

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 3.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-406-415

Отражение звука от плоской поверхности с цилиндрическим выступом

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Толоконников Сергей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: tolsl@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача об отражении плоской гармонической звуковой волны от плоской поверхности, имеющей выступ цилиндрической формы. Полагается, что плоская поверхность и поверхность выступа являются абсолютно жесткими. Падающая плоская звуковая волна распространяется перпендикулярно образующей цилиндрического выступа в полупространстве, заполненном однородной идеальной сжимаемой жидкостью.

Аналитическое решение задачи получено интегральным методом наименьших квадратов. Решение ищется в виде усеченного ряда по волновым цилиндрическим функциям. Для выполнения граничных условий на плоской поверхности и цилиндрическом выступе построен функционал, и найдено приближенное решение, его минимизирующее.

Представлены результаты численных расчетов диаграмм направленности отраженного акустического поля в дальней зоне.

Ключевые слова: отражение звука, плоская поверхность, цилиндрический выступ.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:

Толоконников, Л. А., Толоконников, С. Л. Отражение звука от плоской поверхности с цилиндрическим выступом // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 3, с. 406–415.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 3.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-406-415

Reflection of sound from a flat surface with a cylindrical protrusion

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Tolokonnikov Sergei Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: tolsl@mail.ru

Abstract

In paper the problem of reflecting a plane harmonic sound wave from a flat surface having a cylindrical protrusion is considered. It is assumed that the flat surface and the surface of the projection are absolutely rigid. An incident plane sound wave propagates perpendicular to the generatrix of a cylindrical projection in a half-space filled with a homogeneous ideal compressible liquid.

An analytical solution of the problem is obtained by the integral method of least squares. The solution is sought in the form of a truncated row by wave cylindrical functions. To fulfill the boundary conditions on a flat surface and a cylindrical projection the functional is constructed and an approximate solution minimizing its is found.

The results of numerical calculations of the directional patterns of the reflected acoustic field in the far zone are presented.

Keywords: reflection of sound, flat surface, cylindrical protrusion .

Bibliography: 14 titles.

For citation:

Tolokonnikov, L. A., Tolokonnikov, S. L. 2025, "Reflection of sound from a flat surface with a cylindrical protrusion", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 406–415.

1. Введение

Решения задач об отражении плоской звуковой волны от абсолютно жесткой плоскости и о дифракции плоской звуковой волны на абсолютно жестком круговом цилиндре бесконечной длины, расположенном в безграничном пространстве, хорошо известны (например, [1 – 5]).

Рассеяние звуковых волн на поверхностях с регулярными неровностями, амплитуды которых малы по сравнению с длиной волны, исследовалось в ряде работ, например, [1, 6 – 11].

В настоящей работе рассматривается задача об отражении плоской гармонической звуковой волны от плоской поверхности, имеющей выступ цилиндрической формы произвольного размера.

2. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую поверхность, имеющую выступ в виде части боковой поверхности кругового цилиндра бесконечной длины радиуса a . Полагаем, что плоская поверхность и поверхность выступа являются абсолютно жесткими. Пусть из полупространства, заполненного однородной идеальной сжимаемой жидкостью с плотностью ρ и скоростью звука c , на плоскую поверхность с выступом перпендикулярно образующей цилиндра падает гармоническая плоская звуковая волна (рис. 1).

