

УДК 514.133

КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕТРАЭДРОВ
С НЕГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ГРАНЯМИ
В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ
ПРОСТРАНСТВЕ
ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Л. Н. Ромакина (г. Саратов)

Аннотация

Работа содержит первое исследование тетраэдров гиперболического пространства $\hat{H}^3$ положительной кривизны.

Пространство $\hat{H}^3$ реализуется на внешней относительно овальной гиперквадрики области проективного трехмерного пространства, т. е. на идеальной области пространства Лобачевского.

Все прямые пространства $\hat{H}^3$ по наличию общих точек с абсолютом могут быть эллиптическими, параболическими или гиперболическими. В зависимости от положения по отношению к абсолюту все плоскости пространства $\hat{H}^3$ относятся к трем типам: эллиптические, коевклидовы и гиперболические плоскости положительной кривизны. Углы эллиптической плоскости одного типа, плоскости коевклидовой — трех типов, а гиперболической плоскости положительной кривизны — пятнадцати типов. Также к пятнадцати типам относятся все двугранные углы пространства $\hat{H}^3$.

Всевозможные наборы типов граней определяют в пространстве $\hat{H}^3$ пятнадцать типов тетраэдров. В работе проведена классификация тетраэдров с негиперболическими гранями. Все такие тетраэдры относятся к пяти типам. Доказано, что каждое ребро тетраэдра с негиперболическими гранями принадлежит эллиптической, замкнутой в пространстве $\hat{H}^3$, прямой.

В дальнейшей классификации тетраэдров с негиперболическими гранями используем понятие α -границ тетраэдра. С каждой точкой пространства $\hat{H}^3$ связан конус касательных к абсолютной овальной гиперквадрике, названный световым конусом точки. Световой линией грани тетраэдра названа линия пересечения плоскости, содержащей данную грань, со световым конусом противоположной к данной грани вершины тетраэдра. Грань тетраэдра пространства $\hat{H}^3$ названа α -гранью, если она содержит полностью свою световую линию. Доказана теорема о количестве α -граней:

тетраэдр с негиперболическими гранями в пространстве $\hat{H}^3$ либо не содержит α -граней, либо содержит одну α -грань, либо все его грани являются α -гранями.

Количество α -граней и их типы определяют классы и роды тетраэдров с негиперболическими гранями. В работе установлены типы двугранных углов в тетраэдре каждого класса (рода).

Ключевые слова: гиперболическое пространство $\hat{H}^3$ положительной кривизны, классификация тетраэдров гиперболического пространства положительной кривизны.

Библиография: 15 наименований.

CLASSIFICATION OF TETRAHEDRONS WITH NOT HYPERBOLIC SIDES IN A HYPERBOLIC SPACE OF POSITIVE CURVATURE

L. N. Romakina

Abstract

The work contains the research of tetrahedrons of a hyperbolic space $\hat{H}^3$ of positive curvature.

The space $\hat{H}^3$ is realized by on external domain of projective three-dimensional space with respect to the oval hyperquadric, т. е. on ideal domain of the Lobachevskii space.

All lines of the space $\hat{H}^3$ on existence of the common points with the absolute can be elliptic, parabolic or hyperbolic. All planes of the space $\hat{H}^3$ depending on position with respect to the absolute belong to the three types: elliptic, coeuclidean and hyperbolic of positive curvature. The angles of the elliptic plane of one type. The angles of the coeuclidean plane of three types. The angles of the hyperbolic plane of positive curvature of fifteen types. Also all dihedral angles of the space $\hat{H}^3$ belong to fifteen types.

Various sets of types of sides define in the space $\hat{H}^3$ fifteen types of tetrahedrons. In work the classification of tetrahedrons with not hyperbolic sides is carried out. All such tetrahedrons belong to five types. It is proved that each edge of a tetrahedron with not hyperbolic sides belongs to the elliptic line. The elliptic line is the closed line in the space $\hat{H}^3$.

In further classification of tetrahedrons with not hyperbolic sides we use concept α -sides of the tetrahedron. In the space $\hat{H}^3$ the cone of tangents to absolute oval hyperquadric is connected with each point. This cone we called a light cone of a point. The curve of crossing of the side plane with a light cone of tetrahedron top, opposite to this side, is called the light curve of a side of a tetrahedron. The tetrahedron side in the space $\hat{H}^3$ is called a α -side if

it contains completely the light curve. The following theorem is proved. The tetrahedron with not hyperbolic sides in the space $\hat{H}^3$ or doesn't contain the α -sides, or supports one α -side, or all its sides are the α -sides.

Quantity α -sides and their types define classes and sorts of the tetrahedrons with not hyperbolic sides. In work the types of dihedral angles in a tetrahedron of each class (sort) are established.

Keywords: hyperbolic space $\hat{H}^3$ of positive curvature, classification of tetrahedrons of a hyperbolic space of positive curvature.

