ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 3.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-385-405

Дискретный эргодический метод академика Ю. В. Линника

У. М. Пачев

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик).
e-mail: urusbi@rambler.ru

Аннотация

Данная статья посвящена 110-летию со дня рождения выдающегося математика с мировым именем академика Юрия Владимировича Линника и его дискретному эргодическому методу в теории чисел. Сначала приводятся биографические сведения о Ю. В. Линнике. Затем после краткого изложения необходимых сведений из арифметики кватернионов, включая теорию поворотов кватернионов, построенную Б. А. Венковым, рассматривается сама идея дискретного эргодического метода (далее ДЭМ), принадлежащая Ю. В. Линнику.

Следующая часть статьи посвящена изложению эргодической теоремы в случае кватернионов и ее применению к вопросу об асимптотике целых точек по областям на сфере при растущем радиусе.

После этого рассматриваются применения ДЭМ к неопределенным тернарным квадратичным формам, соответствующим случаям распределения целых точек на гиперболоидах, при этом вместо кватернионов используется аппарат арифметики матриц второго порядка. Изложение статьи завершается постановкой некоторых нерешенных задач, связанных с применениями ДЭМ, и списком литературы.

Ключевые слова: Юрий Владимирович Линник, дискретный эргодический метод (ДЭМ), кватернион, матрица второго порядка, асимптотическое распределение целых точек на сферах и гиперболоидах.

Библиография: 43 названия.

Для цитирования:
Пачев У. М. Дискретный эргодический метод академика Ю. В. Линника // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 3, С. 385–405.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 3.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-385-405

Discrete ergodic method of academician Yu. V. Linnik

U. M. Pachev

Pachev Urusbi Mukhamedovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Berbekov Kabardino-Balkarian State University (Nalchik).
e-mail: urusbi@rambler.ru

Abstract

This article is dedicated to the 110th anniversary of the birth of the outstanding world — famous mathematician Academician Yu. V. Linnik and his discrete ergodic method. First, biographical information about Yu. V. Linnik is given.

Then, after a brief presentation of the necessary information from the arithmetic of quaternions including the theory of quaternion rotations constructed by B. A. Venkov, the very idea of the discrete ergodic method (hereinafter DEM), belonging to Yu. V. Linnik, is considered.

The next part of the article is devoted to the presentation of the ergodic theorem in the case of quaternions and its application to the question of the asymptotics of integer points over regions on a sphere with increasing radius.

After this applications of the DEM to indefinite ternary quadratic forms corresponding to cases of integer point distributions on hyperboloids, using second-order matrix arithmetic instead of quaternions.

The article concludes with a statement of some unsolved problems related of DEM and a list of references.

Keywords: Yuri Vladimirovich Linnik, discrete ergodic method (DEM), quaternion matrix of the second order, ergodic theorem, asymptotic distribution of integer points of spheres and hyperboloids.

Bibliography: 43 titles.

For citation:
Pachev, U. M. 2025, "Discrete ergodic method of academician Yu. V. Linnik" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 385–405.

1. Введение

Юрий Владимирович Линник родился 8 января 1915 г. на Украине в г. Белая церковь. Его родители Владимир Павлович и Мария Абрамовна Линник были учителями. В дальнейшем его отец Владимир Павлович стал академиком, научная деятельность которого способствовала развитию прикладной оптики.

В 1932 г. Юрий Владимирович поступил на физический факультет Ленинградского государственного университета (далее ЛГУ), откуда по окончании трех курсов перешел на третий курс математико-механического факультета "чувствуя неодолимое влечение к высшей арифметике"(так написано в его автобиографии).

Первой печатной работой Ю. В. Линника является статья [1], опубликованная в 1938 г. Фактически это единственная алгебраическая работа в его творчестве, но при этом Линник недалеко отошел от теории чисел, поскольку в ней помимо линейных алгебр затрагивается также вопрос о существовании композиции квадратичных форм в смысле Гаусса.

В 1938 г. Ю. В. Линник окончил математико-механический факультет и поступил в аспирантуру ЛГУ. Будучи еще студентом и затем аспирантом Юрий Владимирович получил новые глубокие результаты по арифметике квадратичных форм, за которые он на защите диссертации в 1940 г., минуя кандидатскую степень, получил степень доктора математических наук за следующий цикл работ [2, 3, 4, 5, 6, 7], в которых рассматриваются вопросы о числе представлений больших целых чисел положительными тернарными квадратичными формами заданного детерминанта. Из них в [7] уже применяется ДЭМ, но пока для получения оценок для числа представлений $r(f, m)$ числа m положительной тернарной квадратичной формой f.

Важной характерной особенностью ДЭМ является использование некоммутативной арифметики кватернионов и матриц, а также эрмитионов при построении потоков целых точек на соответствующих поверхностях второго порядка (эллипсоиды и гиперболоиды).

Ю. В. Линник суммировал свои исследования в известной монографии [8].

ДЭМ посвящены также монография А. В. Малышева [10], а также его работа [11] Yu. V. Linnik's ergodic method in number theory. — Acta arithm., 1975, vol. 27, p. 555-598. Кроме того, обзору исследований по ДЭМ в теории чисел посвящены также [26].

Наряду с замечательными оригинальными исследованиями Ю. В. Линник обладал также счастливым искусством привлекать талантливых учеников. Как руководитель Ю. В. Линник был щедр на идеи и советы и не жалел времени для обсуждения научной работы со своими учениками.

Известными учениками Ю. В. Линника в разное время были: венгерский академик А. Реньи, академик Литовской ССР И. Кубилюс, профессора А. В. Малышев, А. И. Виноградов, Б. Ф. Скубенко, Б. М. Бредихин, А. Н. Андрианов — в области теории чисел и В. В. Петров, академик И. А. Ибрагимов, академик АН Литовской ССР В. А. Статулявичус, О. В. Шалаевский — в области теории вероятностей и математической статистики.