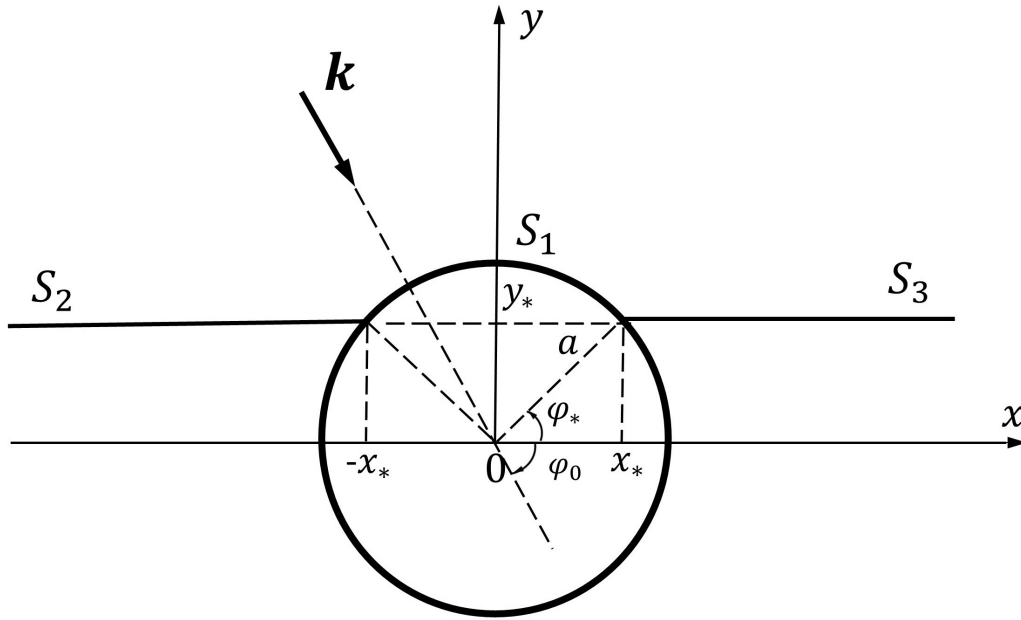


Рис. 1: Геометрия задачи

Определим акустическое поле, отраженное от поверхности с выступом.

3. Математическая модель задачи

Обозначим поверхность цилиндрического выступа через S_1 , а части плоской поверхности, содержащей выступ, — через S_2 и S_3 .

Свяжем с цилиндрическим выступом прямоугольную декартову x, y, z и цилиндрическую r, φ, z системы координат с началом O , расположенном на оси цилиндра z .

В рассматриваемой постановке задача двумерная. Все искомые величины не зависят от координаты z .

Уравнения участков S_1 , S_2 и S_3 имеют вид

$$S_1: \quad r = a, \quad \varphi^* \leq \varphi \leq \pi - \varphi^*; \quad S_2: \quad -\infty \leq x < -x_*, \quad y = y_*; \quad S_3: \quad x_* \leq x < \infty, \quad y = y_*$$

$$\left(x_* = a \cos \varphi_*, \quad y_* = a \sin \varphi_*, \quad \varphi_* = \arccos \frac{\sqrt{a^2 - y_*^2}}{a} \right).$$

Потенциал скорости падающей плоской волны имеет вид

$$\psi_0 = A \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - i\omega t],$$

где A — амплитуда волны; $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, 0\}$ — волновой вектор падающей волны; $\mathbf{r} = \{x, y, 0\}$ — радиус-вектор; $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$; $k_x = k \cos \varphi_0$; $k_y = k \sin \varphi_0$; φ_0 — угол, образованный вектором $\mathbf{k}$ с осью x ; ω — круговая частота; t — время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

В полярной системе координат r, φ потенциал ψ_0 записывается в виде

$$\psi_0 = A \exp[ikr \cos(\varphi - \varphi_0)],$$

где $k = \omega/c_1$ — волновое число.

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [4]

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0, \tag{3.1}$$

где ψ — потенциал скорости полного акустического поля.

Скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \text{grad } \psi, \quad p = i\rho\omega \psi.$$

Граничные условия на поверхностях S_1 , S_2 и S_3 заключаются в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{S_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{S_j} = 0 \quad (j = 2, 3). \quad (3.2)$$

Таким образом, в математической постановке задача состоит в нахождении потенциала ψ , являющегося решением уравнения (3.1) и удовлетворяющего граничным условиям (3.2).

4. Аналитическое решение задачи

В силу линейной постановки задачи потенциал скорости полного акустического поля представим в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_s,$$

где ψ_s — потенциал скорости рассеянного поля.

В цилиндрической системе координат падающая плоская волна представляется разложением [12]

$$\psi_0 = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad (4.1)$$

где $J_n(x)$ — цилиндрическая функция Бесселя порядка n .

Потенциал скорости рассеянного поля $\psi_s(r, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца, которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \varphi^2} + k^2 \psi_s = 0. \quad (4.2)$$

Решение уравнения (4.2) для расходящейся волны (с учетом условий излучения на бесконечности [4]) представляется в следующем виде:

$$\psi_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad (4.3)$$

где $H_n^{(1)}(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; A_n — комплексные константы.