Bibliography: 4 titles.

1. Трехмерное гиперболическое пространство положительной кривизны

Трехмерное гиперболическое пространство $\hat{H}^3$ положительной кривизны рассматриваем в проективной модели Кэли – Клейна [1] на идеальной области пространства Лобачевского Λ^3 , т. е. на внешней относительно овальной гиперквадрики [2] γ области проективного пространства P_3 . Пространства $\hat{H}^3$ и Λ^3 в объединении с гиперквадрикой γ образуют *расширенное гиперболическое пространство* H^3 [3 – 6].

Овальную гиперквадрику γ называют *абсолютом* каждого из пространств $\hat{H}^3$, Λ^3 и H^3 . Группу G проективных автоморфизмов овальной гиперквадрики γ — *фундаментальной группой* пространств $\hat{H}^3$, Λ^3 и H^3 .

Прямая пространства H^3 в зависимости от расположения по отношению к абсолюту может быть одного из трех типов. *Гиперболические (эллиптические)* прямые пересекают абсолютную гиперквадрику в двух вещественных (мнимо сопряженных точках); *параболические* прямые касаются абсолютной гиперквадрики.

Эллиптические прямые пространства H^3 принадлежат полностью пространству $\hat{H}^3$, их называют *эллиптическими прямыми* пространства $\hat{H}^3$. Гиперболические прямые пространства H^3 разделены абсолютом на две части. Внешнюю относительно абсолюта часть гиперболической прямой пространства H^3 называют *гиперболической прямой* пространства $\hat{H}^3$. Каждая гиперболическая прямая пространства $\hat{H}^3$ имеет две вещественные бесконечно удаленные точки. Собственные для $\hat{H}^3$ части параболических прямых пространства H^3 называют *параболическими прямыми* пространства $\hat{H}^3$. Как и евклидова прямая каждая параболическая прямая пространства $\hat{H}^3$ имеет одну бесконечно удаленную точку.

Каждая плоскость пространства P_3 пересекает овальную гиперквадрику по линии второго порядка, которая может быть невырожденной (овальной или нулевой), или вырожденной [2]. Овальная гиперквадрика пространства P_3 не содержит вещественных прямых, поэтому вырожденной линией второго порядка пересечения плоскости с овальной гиперквадрикой в P_3 может быть только пара мнимо сопряженных прямых.

Тип плоскости пространства $\hat{H}^3$ определен типом линии второго порядка, по которой данная плоскость пересекает абсолютную гиперквадрику. Плоскости пространства $\hat{H}^3$, пересекающие абсолют по нулевой (овальной) линии, являются *эллиптическими* [6 – 8] (*гиперболическими плоскостями положительной кривизны*, или плос-

костями типа $\hat{H}$ [5, 9, 10]), касательные к абсолюту плоскости — *коевклидовыми* [6 – 8, 11] плоскостями.

Эллиптические, гиперболические положительной кривизны и коевклидовы плоскости пространства $\hat{H}^3$ условимся обозначать символом E , H и C соответственно.

Расположение пары прямых по отношению к абсолюту определяет на коевклидовой плоскости три типа углов [11], на гиперболической плоскости положительной кривизны — пятнадцать типов углов [9, 12]. На плоскости эллиптической все углы одного типа.

В пространстве $\hat{H}^3$ расположение пары плоскостей относительно абсолюта определяет пятнадцать типов двугранных углов. Приведем те из них, которые потребуются в данной работе.

Пусть α и β — эллиптические плоскости пространства $\hat{H}^3$. Плоскости α , β не имеют общих вещественных точек с абсолютом и разбивают пространство P_3 , содержащее $\hat{H}^3$, на два полупространства. То из полупространств, которое содержит (не содержит) абсолютную гиперквадрику γ , назовем *двугранным эллиптическим псевдоуглом* (*двугранным эллиптическим углом*) между плоскостями α и β .

Пучки эллиптических плоскостей гиперболические, так как через общую прямую двух эллиптических плоскостей проходят две вещественные касательные к абсолюту плоскости. Следовательно, двугранные эллиптические углы и двугранные эллиптические псевдоуглы измеримы с помощью абсолюта, тип измерения — гиперболический.

Пусть α и β — коевклидовы плоскости пространства $\hat{H}^3$. То из полупространств пространства P_3 между плоскостями α и β , которое содержит (не содержит) абсолютную гиперквадрику γ , назовем *двугранной ковалианой* (*двугранной валианой*) между плоскостями α и β .

Заметим, что в отличие от плоской ковалианы, состоящей из двух связанных непесекающихся полуковалиан, двугранная ковалиана — связное множество в $\hat{H}^3$.