Научные заслуги Ю. В. Линника получили всеобщее признание:

1) Государственная премия, 1947 г.
2) Член корреспондент, 1953 г.
3) Академик, 1964 г.
4) Ленинская премия, 1970 г.
5) Герой Социалистического Труда, 1970 г.

Со дня основания в 1959 г. и до 1965 г. он был президентом Ленинградского математического общества. Ю. В. Линник был действительным членом Международного статистического института, иностранным членом Шведской академии наук, почетным доктором Парижского университета.

2. Идея дискретного эргодического метода

Академику Ю. В. Линнику принадлежит оригинальный метод аналитической теории чисел, использующий некоммутативную арифметику, названный в дальнейшем дискретным эргодическим методом (далее ДЭМ).

Название этого метода привнесено в теорию чисел из эргодической теории, возникшей в классических работах В. Гиббса и А. Пуанкаре по статистической физике.

Говоря об истоках следует отметить, что наряду с использованием аналогов эргодических теорем Ю. В. Линник исходил из замечательных исследований Б. А. Венкова [9] по теории поворотов целых векторов-кватернионов с нулевой скалярной частью.

В своих исследованиях Б. А. Венков каждой паре («повороту») (L, L') целых примитивных векторов L, L' нормы m сопоставляет целое число l и целые кватернионы Q и R так, что

$$l + L = QR, \quad Q^{-1}LQ = L^{-1}, \quad l + L' = RQ.$$

Если положить $N(Q) = q$, $N(R) = r$, то паре (L, L') сопоставляется целочисленная бинарная квадратичная форма

$$\varphi = (q, l, r) = qx^2 + 2lxy + ry^2,$$

где $q = N(Q)$, $r = N(R)$ определителя $d(\varphi) = qr - l^2 = m$.

С помощью своей теории поворотов кватернионов Б. А. Венков дал новое доказательство теоремы Гаусса о числе $r_3(m)$ представлений числа m суммой трёх квадратов, т. е. о том, что

$$r_3(m) = \begin{cases} 12h(-m), \text{ если } m \equiv 1, 2 \pmod 4, \\ 8h(-m), \text{ если } m \equiv 3 \pmod 8, \end{cases}$$

где $h(-m)$ — число классов бинарных квадратичных форм определителя m, т. е. дискриминанта $-m$ (по терминологии Ю. В. Линника)

В ДЭМ при исследовании вопроса о равномерном распределении целых точек по областям на сфере $C\Phi_3(m)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = m, \tag{1}$$

где $m > 3$ и $m \neq 4^a \cdot (8b + 7)$, a, b — целые числа $\geqslant 0$, Ю. В. Линник использовал теорию поворотов кватернионов одной и той же нормы m иначе, а именно, он строил с её помощью потоки целых векторов-кватернионов L нормы m в областях на сфере (1). (см. [8]).

Уравнение сферы (1) можно записать в гамильтоновых кватернионах. Для этого введем собственно целые кватернионы (т. е. кватернионы по Липшицу) с нулевой скалярной частью

$$L = xi + yj + zk, \tag{2}$$

где $x, y, z \in \mathbb{Z}$, а i, j, k — кватернионные единицы. Тогда уравнение сферы (1) можно заменить уравнением в кватернионах

$$L^2 = -m, \tag{3}$$

при этом $N(L) = x^2 + y^2 + z^2 = m$, где $x^2 + y^2 + z^2$ — простейшая положительная тернарная квадратичная форма.

Распределение примитивных целых точек на сфере (1) удобно изучать пользуясь поворотами сферы, переводящими целую примитивную точку в такую же точку, лежащую на этой же сфере.

Изучение всех целых точек на сфере (1) легко сводится к изучению примитивных точек на сферах с радиусами вида $\dfrac{\sqrt{m}}{\delta}$, где $\delta^2 | m$, при этом точка (x, y, z) на сфере (1) называется примитивной, если НОД$(x, y, z) = 1$.

Распределение примитивных целых точек на сфере (1) удобно изучать, пользуясь поворотами сферы, переводящими целую примитивную точку в такую же точку, лежащую на этой же сфере.

Повороты сферы (1) также соответствуют поворотам векторов-кватернионов нормы m, рассмотренных впервые в работах Б. А. Венкова [9].

Ю. В. Линник использовал теорию поворотов векторов-кватернионов иначе, а именно, он строил с её помощью потоки целых векторов-кватернионов L нормы m в областях на сфере (1) (см. [8]).

При изучении распределения целых точек на сфере (1) с помощью теории поворотов кватернионов используется кватернионный аналог основной теоремы арифметики.

Но сначала рассмотрим одно важное понятие, относящееся к кватернионам (см. [10]).

Определение. Целый кватернион

$$A = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

с нормой $N(A) \equiv 1 \pmod 2$ называется примарным, если выполняются сравнения

$$a_0 + 1 \equiv a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \pmod 2,$$
$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \equiv 1 \pmod 4.$$

Отметим следующие свойства примарных кватернионов:

1) среди ассоциированных справа (слева) кватернионов нечётной нормы есть один и только один примарный кватернион;

2) произведение примарных кватернионов является примарным кватернионом.

Пример. Кватернион $A = 3 + 2i + 4k$ является примарным.

Определение. Целый кватернион

$$A = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

называется примитивным, если

$$\text{НОД}(a_0, a_1, a_2, a_3) = 1.$$

Определение. Два кватерниона, у которых НОД слева (справа) равен 1, называются взаимно простыми слева (справа).

Определение. Если $N(A)$ — простое число, то A называется простым кватернионом.

Теорема (аналог основной теоремы арифметики для кватернионов). *Если норма примитивного кватерниона A записана в канонической форме*

$$N(A) = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}; \quad \alpha_0 \geqslant 0, \ldots, \alpha_1, \ldots \alpha_k > 0,$$

где $p_1, \ldots, p_k$ — различные нечетные простые числа, то $\alpha_0 = 0$ или 1 и кватернион A имеет вид

$$A = (1+i)^{\alpha_0} P_{11} \cdot P_{12} \cdot \ldots \cdot P_{1\alpha_1} \cdot P_{21} \cdot \ldots \cdot P_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot P_{k1} \cdot \ldots \cdot P_{k\alpha_k}, \tag{*}$$

где P_{ij} — простой кватернион нормы p_i.