Построим приближенное аналитическое решение поставленной задачи, воспользовавшись вариационным методом — интегральным методом наименьших квадратов. Приближенное решение будем искать на основе выражения (4.3) в виде усеченного ряда по волновым цилиндрическим функциям

$$\psi_s^N = \sum_{n=-N}^N A_n^N H_n^{(1)}(kr) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad (4.4)$$

где N — порядок усечения.

При этом полагаем

$$\psi_0^N = A \sum_{n=-N}^N i^n J_n(kr) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (4.5)$$

Верхний индекс N в (4.4), (4.5) указывает на зависимость от числа членов конечных рядов по координатным функциям, из которых конструируется приближенное решение. Чтобы погрешность от усечения рядов была незначительной, необходимо соответствующим образом выбрать значение N . Известно [2, 4], что сходимость таких рядов зависит от значения волнового размера цилиндра ka .

Потребуем выполнения граничных условий (3.2) в среднем. Для этого построим функционал вида

$$\Phi[\psi_s^N] = \int_{S_1} \left| \frac{\partial \psi_0^N}{\partial r} + \frac{\partial \psi_s^N}{\partial r} \right|^2 dS + \sum_{j=2}^3 \int_{S_j} \left| \frac{\partial \psi_0^N}{\partial y} + \frac{\partial \psi_s^N}{\partial y} \right|^2 dS, \quad (4.6)$$

определенный на множестве функций (4.4).

Среди функций ψ_s^N найдем функцию

$$\tilde{\psi}_s^N = \sum_{n=-N}^N A_n^{N*} H_n^{(1)}(kr) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad (4.7)$$

являющуюся наилучшим приближенным решением задачи при фиксированном N . Эта функция наилучшим образом удовлетворяет граничным условиям, минимизируя функционал (4.6) со среднеквадратичной ошибкой $\delta_N^2 = \Phi[\tilde{\psi}_s^N]$.

Подставим (4.4) и (4.5) в функционал (4.6), учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial y} [Z_n(kr) e^{in(\varphi - \varphi_0)}] = \left[k Z_n'(kr) \frac{y}{r} + in Z_n(kr) \frac{x}{r^2} \right] e^{in(\varphi - \varphi_0)},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а под $Z_n(kr)$ понимаем функцию $J_n(kr)$ или $H_n^{(1)}(kr)$. Будем иметь

$$\Phi[\psi_s^N] = G(A_{-N}^N, A_{-N+1}^N, \dots, A_{-1}^N, A_0^N, A_1^N, \dots, A_N^N).$$

Искомые коэффициенты A_n^{N*} ($n = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$) определим из условий минимума функции $G(A_n^N)$ от $(2N+1)$ комплексных переменных

$$\frac{\partial G}{\partial \operatorname{Re} A_l^N} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \operatorname{Im} A_l^N} = 0 \quad (l = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N). \quad (4.8)$$

Таким образом,

$$\min G(A_{-N}^N, \dots, A_{-1}^N, A_0^N, A_1^N, \dots, A_N^N) = G(A_{-N}^{N*}, \dots, A_{-1}^{N*}, A_0^{N*}, A_1^{N*}, \dots, A_N^{N*}).$$

Сложив первое уравнение (4.8) со вторым уравнением, умноженным на мнимую единицу, приходим к системе $2N+1$ линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных A_n^{N*}

$$\sum_{n=-N}^{n=N} a_{nl} A_n^N = \sum_{n=-N}^{n=N} b_{nl} \quad (l = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N), \quad (4.9)$$

где

$$a_{nl} = I_{1nl}^{(1)} + I_{2nl}^{(2)} + I_{3nl}^{(3)}; \quad b_{nl} = I_{1nl}^{(4)} + I_{2nl}^{(5)} + I_{3nl}^{(6)}.$$

В обозначениях интегралов первая цифра в нижнем индексе соответствует номеру участка интегрирования S_j ($j = 1, 2, 3$), а верхний индекс обозначает номер интеграла.