В образуемом коевклидовыми плоскостями α и β гиперболическом пучке плоскостей измерение вводится с помощью самих плоскостей α и β . Следовательно, двугранная ковалиана и двугранная валиана — неизмеримые углы пространства $\hat{H}^3$. Каждые две двугранные ковалианы (двугранные валианы) конгруэнтны.

Пусть α — эллиптическая, β — коевклидова плоскости пространства $\hat{H}^3$. То из полупространств пространства P_3 между плоскостями α и β , которое содержит (не содержит) абсолютную гиперквадрику γ , назовем *двугранным эллиптическим псевдофлагом* (*двугранным эллиптическим флагом*) между плоскостями α и β .

Грани двугранного эллиптического флага (двугранного эллиптического псевдофлага) определяют гиперболический пучок плоскостей, измерение в котором вводится с помощью касательных плоскостей к абсолюту, одна из которых совпадает с гранью. Следовательно, двугранные эллиптические флаги (двугранные эллиптические псевдофлаги) не имеют инварианта группы G , т. е. неизмеримы в $\hat{H}^3$.

Тип прямой, тип плоскости, тип плоского угла и тип двугранного угла — инварианты преобразований группы G .

2. Определение многогранника в $\hat{H}^3$

Определение многогранника в пространстве $\hat{H}^3$ дадим по аналогии с определением многогранника в копсевдоевклидовом пространстве [13] (см. для сравнения [14, 15]).

Плоским n -реберником, или *плоским многореберником*, плоскости с проективной метрикой¹ назовем совокупность n отрезков, циклически соединяющих n точек, разбивающую данную плоскость² на две связные области. Указанные отрезки (точки) назовем *ребрами* (*вершинами*), а прямые, содержащие ребра, — *сторонами* плоского n -реберника.

Два плоских многореберника с общим ребром a назовем *смежными по ребру a* , или, кратко, *смежными*.

Упорядоченную последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ плоских многореберников пространства $\hat{H}^3$ назовем *соединяющей цепочкой многореберников* α_1, α_p , если для каждого числа q , $q = \overline{1, p-1}$, многореберники α_q, α_{q+1} являются смежными.

Многогранником пространства $\hat{H}^3$ назовем совокупность Ω конечного числа плоских многореберников этого пространства, удовлетворяющую условиям:

- 1) каждое ребро любого плоского многореберника совокупности Ω является ребром двух и только двух плоских многореберников данной совокупности;
- 2) для любых двух плоских многореберников совокупности Ω существует соединяющая цепочка из многореберников данной совокупности.

При выполнении условий 1), 2) многореберники совокупности Ω вместе с внутренними относительно них областями назовем *гранями*, их ребра — *ребрами*, а вершины — *вершинами* многогранника.

Ребро многогранника соответственно содержащей его прямой назовем *эллиптическим*, *гиперболическим* или *параболическим*. Ребро многогранника назовем *истинным*, если смежные по нему грани многогранника не лежат в одной плоскости.

Многогранник пространства $\hat{H}^3$, все грани которого трехреберники, назовем *тетраэдром* данного пространства.

Ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, назовем *противоположными*. Двугранные углы тетраэдра при противоположных ребрах назовем *противоположными* двугранными углами тетраэдра.

Вершину тетраэдра, не лежащую в грани, назовем *противоположной* для данной грани.

По определению все вершины и ребра тетраэдров — собственные для пространства $\hat{H}^3$ объекты. Грани тетраэдров могут содержать несобственные точки пространства $\hat{H}^3$.

¹ В случае пространства $\hat{H}^3$ рассматриваем эллиптические, коевклидовы или гиперболические плоскости положительной кривизны.

² Или некоторую компоненту плоскости, если число компонент данной плоскости больше единицы.

3. Схема классификации тетраэдров

Классификацию многогранников пространства $\hat{H}^3$ проводим по типу их расположения относительно абсолюта, описать который можно наборами следующих инвариантных относительно действий группы G характеристик многогранника: типы плоскостей, содержащих грани; типы двугранных углов; типы граней; типы ребер; типы плоских углов.

По типу плоскостей, содержащих грани тетраэдра, в пространстве $\hat{H}^3$ получаем пятнадцать типов тетраэдров. Условимся их обозначать соответственно типам плоскостей граней:

$$EEEE, EEEH, EEES, EENN, EENS, EECS, ENNN,$$

$$ECCC, EHCC, EHNC, NNNH, CCCC, NHCC, NNHC, HCCC.$$

В дальнейшей классификации тетраэдров пространства $\hat{H}^3$ учитываем типы граней тетраэдров. Все трехреберники эллиптической плоскости одного типа, гиперболическая плоскость $\hat{H}$ положительной кривизны содержит конечные трехреберники десяти типов [9]. Конечные трехреберники коевклидовой плоскости относятся к трем типам: трехреберник типа $eee(I)$ ($eee(II)$) имеет три эллиптических ребра, его внутренность не содержит (содержит) вещественную точку абсолюта; трехреберник типа eer имеет два эллиптических и одно параболическое ребро.