Представление (*) однозначно в том смысле, что в любом другом представлении примитивного кватерниона A должны быть те же числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, a_k$ так, что будет

$$A = (1+i)^{\alpha_0} P'_{11} \cdot P'_{12} \cdot \ldots \cdot P'_{1\alpha_1} \cdot P'_{21} \cdot \ldots \cdot P'_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot P'_{k1} \cdot \ldots \cdot P'_{k\alpha_k}$$

и при этом должны выполняться равенства

$$P'_{11} = P_{11}\varepsilon, \ P'_{12} = \bar{\varepsilon} P_{12} \varepsilon, \ \ldots, \ P'_{13} = \varepsilon' P_{13} \varepsilon''$$

и т. д. где ε, ε', ε'' и *т. д. — любой набор кватернионных единиц.*

Но в отдельных случаях используется также следующий вариант основной теоремы арифметики для кватернионов.

Теорема (второй вариант основной теоремы арифметики для кватернионов).

Пусть A — целый кватернион с нормой $N(A) = b \cdot c$, где $b \equiv 1 \pmod 2$ и *c — натуральное число.*

Тогда кватернион A делится слева на примарный кватернион B нормы $N(B) = b$, т. е. $A = B \cdot C$, где C — целый кватернион с нормой $N(C) = c$.

Если при этом A — примитивный кватернион, то разложение $A = B \cdot C$ единственно, т. е., если $A = B_1 \cdot C_1$ то $B_1 = B$ и $C_1 = C$.

Представляет интерес вопрос о числе примитивных примарных кватернионов заданной нормы r. Обозначая число таких кватернионов через $\sigma_0(r)$, можно получить, что

$$\sigma_0(r) = r \prod_{p|r} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

где произведение берется по всем простым делителем числа г (относительно этого вопроса см. [8, 10]).

В теории поворотов кватернионов используются преобразования подобия, переводящие целый кватернион $L = ai + bj + ck$ нормы $m > 0$ в некоторый другой целый кватернион $L' = a'i + b'j + c'k$ той же нормы m.

С помощью поворотов кватернионов нормы m можно изучать распределение целых точек $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ по областям на сфере (1), где m — целочисленный растущий параметр.

В теории поворотов кватернионов с каждым кватернионом $L = ai + bj + ck$ сопоставляется целая точка $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, лежащая на сфере (1), а также целочисленная положительная бинарная квадратичная форма

$$\varphi_L = ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{4}$$

определителя $ac - b^2 = m$.

Переходим теперь к рассмотрению построения потока целых точек на сфере (1). Для этого фиксируем некоторое нечётное число $q > 0$ с условием: символ Лежандра

$$\left(\frac{-m}{p}\right) = 1, \quad p|q \tag{5}$$

для всех простых делителей числа q. Тогда из теории сравнений второй степени в силу (5) известно, что для каждого целого числа $s > 0$ найдётся целое число b, что выполняется сравнение

$$b^2 + m \equiv 0 \pmod{q^s}. \tag{6}$$

В связи со сравнением (6), пользуясь при этом основной теоремой арифметики для кватернионов, рассмотрим разложение

$$b + L = AC, \tag{7}$$

где b — целое число, L — целый кватернион с нулевой скалярной частью и нормы m, и значит

$$N(b + L) = b^2 + m \equiv 0 \pmod{q^s};$$

A, C — целые кватернионы.

Умножая обе части равенства (7) слева на кватернион C, а справа на C^{-1}, будем иметь

$$b + CLC^{-1} = C \cdot (AC)C^{-1} \Rightarrow b + CLC^{-1} = CA. \tag{8}$$

Так как CA есть целый кватернион, то из (8) получаем, что и CLC^{-1} также есть целый кватернион той же нормы m.

Обозначая теперь $CLC^{-1} = L'$, равенство (8) можно переписать в виде

$$b + L' = CA. \tag{9}$$

Полученную упорядоченную пару (L, L') будем называть поворотом от кватернионного вектора L к кватерниону L'. В виду некоммутативности кольца целых кватернионов из разложений (7) и (9) получаем, $L' \neq L$. Это означает, что свойство некоммутативности умножения кватернионов позволяет находить новые решения уравнений (1) и (2), исходя при этом из какого-нибудь решения L этих уравнений, а значит, и находить новые решения уравнения (1).

Повороту (L, L') будем сопоставлять положительную бинарную квадратичную форму (a, b, c) детерминанта m, равную

$$(a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = N(\bar{A}x + Cy), \tag{10}$$

так что $a = N(A)$, $c = N(C)$, $b = \mathrm{Sc}(AC)$, где $b^2 - ac = -m$ или что то же самое $ac - b^2 = m$.

При этом будем говорить, что бинарная целочисленная квадратичная форма (a, b, c) управляет поворотом (L, L'). Совокупность таких квадратичных форм дискриминанта $-m$ (или определителя m) при заданных L и L' образует класс бинарных квадратичных форм относительно отношения целочисленной эквивалентности таких квадратичных форм.

Пусть задан примитивный вектор-кватернион L нечётной нормы $m > 3$ и при
$m \equiv 1 \pmod 4$ задан класс собственно примитивных положительных бинарных квадратичных форм (a, b, c) дискриминанта $-m$, т. е. НОД$(a, 2a, c) = 1$, а при $m \equiv 3 \pmod 8$ задан класс несобственно примитивных бинарных квадратичных форм т. е. НОД$(a, 2a, c) = 2$ того же дискриминанта $-m$. Тогда найдутся ровно 12 различных примитивных векторов-кватернионов L' нормы m, для которых поворот (L, L') управляется этим классом бинарных квадратичных форм.