Будем иметь

$$I_{1nl}^{(1)} = k^2 \int_{S_1} H_n^{(1)'}(kr) H_l^{(2)'}(kr) e^{i(n-l)(\varphi - \varphi_0)} dS,$$

$$I_{jnl}^{(j)} = \int_{S_j} [(\alpha_n - \mu_n)\gamma_{1l} + (\beta_n + \lambda_n)\gamma_{2l}] e^{i(n-l)(\varphi-\varphi_0)} dS \quad (j = 2, 3),$$

$$I_{1nl}^{(4)} = -Ai^n k^2 \int_{S_1} J'_n(kr) H_l^{(2)'}(kr) e^{i(n-l)(\varphi-\varphi_0)} dS,$$

$$I_{jnl}^{(j+3)} = -Ai^n \int_{S_j} (\alpha_n \gamma_{1l} + \lambda_n \gamma_{2l}) e^{i(n-l)(\varphi-\varphi_0)} dS \quad (j = 2, 3),$$

где

$$\alpha_n = kJ'_n(kr) \frac{y}{r}; \quad \beta_n = kN'_n(kr) \frac{y}{r}; \quad \lambda_n = nJ_n(kr) \frac{x}{r^2}; \quad \mu_n = nN_n(kr) \frac{x}{r^2},$$

$$\gamma_{1l} = \alpha_l - \mu_l - i\beta_l - i\lambda_l; \quad \gamma_{2l} = \beta_l + \lambda_l + i\alpha_l - i\mu_l.$$

Здесь $H_l^{(2)}(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля второго рода порядка n ; $N_n(x)$ — цилиндрическая функция Неймана порядка n ; штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Интегралы $I_{1nl}^{(1)}$ и $I_{1nl}^{(4)}$ по S_1 вычисляются аналитически с учетом того, что $r = a$ и $dS = a d\varphi$. Тогда

$$\int_{S_1} f(r) e^{i(n-l)(\varphi-\varphi_0)} dS = af(a) e^{-i(n-l)\varphi_0} \int_{\varphi_*}^{\pi-\varphi_*} e^{i(n-l)\varphi} d\varphi, \quad \varphi_* = \arccos \frac{\sqrt{a^2 - y_*^2}}{a}.$$

При этом

$$\int_{\varphi_*}^{\pi-\varphi_*} e^{i(n-l)\varphi} d\varphi = \varepsilon_{nl}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_{nl} = \begin{cases} \frac{1}{i(n-l)} \left[e^{i(n-l)(\pi-\varphi_*)} - e^{i(n-l)\varphi_*} \right], & n \neq l; \\ \pi - 2\varphi_*, & n = l. \end{cases}$$

Таким образом,

$$I_{1nl}^{(1)} = k^2 a H_n^{(1)'}(ka) H_l^{(2)'}(ka) \varepsilon_{nl}, \quad I_{1nl}^{(4)} = -Ai^n k^2 a J_n'(ka) H_l^{(2)'}(ka) \varepsilon_{nl}.$$

Интегралы по участкам S_2 и S_3 вычислить аналитически не представляется возможным. Их значения могут быть найдены только численно. Указанные интегралы удобнее вычислять в прямоугольных координатах:

$$\int_{S_2} f(r, \varphi) dS = \int_{-\infty}^{-\sqrt{a^2 - y_*^2}} f \left(\sqrt{x^2 + y_*^2}, \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_*^2}} \right) dx,$$

$$\int_{S_3} f(r, \varphi) dS = \int_{\sqrt{a^2 - y_*^2}}^{\infty} f \left(\sqrt{x^2 + y_*^2}, \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_*^2}} \right) dx.$$

Определив из системы (4.9) коэффициенты A_n^{N*} ($n = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$), получим аналитическое описание отраженного акустического поля согласно (4.7).

На основании асимптотических формул для цилиндрических функций Бесселя, Неймана и Ганкеля при больших значениях аргумента [13] устанавливаем, что при $x \rightarrow \pm\infty$ подынтегральные функции у несобственных интегралов $I_{2nl}^{(2)}$, $I_{3nl}^{(3)}$, $I_{2nl}^{(5)}$ и $I_{3nl}^{(6)}$ имеют порядок x^{-3} , что обеспечивает сходимость этих интегралов.