В данной работе ограничимся классификацией тетраэдров, не содержащих грани в плоскостях типа $\hat{H}$, к ним относятся тетраэдры пяти типов: $EEEE$, $EEES$, $EECS$, $ECCC$, $CCCC$. Все двугранные углы таких тетраэдров относятся к шести типам, описанным в п. 1.

ЛЕММА 1. *В пространстве $\hat{H}^3$ все ребра тетраэдра с негиперболическими гранями эллиптические.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в пространстве $\hat{H}^3$ F — тетраэдр с негиперболическими гранями. Каждая грань тетраэдра F принадлежит либо эллиптической, либо коевклидовой плоскости. Все прямые эллиптической плоскости эллиптические. Предположим, что тетраэдр F содержит грань $\bar{\kappa}$ в коевклидовой плоскости κ , и $\bar{a}$ — некоторое ребро этой грани. Прямая a , содержащая ребро $\bar{a}$, является либо эллиптической, не имеющей вещественных точек с абсолютом, либо параболической, проходящей через точку K касания плоскости κ с абсолютной гиперквадрикой. Если прямая a параболическая, то плоскость ς , содержащая грань тетраэдра F , смежную с гранью $\bar{\kappa}$ по ребру $\bar{a}$, имеет с абсолютом общую вещественную точку K , а значит, является либо коевклидовой плоскостью, либо плоскостью типа $\hat{H}$. Единственная коевклидова плоскость, проходящая через K , совпадает с κ . Поэтому ς может быть только гиперболической плоскостью положительной кривизны. Но это противоречит условию леммы о гранях тетраэдра F . Следовательно, a — эллиптическая прямая.

Таким образом, каждое ребро тетраэдра F эллиптическое. $\square$

С каждой точкой пространства $\hat{H}^3$ свяжем конус, образованный всеми касательными к абсолюту, проведенными через данную точку. Назовем такой конус *световым* или *изотропным* конусом данной точки, учитывая, что все касательные к абсолюту прямые являются изотропными в $\hat{H}^3$. Световой конус собственной (несобственной)

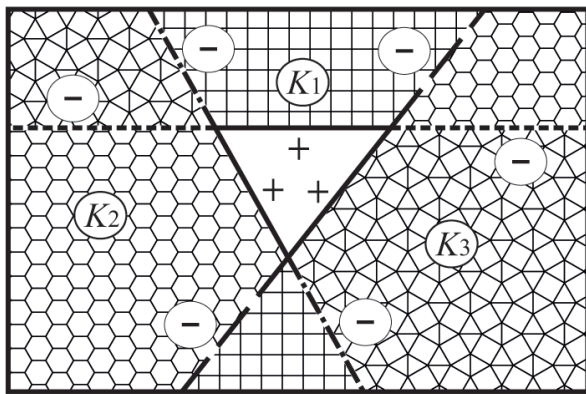
для пространства $\hat{H}^3$ точки является вещественным (мнимым). Световой конус точки абсолюта вырождается в коевклидову плоскость.

Световой линией грани тетраэдра назовем линию пересечения плоскости, содержащей данную грань, со световым конусом противоположной к данной грани вершины тетраэдра.

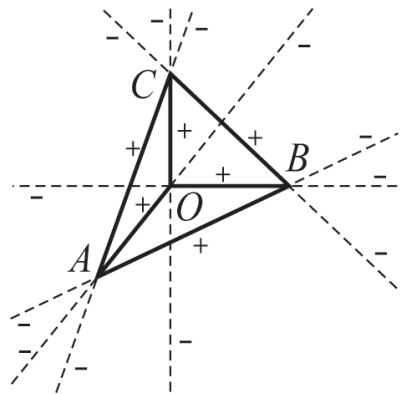
Грань тетраэдра пространства $\hat{H}^3$ назовем α -гранью, если она содержит полностью свою световую линию.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в пространстве $\hat{H}^3$ F — тетраэдр с негиперболическими гранями. Совокупность Ω граней тетраэдра F либо не содержит α -граней, либо содержит одну α -грань, либо все ее элементы являются α -гранями тетраэдра F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 каждое ребро тетраэдра F принадлежит замкнутой в пространстве $\hat{H}^3$ эллиптической прямой. Пометим ребра тетраэдра F знаком «+», а смежные с ними отрезки эллиптических прямых — знаком «-». Плоскость каждой грани тетраэдра F лежащими в ней сторонами грани разбита на четыре трехреберника. Один из них — грань тетраэдра F — имеет совокупность ребер с набором меток (+++), совокупностям ребер остальных трехреберников соответствует набор меток (+--). На рис. 1, а представлена плоскость грани тетраэдра F , узорами выделены трехреберники K_1, K_2, K_3 , не являющиеся гранями.