Все эти повороты имеют вид $(L, \varepsilon L' \varepsilon^{-1})$, где (L, L') — один такой поворот, а ε пробегает все кватернионные единицы.

Определение. Вектор-кватернионы (L, L'), для которых существует целый кватернион C и выполняются условия 1) - 3), называются поворотно эквивалентными.

Заметим, что бинарная квадратичная форма $(N(A), b, N(C))$ управляет поворотом (L, L'). Пусть примитивная положительная бинарная квадратичная форма (a, b, c) управляет поворотом (L, L') соответственно равенством

$$\left.\begin{aligned} &b + L = A \cdot C; \quad CLC' = L_1, \\ &N(A) = a, \quad N(C) = c. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Далее пусть собственно примитивная форма (a_1, b_1, c_1) управляет поворотом (L_1, L_2) соответственно равенствам

$$\left.\begin{aligned} &b + L = A \cdot C; \quad CLC' = L_1, \\ &N(A) = a_1, \quad N(C) = c. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Теорема. *Поворот (L_1, L_2) в условиях (11) и (12) управляется классом бинарных квадратичных форм (a_2, b_2, c_2), который является гауссовой композицией классов (a, b, c) и (a_1, b_1, c_1).*

Эта теорема показывает связь между теорией поворотов кватернионов и гауссовой теорией композиций бинарных квадратичных форм.

В связи с этим сделаем хотя бы краткий набросок гауссовой теорией композиции бинарных квадратичных форм одного и того же дискриминанта $-m$.

В теории композиции бинарных квадратичных форм значение третьего коэффициента с формы (a, b, c) не понадобится, поскольку, если $a \neq 0$, что всегда будет выполняться, коэффициент c определяется однозначно коэффициентами a и b и дискриминантом $-m$ ввиду соотношения $b^2 - 4ac = -m$, откуда $c = \dfrac{b^2 + m}{4a}$. Поэтому условимся обозначать через * коэффициент, величина которого не важна.

Определение. Две примитивные бинарные квадратичные формы $f_i = (a_i, b_i, c_i)$ $(i = 1; 2)$ дискриминанта $-m$ называются согласными, если:

1) $a_1 \cdot a_2 \neq 0$,

2) их средние коэффициенты одинаковы т. е. $b_1 = b_2 = b$,

3) $f_3 = \{a_1 \cdot a_2, b, *\}$ дискриминанта $-m$ является целочисленной.

Так получающаяся бинарная квадратичная форма f_3 называется гауссовой композицией бинарных квадратичных форм f_1 и f_2. Такое определение композиции бинарных квадратичных форм даётся в монографии Дж. Кассельса [12].

Снова фиксируем нечётное простое число $q \equiv 1 \pmod 2$ и рассматриваем числа $m \equiv 1; 2 \pmod 4$, $m \equiv 3 \pmod 8$ для которых символ Лежандра $\left(\dfrac{-m}{p}\right) = 1$. Тогда для любого целого $s > 0$ существует целое число b, что $b^2 + m \equiv 0 \pmod{q^s}$.

Рассматриваем примитивные кватернионы:

$b + L$ и их кватернионные разложения;

$b + L = AC$, где A, C — целые примитивные кватернионы;

$N(b + L) = b^2 + m \equiv 0 \pmod{q^s}$, причем $N(A) = q^s$;

пусть $A = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_s$, $N(Q_i) = q$.

Возьмём теперь набор всех примитивных векторов-кватернионов $L_1, L_2, \ldots, L_{r(m)}$ нормы m, где $r(m)$ — количество всех таких кватернионов.

Рассмотрим теперь разложения

$b + L_1 = A_1 C_1$, где $A_1 = Q_{11} \cdot Q_{12} \cdot \ldots \cdot Q_{1s}$

$b + L_2 = A_2 C_2$, где $A_2 = Q_{21} \cdot Q_{22} \cdot \ldots \cdot Q_{2s}$

$\ldots$

$b + L_{r(m)} = A_{r(m)} C_{r(m)}$, где $A_{r(m)} = Q_{r(m),1} \cdot Q_{r(m),2} \cdot \ldots \cdot Q_{r(m),s}$.

Все эти разложения следуют из основной теоремы арифметики для кватернионов.

Из этих разложений следуют равенства

$$L_i = L_i^{(0)};\ L_i^{(1)} = Q_{i1}^{-1} L_i^{(0)} Q_i^1;\ L_i^{(2)} = Q_{i2}^{-1} L_i^{(1)} Q_{i2};\ \ldots;\ L_i^{(s)} = Q_{is}^{-1} L_{is}^{(s-1)} Q_{is},$$

которые представим в виде следующего набора последовательностей кватернионных векторов

$$\begin{aligned} &L_1 = L_1^{(0)} \to L_1^{(1)} \to L_1^{(2)} \to \ldots \to L_1^{(s)}, \\ &L_2 = L_2^{(0)} \to L_2^{(1)} \to L_2^{(2)} \to \ldots \to L_2^{(s)}, \\ &\ldots \\ &L_{r(m)} = L_{r(m)}^{(0)} \to L_{r(m)}^{(1)} \to L_{r(m)}^{(2)} \to \ldots \to L_{r(m)}^{(s)}, \end{aligned} \tag{13}$$

при этом полученный такой набор называется потоком кватернионных векторов нормы m, состоящих из $r(m)$ цепочек векторов-кватернионов нормы $m > 0$ и длина s этих цепочек выбирается порядка $\log m$.

Если $s > \log m$, то вектор-кватернионы в этих цепочках могут повторяться.