Рассмотрим дальнюю зону акустического поля. Используя асимптотическую формулу для цилиндрической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента [13]

$$H_n^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp \left[i \left(kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (kr \gg 1),$$

из (4.7) находим

$$\tilde{\psi}_s^N = \sqrt{\frac{a}{2r}} \exp \left[i \left(k_1 r - \frac{\pi}{4} \right) \right] F^N(\varphi),$$

где

$$F^N(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi ka}} \sum_{n=-N}^N (-i)^n A_n^{N*} \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (4.10)$$

5. Численные исследования

На основе полученного решения были проведены расчеты угловых характеристик отраженного акустического поля в дальней зоне. Полагалось, что падающая волна единичной амплитуды распространяется в полупространстве, заполненном воздухом ($\rho = 1,29$ кг/м³, $c = 332$ м/с), радиус цилиндра $a = 1$ м.

Амплитуда рассеяния $|F^N(\varphi)/A|$ рассчитывалась в диапазоне полярных углов $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Интегралы $I_{2nl}^{(2)}$, $I_{3nl}^{(3)}$, $I_{2nl}^{(5)}$ и $I_{3nl}^{(6)}$ вычислялись с использованием приема обрезания бесконечных пределов [14].

При проведении численных расчетов значения N варьировались от $N = 2[ka]$ до $N = 10[ka]$, где квадратные скобки означают целую часть числа. Высокую точность расчета обеспечило значение $N = 6[ka]$.

На рис. 2 – 4 представлены диаграммы направленности рассеянного поля в дальней зоне, рассчитанные для волновых размеров $ka = 1$ и $ka = 3$. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния $|F/A|$, вычисленной для соответствующих значений угла φ . Стрелкой показано направление распространения падающей плоской волны.

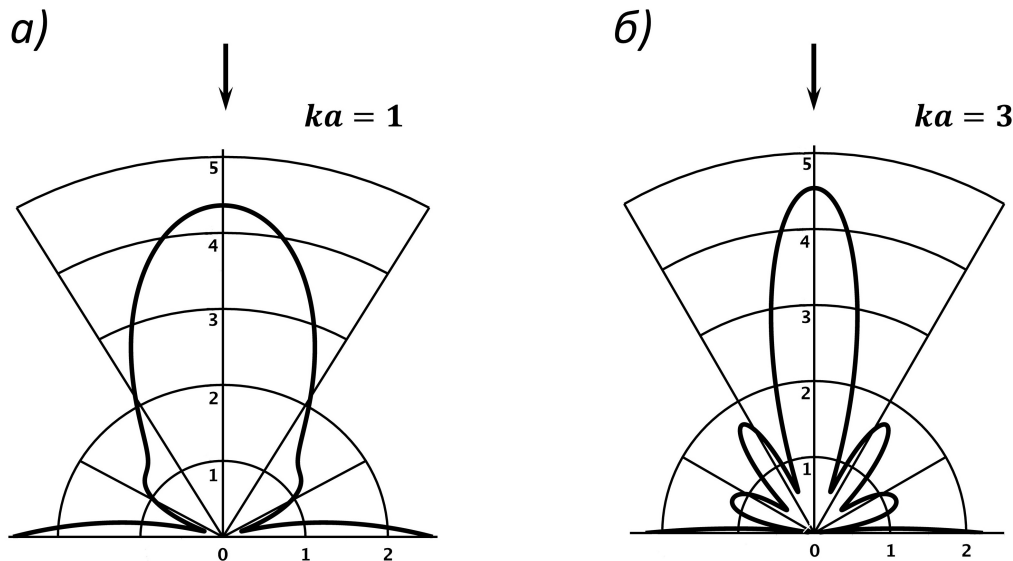
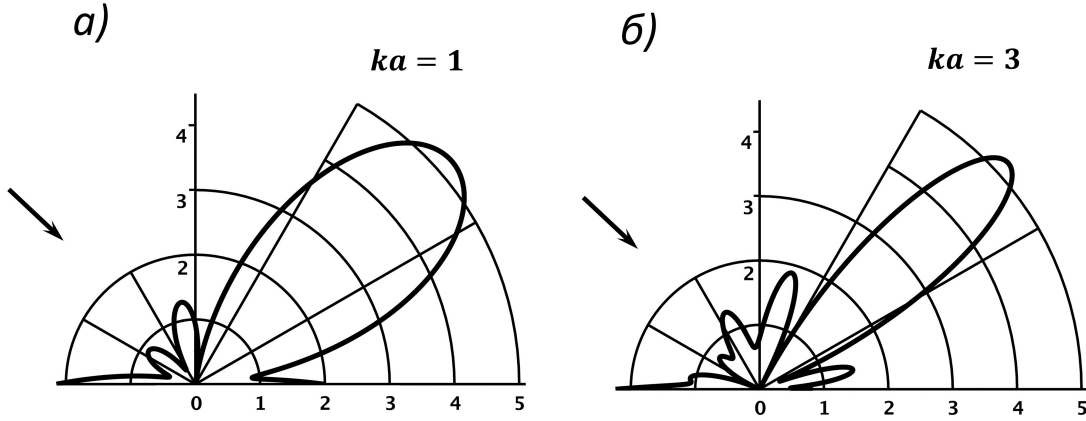
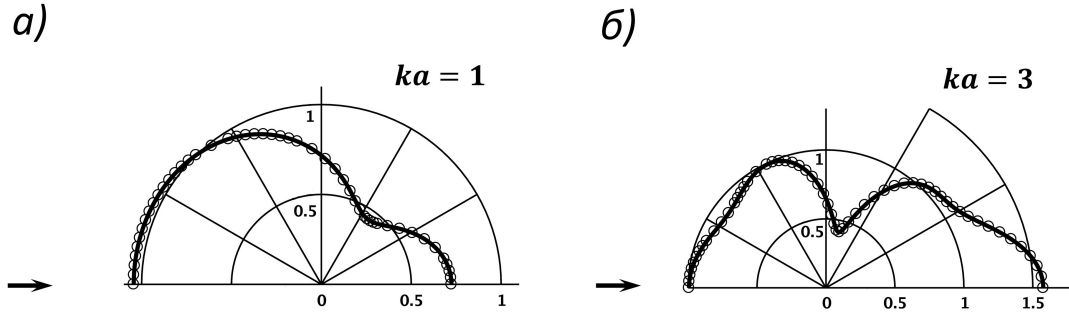