а



б

Рис. 1. Разбиение плоскости грани тетраэдра F лежащими в ней сторонами грани на четыре трехреберника (а); разбиение пространства $\hat{H}^3$ плоскостями граней тетраэдра F (б).

Четыре плоскости граней тетраэдра $F = OABC$ разбивают пространство $\hat{H}^3$ на восемь связных частей, назовем их *октантами* пространства $\hat{H}^3$, определенными тетраэдром F . Каждый октант³ является тетраэдром с внутренней относительно него областью пространства $\hat{H}^3$.

³ Для наглядности октанты пространства $\hat{H}^3$ можно изобразить октантами произвольной системы координат в евклидовом пространстве, помещая одну грань тетраэдра F в бесконечно удаленную плоскость. В этом случае положительные направления координатных осей Ox, Oy, Oz можно принять в качестве ребер соответственно OA, OB, OC тетраэдра F .

На рис. 1, 6 ребра тетраэдра F изображены сплошными линиями, а смежные с ними отрезки эллиптических прямых — пунктиром.

Прямые, содержащие ребра OA, OB, OC, AC, AB, BC тетраэдра F , обозначим x, y, z, u, v, w соответственно. Каждый из октантов $F, F_p, p = \overline{1, 7}$, пространства $\hat{H}^3$ можно описать упорядоченным набором меток его ребер, принадлежащих прямому x, y, z, u, v, w соответственно⁴:

$$\begin{aligned} F(+ + + + +), \quad F_1(- + + - - +), \quad F_2(- - + - + -), \\ F_3(+ - + + - -), \quad F_4(+ + - - + -), \quad F_5(- + - + - -), \\ F_6(- - - + + +), \quad F_7(+ - - - - +). \end{aligned} \quad (1)$$

Все ребра октантов F, F_p , помеченные знаком «+», принадлежат тетраэдру F . Если октант F_p из (1) имеет с F два общих ребра в одной грани, то он имеет с F и третье общее ребро этой грани. Значит, если F_p имеет с F точно два общих ребра, то эти ребра являются противоположными ребрами тетраэдра F . Следовательно, для октантов F_p по отношению к F возможны два и только два различных положения: они либо смежны с F по целой грани (октанты F_1, F_3, F_4, F_6), либо имеют с F два общих противоположных ребра (октанты F_2, F_5, F_7).

Поскольку грани тетраэдра F негиперболические, то абсолютная гиперквадрика γ пространства $\hat{H}^3$ имеет с каждой плоскостью грани не более одной общей точки, а значит, полностью принадлежит одному из октантов F, F_p . Таким образом, для гиперквадрики γ существуют три и только три различных положения по отношению к тетраэдру F :

- 1) γ принадлежит октанту, имеющему с F два общих противоположных ребра;
- 2) γ принадлежит октанту, смежному с F по целой грани;
- 3) γ принадлежит октанту F .

В первом случае ни одна грань тетраэдра F не содержит свою световую линию, поэтому не является α -гранью тетраэдра F . Во втором случае α -гранью является одна и только одна грань тетраэдра F (общая грань тетраэдра F и октанта, содержащего абсолютную гиперквадрику). В третьем случае каждая грань тетраэдра F является α -гранью.

Теорема доказана. $\square$

4. Классы тетраэдров с негиперболическими гранями

Согласно теореме 1 в пространстве $\hat{H}^3$ по количеству α -граней в каждом из типов $EEEE, EEES, EESS, ECCC, CCCC$ можно выделить по три класса тетраэдров.

⁴ На изображении в евклидовом пространстве для наглядности условимся о следующем порядке следования октантов. В используемой системе координат $Oxyz$ (см. сноску 3) выпишем сначала октанты верхнего полупространства относительно плоскости OAB , начиная с F и переходя по смежным граням октантов против часовой стрелки, затем выпишем в том же порядке октанты, симметричные первым четырем относительно плоскости OAB .

Классу тетраэдра с негиперболическими гранями присвоим номер 0, 1, 4 соответственно количеству α -граней тетраэдра.

В дальнейших рассуждениях октант F_p из (1), содержащий абсолютную гиперквадрику γ , условимся обозначать F_p^* .

4.1. Классы тетраэдров типов $EEEE$ и $CCCC$

По типу плоскостей пространства $\hat{H}^3$ все грани тетраэдра типа $EEEE$, или $CCCC$, равноправны. Поэтому классификацию тетраэдров типов $EEEE$, $CCCC$ можно провести только по количеству α -граней. Количество α -граней однозначно определяет набор двугранных углов тетраэдра типа $EEEE$, или $CCCC$.