Если обозначим через $T\colon L \to L'$ — преобразования целых примитивных векторов L нормы m, определяемое кватернионным уравнением

$$b + L = AC,\ \text{где } N(Q_i) = q,\ A = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_s, A, C \tag{14}$$

целые кватернионы, причём Q_i — примарный кватернион, т. е. $T\colon L_i \to Q_i^1 L Q_i$,то цепочки потока, идущие от кватернионов $L_1, L_1, \ldots, L_r$ с использованием операции T можно представить в виде последовательностей длины s

$$\begin{aligned} & L_1 \to TL_1 \to T^2L_1 \to \ldots \to T^{s-1}L_1 \\ & L_2 \to TL_2 \to T^2L_2 \to \ldots \to T^{s-1}L_2 \\ & \ldots \\ & L_r \to TL_r \to T^2L_r \to \ldots \to T^{s-1}L_r \end{aligned} \tag{15}$$

причем длина цепочек $s >> \log m$, именно в таком виде более удобно записывать цепочки потока (13) (см., напр., [8], эргодическая теорема 4.2.1).

Совокупность цепочек (15), начинающихся от всех целых примитивных кватернионных вектор $L_1, L_2, \ldots, L_r$ нормы m, образуют «поток» длины s таких векторов, при этом s выбирается порядка $\log m$.

Если m достаточно велико, то непересекающиеся цепочки будут длиной порядка $\log m$. Тогда оказывается [7], что вопросы асимптотической (при $m \to \infty$) равномерности распределения целых векторов

$$L = x_1 i + x_2 j + x_3 k$$

нормы m по модулю q или по поверхности (1) в смысле сферической меры можно заменить вопросами эргодичности так построенного потока. Это означает, что цепочки этого потока можно разделить на две категории:

1) «плохие», цепочки которых относительно мало, т. е. их будет $o(r(m))$, где $r(m)$ — число всех цепочек;

и 2) «хорошие» цепочки, которые обладают тем свойством, что доля векторов L_i цепочки, принадлежащих данной сферической области, асимптотически равна их доле при «асимптотически-равномерном» распределении всех векторов L сферы.

Далее вопросы эргодичности потока (15) изучают с помощью операторов A, а задача об операторах A в свою очередь сводится к вопросу о представлении целых чисел кватернарными квадратичными формами, т. е. к вопросу, исследуемому круговым методом Харди-Литтлвуда (этому методу посв., напр., кн. [13]).

Техника применения ДЭМ к кватернионам (целым точкам на сфере) выглядит следующим образом:

1) Предлагая «неэргодичность» построенного потока кватернионных векторов, из всех $r(m)$ цепочек выделяем $> \alpha r(m), \alpha > 0$ таких, что в соответствующих им операторах $A = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s$ число появлений среди $Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s$ данного примитивного кватерниона Q нормы q «ненормально» мало; здесь $\alpha > 0$ не зависит от m.

2) Тогда получается, что число различных кватернионов A в выделенных цепочках

$$<< (q^s)^{1-\beta}, \tag{16}$$

где $\beta > 0$ не зависит от m.

3) Но тогда доказывается, что при

$$s = \left[\frac{\log m}{2\log q}\right] \tag{17}$$

в любых $\alpha r(m)$ кватернионных равенствах (14) число различных кватернионов A

$$>> m^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \tag{18}$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно мало.

Утверждение 3) называют ключевой леммой ДЭМ в случае сферы.

4) В предположении (17) при $m \to \infty$ оценки (16) и (18) противоречат друг другу, что и доказывает эргодичность рассматриваемого потока.

Вначале ключевая лемма ДЭМ в случае кватернионов (целых точек на сфере) была получена Ю. В. Линником в ослабленном виде, т. е. вместо оценки (18) была найдена более слабая оценка для числа различных кватернионов A, а именно их количество

$$>> m^{\frac{1}{2}-\frac{\tau^2}{8}-\varepsilon}, \text{ где } \tau = -\frac{\log\left(1-\frac{1}{q}\right)}{2q} \tag{19}$$

еще при более жестком условии

$$s = \left[\left(\frac{1}{2}+\tau\right)\frac{\log m}{\log q}\right]$$

вместо $s = \left[\dfrac{\log m}{2\log q}\right]$ Ю. В. Линнику [7] с помощью такой ключевой леммы удалось получить оценку снизу для числа представлений $r(f,m)$ числа m тернарной квадратичной формой f

$$r(f,m) >> \frac{h(-m)}{(\log\log m)\log(\log\log m)}.$$

В этой же работе отмечается, что небольшое уточнение рассуждений даёт даже оценку

$$r(f,m) >> \frac{h(-m)}{\log\log m},$$

где $h(-m)$ — число классов положительных бинарных квадратичных форм определителя m. С другой стороны, получение с помощью ДЭМ оценки

$$r(f,m) >> h(-m)$$

истинной по порядку роста (при $m \to \infty$), а тем более получение для $r(f,m)$ асимптотической формулы невозможно без уточнения «ключевой леммы» ДЭМ, т. е. замены оценки (19) на оценку (18). Согласно Ю. В. Линнику форма f является удобной инвариантой $[p,1]$, где p — простое число.

После этой работы исследования Ю. В. Линника по ДЭМ прерываются почти на 10 лет, занимаясь при этом теорией вероятностей и некоторыми другими вопросами теории чисел.

Тем не менее в 1949 г. Ю. В. Линник [14] опубликовал обзор, в котором подробно развивается аппарат арифметики кватернионов, на котором базируется ДЭМ в случае положительных тернарных кватернионных форм. Затем появляется совместная работа Ю. В. Линника с А. В. Малышевым «О целых точках на сфере» (-ДАН СССР, 1953, т.89, №2, С.209-211), в которой ключевая лемма ДЭМ была доведена до не улучшаемой оценки, т. е. в кватернионных равенствах (14) число различных кватернионов A оценивается снизу как $m^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Наконец, в работе Ю. В. Линника [16] получен асимптотический закон распределения целых точек на сфере $x^2+y^2+z^2=m$ при $m \to \infty$ по областям на ней

$$H(\Gamma) = \frac{\mathrm{mes}(\Gamma)}{4\pi m}H(m)(1+\chi(\lambda,m,q)), \quad \chi(\lambda,m,q) \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

где Γ — выпуклая сферическая область на поверхности сферы радиуса $\sqrt{m}$; $\left(\dfrac{-m}{q}\right) = 1$, где q — нечётное простое число; $H(m)$ — число всех целых точек на сфере $x^2+y^2+z^2=m$; $\lambda > 0$ — любая константа при условии, что $\mathrm{mes}(\Gamma) < 4\pi m$.