Рис. 2: Диаграммы направленности при $\varphi_0 = -\pi/2$, $y_* = 0,75a$

Рис. 3: Диаграммы направленности при $\varphi_0 = -\pi/4$, $y_* = 0,75a$

Диаграммы направленности на рис. 2 и рис. 3 рассчитаны при $y_* = 0,75a$ для случаев падения плоской волны на цилиндрический выступ под углами $\varphi_0 = -\pi/2$ и $\varphi_0 = -\pi/4$ соответственно.

На рис. 4 представлены зависимости $|F^N(\varphi)/A|$ от полярного угла φ при $\varphi_0 = 0$ и $y_* = 0$, то есть когда выступ представляет собой половину цилиндра радиуса $r = a$, а плоская волна распространяется в положительном направлении оси x . В этом случае имеем возможность сравнить полученное вариационным методом приближенное решение задачи с точным решением.

Рис. 4: Диаграммы направленности при $\varphi_0 = 0$, $y_* = 0$

Исключим из рассмотрения плоские участки S_2 и S_3 путем дополнения половинного цилиндра до полного. При этом на поверхностях S_2 и S_3 будут выполняться условия (3.2). Таким образом, при падении плоской волны под углом $\varphi_0 = 0$ на половину цилиндра исходную задачу сведем к задаче дифракции плоской волны на абсолютно жестком цилиндре, находящемся в свободном пространстве, заполненном однородной идеальной жидкостью.

Точное решение задачи дифракции плоской волны на абсолютно жестком цилиндре в безграничном пространстве в случае нормального падения имеет вид [2 – 5]

$$\psi_s = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)}(kr) \exp(in\varphi), \quad (5.1)$$

а амплитуда рассеяния в дальней зоне поля определяется по формуле

$$F(\varphi) = - \frac{2}{\sqrt{\pi ka}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \exp(in\varphi). \quad (5.2)$$

На рис. 4 сплошными линиями обозначены диаграммы направленности, построенные на основе приближенного решения, а кружками изображены линии, соответствующие диаграммам, построенным по точному решению задачи. Видим практически полное совпадение соответствующих диаграмм.