1. Тетраэдр F класса $EEEE(0)$ ($CCCC(0)$) содержит два общих, противоположных друг другу, ребра с октантом F_p^* . Углы тетраэдра F при этих ребрах являются двугранными эллиптическими псевдоуглами (двугранными ковалианами). Углы при ребрах тетраэдра класса $EEEE(0)$ ($CCCC(0)$), не принадлежащих октанту F_p^* , являются двугранными эллиптическими углами (двугранными валианами). Таким образом, тетраэдр класса $EEEE(0)$ содержит четыре двугранных эллиптических угла и два двугранных эллиптических псевдоугла. Тетраэдр класса $CCCC(0)$ содержит четыре двугранных валианы и две двугранных ковалианы.

2. Если ребро тетраэдра класса $EEEE(1)$ ($CCCC(1)$) принадлежит α -грани, то двугранный угол при нем является двугранным эллиптическим углом (двугранной валианой), в противном случае — двугранным эллиптическим псевдоуглом (двугранной ковалианой).

Таким образом, тетраэдр класса $EEEE(1)$ содержит три двугранных эллиптических угла и три двугранных эллиптических псевдоугла. Тетраэдр класса $CCCC(1)$ содержит три двугранных валианы и три двугранных ковалианы.

3. Поскольку тетраэдр класса $EEEE(4)$ ($CCCC(4)$) содержит внутри себя абсолют, каждый его двугранный угол является эллиптическим двугранным псевдоуглом (двугранной ковалианой).

4.2. Классы тетраэдров типа $EEEC$

1. Все тетраэдры класса $EEEC(0)$ с точностью до типов граней и типов двугранных углов эквивалентны. Коевклидова грань тетраэдра F класса $EEEC(0)$ является трехреберником типа $eee(I)$. Двугранный угол при ребре этой грани, принадлежащем (не принадлежащем) октанту F_p^* , является двугранным эллиптическим псевдофлагом (двугранным эллиптическим флагом). Двугранный угол тетраэдра класса $EEEC(0)$, противоположный двугранному эллиптическому псевдофлагу (двугранному эллиптическому флагу), является двугранным эллиптическим псевдоуглом (двугранным эллиптическим углом).

2. Пусть тетраэдр $F = OABC$ класса $EEEC(1)$ содержит грань OAB в коевклидовой плоскости пространства $\hat{H}^3$, и эта грань образована прямыми x , y , v (см. обозначения в доказательстве теоремы 1). Из четырех октантов F_1 , F_3 , F_4 , F_6 (1), смежных с F по целой грани, октант F_4 выделяется тем, что содержит с F общую

коевклидову грань. При расположении абсолютной гиперквадрики γ в любом из октантов F_1, F_3, F_4, F_6 совокупность Ω граней тетраэдра F содержит одну α -грань. Эта грань является коевклидовой только при условии $\gamma \subset F_4$. Случаи расположения абсолюта в октантах F_1, F_3, F_6 равноправны.

Род тетраэдра класса $EEEC(1)$ обозначим $EEEC(1, E)$ ($EEEC(1, C)$), если его α -грань является эллиптической (коевклидовой).

2.1. Коевклидова грань тетраэдра рода $EEEC(1, E)$ — трехреберник типа $eee(I)$. Два двугранных угла при ребрах α -грани, не лежащих в грани коевклидовой, являются двугранными эллиптическими углами. Двугранный угол при ребре α -грани, лежащем в грани коевклидовой, является двугранным эллиптическим флагом. Двугранные углы при ребрах коевклидовой грани, не лежащих в α -грани, — двугранные эллиптические псевдофлаги. Двугранный угол тетраэдра рода $EEEC(1, E)$ при ребре, не лежащем ни в α -грани, ни в коевклидовой грани, является двугранным эллиптическим псевдоуглом.

2.2. Коевклидова грань тетраэдра рода $EEEC(1, C)$ — трехреберник типа $eee(II)$. Двугранные углы при ребрах α -грани — двугранные эллиптические псевдофлаги. Все остальные двугранные углы — двугранные эллиптические псевдоуглы.

3. Тетраэдр класса $EEEC(4)$ содержит внутри себя абсолют, следовательно, его двугранные углы при ребрах коевклидовой грани — двугранные эллиптические псевдофлаги. Все остальные двугранные углы — двугранные эллиптические псевдоуглы. Коевклидова грань тетраэдра класса $EEEC(4)$ — трехреберник типа $eee(II)$.

4.3. Классы тетраэдров типа $EECC$

1. Тетраэдр F класса $EECC(0)$, в силу принятых обозначений, не имеет α -граней. Род тетраэдра F обозначим $EECC(0, 1)$ ($EECC(0, 2)$), если F имеет с октантом F_p^* два общих ребра, каждое из которых принадлежит граням одного типа (граням различных типов).