В дальнейшем А. В. Малышев [10] распространил асимптотический результат Ю. В. Линника на эллипсоиды (гл. V и VI).

Основные свои результаты Ю. В. Линник изложил в монографии [8].

Для рассмотренного выше потока справедлива

Теорема (эргодическая).

Цепочки записанного потока можно разбить на две категории:

а) «плохие цепочки», которых мало, т. е. порядка $o(r)$;

б) «хорошие цепочки», обладающие свойством эргодичности, т. е.

$$\#\{1 \leqslant i \leqslant s \mid T^i L_k \in \Lambda_m,\ T^i L_k \equiv L_0 \ (\mathrm{mod\ g})\} \sim \beta s,$$

где $\#$ — знак мощности множества, $\sim$ — знак асимптотической эквивалентности

$$\beta = \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{\rho(g,m)},$$

где

$$\rho(g,m) = g^2 \prod_{p|g} \left(1 + \frac{\left(\frac{-m}{p}\right)}{p}\right).$$

Утверждения а) и б) составляют вместе эргодическую теорему для потоков целых точек, попадающих в данную область на сфере и в данный класс вычетов по модулю g.

Следующим этапом применения ДЭМ является вывод из эргодической теоремы «теоремы перемешивания» для целых точек на сфере Сф$_3(m)$.

Пусть A — множество примитивных точек на сфере Сф$_3(m)$ и M_0 — какое-либо множество проекций точек из A на единичную сферу Сф$_3(1)$. Обозначим через $T^r M_0$ множество, куда "перетекают"эти точки после r-кратного примитивного преобразования T.

Пусть $M(M_0)$ — число точек множества M_0; $M(T^l M_0 \cap \Lambda_0)$ — число точек множества $T^l M_0$, лежащих в множестве Λ_0; при этом на сфере Сф$_3(m)$ рассматривается сферический треугольник Ω, ограниченный сечениями Сф$_3(m)$ плоскостями $z = 0$, $y - z = 0$, $x - z = 0$. Образ Ω на единичную сферу Сф$_3(1)$ обозначим через Ω_0, при этом $\Lambda_0 \subset \Omega_0$. Операция T дает поток на множестве A примитивных точек $\Omega \in$ Сф$_3(m)$.

Тогда применение эргодической теоремы дает следующий результат.

Теорема (о перемешивании). *Пусть $l = 0, 1, 2, \ldots, s \geqslant C_1 \ln m$ и $M(M_0) > \varepsilon_0 H_0(m)$; $\varepsilon > 0$ — любое фиксированное число. Тогда для всех индексов l, за возможным исключением $s \cdot o(1)$ $(m \to \infty)$ таких индексов имеем*

$$M(T^l M_0 \cap \Lambda_0) \sim \frac{6}{\pi} \omega(\Lambda_0) M_0(M)$$

при $m \to \infty$; здесь $\omega(\Lambda_0)$ — телесный угол, под которым видна область Λ_0 из центра сферы.

Эргодическая теорема позволяет уже получить результат о равномерном распределении целых точек сферы как по областям на ней, так и по классам вычетов по данному модулю.

Теорема (о равномерном распределении целых точек на сфере).

Пусть $q \geqslant 3$ — простое число, для которого $\left(\dfrac{-m}{p}\right) = 1$, $p|q$, а Γ_m замкнутая выпуклая область на сфере Сф$_3(m)$. Пусть $\omega(\Gamma_m)$ — телесный угол, под которым видна область Γ_m из центра сферы.

Пусть еще $(x_1, x_2, x_3) \in$ Сф$_3(m)$ и $(x_1, x_2, x_3) \equiv (b_1, b_2, b_3) \pmod g$.

Тогда для числа целых примитивных точек $H_{g;b_1,b_2,b_3}(\Gamma_m)$ при $m \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$H_{g;b_1,b_2,b_3}(\Gamma_m) \sim \frac{\omega(\Gamma_m)}{4\pi} \cdot \frac{1}{\rho(g,m)} \cdot H_0(m),$$

где $H_0(m)$ — полное число целых точек на сфере Сф$_3(m)$.

3. Применение ДЭМ к неопределенным тернарным квадратичным формам

Естественным образом возникает вопрос и о применениях ДЭМ к неопределённым тернарным квадратичным формам. Первоначально ДЭМ прилагался лишь к простейшей неопределённой тернарной квадратичной форме

$$f_0 = f_0(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_3^2, \quad x_1 > 0$$

связанной с теорией приведения бинарных квадратичных форм. Изучалось распределение целых точек на двуполостном гиперболоиде (Ю. В. Линник [17, 18]),

$$f_0 = f_0(x_1, x_2, x_3) = m, \quad m > 0, \tag{20}$$

и на однополостном гиперболоиде (Б.Ф. Скубенко [19]),

$$f_0 = f_0(x_1, x_2, x_3) = m, \quad m < 0, \tag{21}$$

Эти исследования составляют содержание гл. V, VI монографии Ю. В. Линника [8].

При применениях ДЭМ к вопросу представлений чисел m формой f_0 каждому представлению (x_1, x_2, x_3), удовлетворяющему равенствам (15) или (16), т. е. каждой точке (x_1, x_2, x_3) на поверхности (15) или (16) сопоставляется бинарная квадратичная форма определителя m

$$\varphi(x, y) = x_1x^2 + 2x_2xy + x_3y^2$$

и вектор-матрицы нормы m с нулевым следом

$$L = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 \end{pmatrix}.$$

Эти три объекта будем считать всегда сопоставленными и заданными одновременно. Ввиду указанных интерпретаций проводились также исследования по применениям ДЭМ к вопросу об асимптотике числа приведённых бинарных квадратичных форм заданного определителя.