6. Заключение

В настоящей работе интегральным методом наименьших квадратов получено приближенное аналитическое решение задачи отражения плоской звуковой волны от плоской поверхности с цилиндрическим выступом. Найденное решение позволяет численно исследовать отраженное акустическое поле при любых значениях волнового размера ka и произвольном расположении выступа. Проведенное численное сравнение приближенного и точного решений задачи для частного случая показало хорошее совпадение результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рэлей. Теория звука. Т. 2. — М.: Гостехиздат, 1955. — 476 с.
2. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. — М.: Мир, 1964. — 428 с.
3. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2. — М.: Мир, 1976. — 542 с.
4. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. — Л.: Судостроение, 1972. — 352 с.
5. Лепендин Л. Ф. Акустика. — М.: Высшая школа, 1978. — 448 с.
6. Бреховских Л. М. Дифракция волн на неровной поверхности // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1952. — Т. 23, № 3. — С. 275–299.
7. Лысанов Ю. П. О рассеянии звуковых волн на неровной поверхности // Акустический журнал. — 1956. — Т. 2, № 2. — С. 182–187.
8. Twersky V. On scattering and reflection of sound by rough surface // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1957. — Vol. 29, No. 2. — P. 209–226.
9. Грасюк Д. С. Рассеяние звуковых волн на неровной поверхности упругого тела // Акустический журнал. — 1960. — Т. 6, № 1. — С. 30–33.
10. Машашвили Е. С. Дифракция звуковых волн на неровной поверхности // Акустический журнал. — 1987. — Т. 33, № 2. — С. 298–306.
11. Урусовский И. А. О дифракции плоской волны на неровной поверхности // Акустический журнал. — 1992. — Т. 38, № 5. — С. 933–942.
12. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. — Минск: Наука и техника, 1968. — 584 с.
13. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.: Физматгиз, 1963. — 358 с.
14. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Физматлит, 1978. — 512 с.

REFERENCES

1. Rayleigh. 1955 *Theory of Sound. Volume 2*. Moscow: Gostekhizdat. 476 p.
2. Hönl H., Maue A., Westpfahl K. 1964 *Theory of Diffraction*. Moscow: Mir. 428 p.
3. Skudrzyk E. 1976 *Foundations of Acoustics. Volume 2*. Moscow: Mir. 542 p.
4. Shenderov E.L. 1972 *Wave Problems of Hydroacoustics*. Leningrad: Sudostroenie. 352 p.
5. Lependin L.F. 1978 *Acoustics*. Moscow: Vysshaya Shkola. 448 p.
6. Brekhovskikh L.M. 1952 “Diffraction of waves on rough surface”, *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki* 23(3) pp. 275–299.
7. Lysanov Yu.P. 1956 “On scattering of sound waves on rough surface”, *Akusticheskii Zhurnal* 2(2) pp. 182–187.
8. Twersky V. 1957 “On scattering and reflection of sound by rough surface”, *The Journal of the Acoustical Society of America* 29(2) pp. 209–226.
9. Grasyuk D.S. 1960 “Scattering of sound waves on rough surface of elastic body”, *Akusticheskii Zhurnal* 6(1) pp. 30–33.
10. Mashashvili E.S. 1987 “Diffraction of sound waves on rough surface”, *Akusticheskii Zhurnal* 33(2) pp. 298–306.
11. Urusovsky I.A. 1992 “On diffraction of plane wave on rough surface”, *Akusticheskii Zhurnal* 38(5) pp. 933–942.
12. Ivanov E.A. 1968 *Diffraction of Electromagnetic Waves on Two Bodies*. Minsk: Nauka i Tekhnika. 584 p.
13. Lebedev N.N. 1963 *Special Functions and Their Applications*. Moscow: Fizmatgiz. 358 p.
14. Kalitkin N.N. 1978 *Numerical Methods*. Moscow: Fizmatlit. 512 p.

Получено: 29.03.2025

Принято в печать: 27.08.2025