1.1. Коевклидовы грани тетраэдра рода $EECC(0, 1)$ являются трехреберниками типа $eee(I)$. Двугранный угол при ребре двух эллиптических (коевклидовых) граней является двугранным эллиптическим псевдоуглом (двугранной ковалианой). Четыре остальных двугранных угла — двугранные эллиптические флаги.

1.2. Коевклидовы грани тетраэдра рода $EECC(0, 2)$ являются трехреберниками типа $eee(I)$. Двугранный угол при ребре двух эллиптических (коевклидовых) граней является двугранным эллиптическим углом (двугранной валианой). Два двугранных угла при ребрах смежности тетраэдра с октантом F_p^* являются двугранными эллиптическими флагами. Два оставшихся двугранных угла тетраэдра, при его ребрах, не принадлежащих октанту F_p^* , — двугранные эллиптические псевдофлаги.

2. Тетраэдр F класса $EECC(1)$ имеет одну α -грань, обозначим его род $EECC(1, E)$ ($EECC(1, C)$), если α -грань является эллиптической (коевклидовой).

2.1. Коевклидовы грани тетраэдра рода $EECC(1, E)$ являются трехреберниками типа $eee(I)$. Двугранный угол при ребре двух эллиптических (коевклидовых) граней

является двугранным эллиптическим углом (двугранной ковалианой). Два двугранных угла при ребрах грани смежности тетраэдра с октантом F_p^* являются двугранными эллиптическими флагами. Два оставшихся двугранных угла тетраэдра, при его ребрах, не принадлежащих октанту F_p^* , — двугранные эллиптические псевдофлаги.

2.2. Коевклидова α -грань тетраэдра рода $EECC(1, C)$ является трехреберником типа $eee(II)$, вторая коевклидова грань — трехреберник типа $eee(I)$. Двугранный угол при ребре двух эллиптических (коевклидовых) граней является двугранным эллиптическим углом (двугранной ковалианой). Два двугранных угла при ребрах грани смежности тетраэдра с октантом F_p^* являются двугранными эллиптическими флагами. Два оставшихся двугранных угла тетраэдра при его ребрах, не принадлежащих октанту F_p^* , — двугранные эллиптические псевдофлаги.

3. Тетраэдр класса $EECC(4)$ содержит внутри себя абсолют, следовательно, его двугранный угол при ребре между коевклидовыми (эллиптическими) гранями — двугранная ковалиана (двугранный эллиптический псевдоугол). Остальные четыре двугранных угла — двугранные эллиптические псевдофлаги. Коевклидовы грани тетраэдра класса $EECC(4)$ — трехреберники типа $eee(II)$.

4.4. Классы тетраэдров типа $ECCC$

1. Каждые две пары противоположных ребер тетраэдра класса $ECCC(0)$ равноправны: одно из них является ребром смежности коевклидовых граней, а второе — принадлежит граням различных типов. Значит, по типам граней и углов равноправны каждые два тетраэдра класса $ECCC(0)$. Угол тетраэдра F класса $ECCC(0)$ при ребре между коевклидовыми гранями, принадлежащем тетраэдру F_p^* , является двугранной ковалианой, а противоположный ему угол — двугранным эллиптическим псевдофлагом. Углы при не принадлежащих тетраэдру F_p^* ребрах между коевклидовыми гранями являются двугранными валианами, а противоположные им углы — двугранными эллиптическими углами.

2. Тетраэдры класса $ECCC(1)$ различимы по типу α -грани. Род тетраэдра F класса $ECCC(1)$ обозначим $ECCC(1, E)$ ($ECCC(1, C)$), если его α -грань эллиптическая (коевклидова).

2.1. В тетраэдре рода $ECCC(1, E)$ грани в коевклидовых плоскостях — трехреберники типа $eee(I)$, углы при ребрах между коевклидовыми гранями — двугранные ковалианы, а углы при ребрах в эллиптической грани — двугранные эллиптические углы.

2.2. В тетраэдре рода $ECCC(1, C)$ грани в коевклидовых плоскостях, не принадлежащие тетраэдру F_p^* , являются трехреберниками типа $eee(I)$, α -грань — трехреберник типа $eee(II)$. Углы при ребрах между коевклидовыми гранями являются двугранными валианами, если эти ребра лежат в грани смежности с тетраэдром F_p^* . Противоположные им двугранные углы являются эллиптическими псевдофлагами. Угол между коевклидовыми гранями при ребре, не лежащем в грани смежности с тетраэдром F_p^* , является двугранной ковалианой, а противоположный ему угол — двугранным эллиптическим углом.

3. Тетраэдр класса $ECSC(4)$ содержит внутри себя абсолют, следовательно, его двугранные углы между коевклидовыми гранями — двугранные ковалианы, а противоположные им углы — двугранные эллиптические псевдофлаги. Коевклидовы грани тетраэдра класса $ECSC(4)$ — трехреберники типа $eee(II)$.