При применении ДЭМ к форме f_0 различаются случаи двуполостного $(m > 0)$ и однополостного $(m < 0)$ гиперболоидов. В случае двуполостного гиперболоида исследования затрудняются тем, что эта поверхность не компактна и примитивных точек бесконечно много, но зато в связанном с ним мнимом квадратичном поле имеется только конечное число единиц. Трудность преодолевается тем, что рассматривается не вся полость двуполостного гиперболоида, а лишь компактифицированная фундаментальная область на нём и нужные для этого потоки строятся на этой области.

В случае же однополостного гиперболоида добавляется ещё одна трудность, связанная с бесконечностью числа единиц в связанном с ним вещественном квадратичном поле (эта трудность была преодолена Б.Ф. Скубенко [19] своей теоремой о циклах приведённых неопределённых бинарных квадратичных форм: если l и l' — длины двух циклов приведённых неопределённых бинарных квадратичных форм определителя D, то $\frac{l'}{l} < c \cdot \log(1 + D)$, где c — абсолютная константа.

Исследования с помощью ДЭМ неопределённых тернарных квадратичных форм существенно использует арифметику кольца целых матриц 2-го порядка. Арифметика матриц второго порядка вместе с теорией поворотов вектор-матриц была построена А.В. Малышевым и У. М. Пачевым [20]. Но при доказательстве эргодичности цепочек целых точек наряду с ключевой леммой используется и асимптотика матриц 2-го порядка большой нормы, сопоставление которых даёт противоречие с предположением неэргодичности цепочек.

В работе А.В. Малышева [21] намечена программа дальнейшего развития этих исследований. Исследования Ю. В. Линника перенесены У М. Пачевым на двуполостные гиперболоиды довольно общего вида, а именно

$$f(x_1, x_2, x_3) = m,$$

где f — тернарная квадратичная форма, содержащаяся в форме f_0, т. е. f имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_0 \left(\sum_{k=1}^{3} c_{1k} x_k \sum_{k=1}^{3} c_{2k} x_k \sum_{k=1}^{3} c_{3k} x_k \right), \tag{22}$$

где $c_{ik} \in \mathbb{Z}$, $f_0 = x_1 x_2 - x_3^2$.

Сформулируем основной результат для форм вида (22), полученный в [21].

Обозначим через $r(\Lambda_{f,m}; b_1, b_2, b_3)$ число всех примитивных точек (x_1, x_2, x_3) на поверхности

$$f(x_1, x_2, x_3) = m, \quad m > 0,$$

удовлетворяющих условиям

$$(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda_{f,m}, \quad (x_1, x_2, x_3) \equiv (b_1, b_2, b_3) \pmod{g},$$

где $\Lambda_{f,m}$ — ограниченная квадрируемая область на поверхности с f — гиперболической мерой (площадью) λ. Тогда, считая ещё выполненными, необходимые родовые условия формы f, включая и условие $\left(\dfrac{-m}{q}\right) = 1$, получаем при $m \to \infty$

$$r(\Lambda_{f,m}; b_1, b_2, b_3) \sim \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{s(f, m, g, (c_{ij}))}{(wg)^2 \prod_{p|wg} \left(1 + \frac{\left(\frac{-m}{p}\right)}{p}\right)} \cdot r(m),$$

где $\lambda_0 = \dfrac{2\pi}{9}$ — полный гиперболический телесный угол; $w = \det(c_{ij})$; $s(f, m, g, (c_{ij}))$ — число решений $(\mathrm{mod}\ w)$ решений сравнения

$$f(gx_1 + b_1, gx_2 + b_2, gx_3 + b_3) \equiv m \pmod{wg};$$

для которых система чисел

$$\begin{gathered}
\{c_{11}(gx_1 + b_1) + c_{12}(gx_2 + b_2) + c_{13}(gx_3 + b_3); \\
c_{21}(gx_1 + b_1) + c_{22}(gx_2 + b_2) + c_{23}(gx_3 + b_3); \\
c_{31}(gx_1 + b_1) + c_{32}(gx_2 + b_2) + c_{33}(gx_3 + b_3)\}
\end{gathered}$$

различны $(\mathrm{mod}\ wg)$;

$$r(m) = h(-m) + h'(-m)$$

— общее число примитивных точек области приведения, соответствующей условиям приведения бинарных кв. форм определителя m.

Аналогичное исследование в случае однополостных гиперболоидов довольно общего вида было проведено А.В. Малышевым и Нгуен Нгор Гой [23].

Исследования Ю. В. Линника и У. М. Пачева [22] были обобщены в небольшой заметке Карпова А. Н. [24] на случай двуполостного гиперболоида

$$f(x_1, x_2, x_3) = m, \quad m > 0,$$

где f — целая изотропная форма (т. е. представляющая нуль нетривиально).

В дальнейшем, в связи с новым доказательством А.В. Малышевым и Б.М. Широковым [25] ключевой леммы ДЭМ для вектор-матриц второго порядка появилась возможность исследования с помощью ДЭМ изотропных тернарных квадратичных форм, охватывая оба случая гиперболоидов.

Вопрос об обобщении исследований Ю. В. Линника, Б. Ф. Скубенко и У. М. Пачева на случай неопределённых тернарных форм общего вида ставился в обзоре А.В. Малышева [26]. В связи с этим отметим, что в 2006 г. в работе У. М. Пачева [27] получено полное решение вопроса о представлении целых чисел изотропными тернарными квадратичными формами f общего вида, при этом существенно использовалось соотношение

$$\delta f(x_1, x_2, x_3) = f_0\left(\sum_{k=1}^{3} c_{1k}x_k \sum_{k=1}^{3} c_{2k}x_k \sum_{k=1}^{3} c_{3k}x_k\right),$$

которому удовлетворяет изотропная форма f; здесь δ — бесквадратное целое число $\neq 0$; f_0 — простейшая неопределённая форма; $c_{ik} \in \mathbb{Z}$ (см. Кассельс [11]).

