2. *На образующих из множества элементов, указанных в (2)–(6), оператор Δ принимает нулевые значения.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hochschild G. On the cohomology groups of an associative algebra // Annals of Mathematics. — 1945. — Vol. 46, No. 1. — P. 58–67.

2. Tradler T. The Batalin-Vilkovisky algebra on Hochschild cohomology induced by infinity inner products // Annales de l'Institut Fourier. — 2008. — Vol. 58, No. 7. — P. 2351–2379.

3. Gerstenhaber M. The cohomology structure of an associative ring // Annals of Mathematics. — 1963. — Vol. 78, No. 2. — P. 267–288.

4. Menichi L. Batalin-Vilkovisky algebras and cyclic cohomology of Hopf algebras // K-Theory. — 2004. — Vol. 32, No. 3. — P. 231–251.

5. Yang T. Batalin-Vilkovisky algebra structure on the Hochschild cohomology of truncated polynomials // arXiv [Электронный ресурс]. — 2007. — URL: https://arxiv.org/abs/0707.4213 (дата обращения: 01.01.2024).

6. Menichi L. Batalin-Vilkovisky algebra structures on Hochschild cohomology // Bulletin de la Société Mathématique de France. — 2009. — Vol. 137, No. 2. — P. 277–295.

7. Иванов А. А. BV-структура на когомологиях Хохшильда локальных алгебр кватернионного типа в характеристике 2 // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2014. — Т. 430. — С. 136–185.

8. Volkov Y. BV-differential on Hochschild cohomology of Frobenius algebras // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2016. — Vol. 220, No. 10. — P. 3384–3402.

9. Генералов А. И. Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа. I. Групповые алгебры полудиэдральных групп // Алгебра и анализ. — 2009. — Т. 21, № 2. — С. 1–59.

10. Ivanov A. A., Ivanov S. O., Volkov Y., Zhou G. BV structure on Hochschild cohomology of the group ring of the quaternion group of order eight in characteristics two // Journal of Algebra. — 2015. — Vol. 435. — P. 174–203.

11. Семенов А. В. BV-структура на когомологиях Хохшильда исключительных локальных алгебр кватернионного типа: случай малого параметра // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2022. — Т. 513. — С. 164–192.

12. Kaledin D. Cyclic homology with coefficients // Algebra, Arithmetic and Geometry. — 2010. — Vol. 270. — P. 23–47. — (Progress in Mathematics).

13. Generalov A. I., Semenov A. V. BV-structure on Hochschild cohomology for exceptional local algebras of quaternion type. The case of an even parameter // Алгебра и анализ. — 2023. — Т. 35, № 4. — С. 79–110.

14. Erdmann K. Blocks of tame representation type and related algebras. — Berlin: Springer-Verlag, 1990. — 1428 p. — (Lecture Notes in Mathematics).

15. Le J., Zhou G. On the Hochschild cohomology ring of tensor products of algebras // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2014. — Vol. 218, No. 8. — P. 1463–1477.

REFERENCES

1. Hochschild, G. 1945, “On the cohomology groups of an associative algebra”, *Annals of Mathematics*, 46(1), pp. 58–67.

2. Tradler, T. 2008, “The Batalin-Vilkovisky algebra on Hochschild cohomology induced by infinity inner products”, *Annales de l’Institut Fourier*, 58(7), pp. 2351–2379.

3. Gerstenhaber, M. 1963, “The cohomology structure of an associative ring”, *Annals of Mathematics*, 78(2), pp. 267–288.

4. Menichi, L. 2004, “Batalin-Vilkovisky algebras and cyclic cohomology of Hopf algebras”, *K-Theory*, 32(3), pp. 231–251.

5. Yang, T. 2007, “Batalin-Vilkovisky algebra structure on the Hochschild cohomology of truncated polynomials”, *arXiv* [Preprint], Available at: https://arxiv.org/abs/0707.4213.

6. Menichi, L. 2009, “Batalin-Vilkovisky algebra structures on Hochschild cohomology”, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 137(2), pp. 277–295.

7. Ivanov, A.A. 2014, “BV-algebra structure on Hochschild cohomology of local algebras of quaternion type in characteristic 2”, *J Math Sci*, 219, pp. 427–461.

8. Volkov, Y. 2016, “BV-differential on Hochschild cohomology of Frobenius algebras”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 220(10), pp. 3384–3402.

9. Generalov, A.I. 2010, “Hochschild cohomology of algebras of semidihedral type. I. Group algebra semidihedral group”, *St. Petersburg Math. J.*, 21:2, pp. 163–201.

10. Ivanov, A.A., Ivanov, S.O., Volkov, Y. and Zhou, G. 2015, “BV structure on Hochschild cohomology of the group ring of the quaternion group of order eight in characteristics two”, *Journal of Algebra*, 435, pp. 174–203.

11. Semenov, A.V. 2022, “BV-Structure on Hochschild Cohomology for Exceptional Local Algebras of Quaternion Type. The Case of Small Parameter”, *J Math Sci*, 288, pp. 379–397.

12. Kaledin, D. 2010, “Cyclic homology with coefficients”, in *Algebra, Arithmetic and Geometry*, Progress in Mathematics, 270, pp. 23–47.

13. Generalov, A.I. and Semenov, A.V. 2023, “BV-structure on Hochschild cohomology for exceptional local algebras of quaternion type. The case of an even parameter”, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 35(4), pp. 653–676.

14. Erdmann, K. 1990, *Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras*, Berlin: Springer-Verlag, 1428 p.

15. Le, J. and Zhou, G. 2014, “On the Hochschild cohomology ring of tensor products of algebras”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 218(8), pp. 1463–1477.

Получено: 24.06.2025
Принято в печать: 17.10.2025