5. Заключение

В работе проведена классификация тетраэдров с негиперболическими гранями в пространстве $\hat{H}^3$. Классификация основана на рассмотрении типов плоскостей граней, количества α -граней и типов содержащих их плоскостей, а также типов образующих грани тетраэдров трехреберников коевклидовой плоскости.

Следующим этапом в исследовании тетраэдров пространства $\hat{H}^3$ может стать классификация тетраэдров, содержащих гиперболические грани. Она предполагает исследование всех возможных наборов трехреберников, составляющих грани в гиперболических плоскостях положительной кривизны. Число классов и родов тетраэдров с гиперболическими гранями существенно возрастет по сравнению с тетраэдрами с негиперболическими гранями. Это объясняется наличием в гиперболической плоскости положительной кривизны десяти типов трехреберников.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М.; Л: ОНТИ, 1936. 356 с.
2. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М.: Наука, 1971. 576 с.
3. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.
4. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. М.: ГИТТЛ, 1955. 744 с.
5. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969. 548 с.
6. Розенфельд Б. А., Замаховский М. П. Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства. М.: МЦНМО, 2003. 560 с.
7. Понарин Я. П. Геометрии с аффинной базой. Киров: Изд-во Кировского гос. пед. ун-та, 1991. 121 с.
8. Яглом И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. 2-е изд., стер. М.: Едиториал УРСС, 2004. 303 с.
9. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4-х частях. Часть 1: Тригонометрия. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2013. 244 с.
10. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4-х частях. Часть 2: Преобразования и простые разбиения. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2013. 274 с.

11. Ромакина Л. Н. Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей. Саратов: Изд-во «Научная книга», 2008. 279 с.
12. Ромакина Л. Н. Аналоги формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны // Сиб. электрон. матем. изв. 2013. Т 10. С. 393–407.
13. Ромакина Л. Н. О параболических многогранниках копсевдоевклидового пространства // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2013. № 1. С. 201–206.
14. Александров А. Д. Выпуклые многогранники. М.; Л.: ГТТЛ, 1950. 429 с.
15. Ашкингузе В. Г. Многоугольники и многогранники // Энциклопедия элементарной математики. М.: Физматгиз, 1963. Т. IV: Геометрия.

REFERENCES

1. Klein, F. 1936, "Non-Euclidean geomtry", *Joint Scientific and Technical Publishing House, Moscow – Leningrad*, 356 p.
2. Efimov, N. V. 1971, "The highest geometry Vysshiaia geometriia", *Nauka, Moscow*, 576 p.
3. Norden, A. P. 1976, "The spaces of affine connectivity", *Nauka, Moscow*, 432 p.
4. Rozenfeld, B. A. 1955, "Non-Euclidean geomtry", *State Publ. of Technical and Theoretical Literature, Moscow*, 744 p.
5. Rozenfeld, B. A. 1969, "Non-Euclidean spaces", *Nauka, Moscow*, 548 p.
6. Rozenfeld, B. A. & Zamakhovskii, M. P. 2003, "Geometry of groups of Lie. Symmetric, parabolic and periodic spaces", *MCCME, Moscow*, 560 p.
7. Ponarin, J. P. 1991, "Geometry with affine base", *Publishing house of the Kirov state pedagogical university, Kirov*, 121 p.
8. Yaglom, I. M., 2004, "Principle of relativity Galilee and non-Euclidean geometry", *Editorial URSS, Moscow*, 303 p.
9. Romakina, L. N. 2013, "Geometry of the hyperbolic plane of positive curvature : in 4 pt. Pt. 1 : Trigonometry", *Saratov Univ. Press., Saratov*, 244 p.
10. Romakina, L. N. 2013, "Geometry of the hyperbolic plane of positive curvature : in 4 pt. Pt. 2 : Transformations and simple splittings", *Saratov Univ. Press, Saratov*, 274 p.
11. Romakina, L. N. 2008, "Geometry of the coeuclidean and copseudoeuclidean planes", *Publishing House «Scientific Book», Saratov*, 279 p.
12. Romakina, L. N. 2013, "Analogues of a formula of Lobachevsky for angle of parallelism on the hyperbolic plane of positive curvature", *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 10, pp. 393–407 (in Russian). Available at: <http://semr.math.nsc.ru>

-
13. Romakina, L. N. 2013, "Concerning parabolic polyhedrons of copseudoeuclidean space", *Bulletin of "KSPU"*, № 1. pp. 201–206.
 14. Aleksandrov, A. D. 1950, "Convex polyhedrons", *State Publ. of Technical and Theoretical Literature, Moscow*, 429 p.
 15. Ashkinuze, V. G. 1963, "Polygons and polyhedrons", *Encyclopedia of elementary mathematics, Vol. IV: Geometry, Physical and Mathematical State Publishing House, Moscow*.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.

Получено 29.04.2015