Наряду с указанными исследованиями по тернарным квадратичным формам проводились также исследования по применениям ДЭМ по асимптотическому подсчёту числа приведённых бинарных квадратичных форм. Это направление исследований, в котором также используется ДЭМ, берёт своё начало с работы Ю. В. Линника [19]. Оно продолжено им в заметке, посвящённой асимптотической геометрии гауссовых родов положительных бинарных квадратичных форм [18]. Дальнейшие исследования в этом направлении проведены У. М. Пачевым [30].

Отметим один из результатов автора по этой тематике, описывающий асимптотическое поведение классов гауссовою рода, арифметический минимум которых делится на квадрат заданною числа. Обозначим $h_1(-m; G, q^2)$ число классов положительных бинарных квадратичных форм гауссовою рода G определителя m, арифметический минимум которых делится на q^2. Тогда, если $\left(\dfrac{-m}{p}\right) = 1$ для всех простых делителей p/q, то при $m \to \infty$

$$h_1(-m; G, q^2) \sim \frac{2^{\nu(q)}}{\sigma(q^2)} \cdot \frac{h(-m)}{t},$$

где $\nu(q)$ — число различных простых делителей числа q.

Другой подход к изучению вопроса о равномерном распределении целых точек на гиперболоидах и эллипсоидах в предположении справедливости некоторых гипотез о нулях L-функции Дирихле принадлежит Е. П. Голубевой [36].

Одной из важных проблем ДЭМ является получение безусловных (без каких-либо недоказанных гипотез) оценок остаточных членов в асимптотических формулах.

В статье Быковского В.А. [37] с помощью спектральной теории автоморфных функций получено безусловное уточнение результатов Ю. В. Линника и других о распределении целых точек на двуполостном гиперболоиде $4xy - z^2 = D$ в случае, когда D не делится на достаточно большой квадрат натурального числа.

После появления работы Дьюка [38], где методом модулярных форм полуцелого веса было получено безусловное решение задачи об асимптотико-геометрическом распределении целых точек на простейших двуполостных $x_1x_3 - x_2^2 = m$, $m \to \infty$ со степенным понижением остаточного члена представлялось, что рассматриваемая проблема может быть решена в общем виде. Но как показано в работе Голубевой Е.П. [39] даже в случае простейшего однополостного гиперболоида из результатов невозможно вывести асимптотический закон распределения целых точек по областям.

Это свидетельствует в пользу того, что как ДЭМ, так и метод, используемый в работах Голубевой Е.П. не исчерпали своих возможностей.

В последнее время проводилось также исследование, относящееся к поворотам для вещественных неопределённых анизотропных кватернионных векторов и связанное со следующим понятием.

Определим «максимум» $||A||$, указанного вида кватерниона

$$A = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$$

над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел равенством

$$||A|| = \max\{|a_0|, |a_1|, |a_2|, |a_3|\},$$

где $a_i \in \mathbb{R}$. Тогда имеет место следующая

Теорема. *Пусть L и L' — вещественные неопределённые анизотропные кватернионные векторы нормы $m > 0$. Пусть $L' = ULU^{-1}$, где U — вещественный неопределённый анизотропный кватернион нормы $u > 0$ из алгебры U_f, $f = x_1^2 - bx_2^2 - cx_3^3$ — тернарная квадратичная форма с целыми коэффициентами $b, c > 0$, причём число c не является нормой из расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{b})$. Тогда, если при $m \to \infty$ для некоторых постоянных $\theta > 0$, $\chi > 0$ выполняются неравенства*

$$||L|| < \chi m^{\frac{1}{2}+\theta}, \quad ||L'|| < \chi m^{\frac{1}{2}+\theta},$$

то $||U|| < \chi u^{\frac{1}{2}} m^{\theta}$.

Доказательство проводится рассмотрение каждого из случаев, когда каждый один из элементов матрицы $U = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix}$ будет наибольшим по модулю по сравнению с остальными элементами.

Аналогичный результат в более простых случаях ранее были получены Ю. В. Линником [8] (см. также [19]) и У. М. Пачевым [22].

В дальнейшем полученный результат может быть использован в доказательстве так называемой ключевой леммы дискретного эргодического метода для вектор-матриц указанного вида.

4. Проблематика. О некоторых нерешённых вопросах, связанных с ДЭМ.

Как обычно, нерешённых вопросов, относящихся к данной области исследования, гораздо больше, чем решённых, и они гораздо труднее. Мы отметим некоторые нерешённые вопросы, представляющие интерес (см. Ю. В.Линник) [8], гл. XI.

1. Некоторые нерешённые вопросы остаются в арифметике обобщённых кватернионов, к которым относятся важнейшие работы М. Эйхлера [40] и работы А.В. Малышева [10]. Не полностью выяснен вопрос о существовании алгоритма Евклида в арифметике неопределённых обобщённых кватернионов.

2. Эргодические теоремы и теоремы перемешивания для целых точек на сферах и гиперболоидах, несомненно, носят характер, указываемый их названиями. Однако, доказательства этих теорем средствами собственно эргодической теории не удаётся хотя бы потому, что множество исследуемых целых точек конечно и имеет лебегову меру нуль.

Существенно было найти такой выход из положения, когда эти теоремы формулировались бы не только в терминах эргодической теории, но и доказывались бы её средствами.

3. Весьма интересным является исследование немецкого математика М. Петерса [41], применившего ДЭМ к задаче представления целых чисел положительными тернарными квадратичными формами самого общего вида. В своих рассуждениях М. Петерс помимо ДЭМ существенно использует теорию спинорных родов квадратичных форм, в частности, результаты М. Кнезера и других авторов по представлению чисел тернарным спинорным родом [41].

Уже в работе М. Петерса отмечается, что с помощью ДЭМ для числа представлений из данной области могут быть получены оценки истинные по порядку (но пока не асимптотические формулы).

Представляет интерес получение асимптотических формул в задачах представления чисел положительными тернарными квадратичными формами вместо оценок, полученных М. Петерсом.

Исследования в этом направлении предполагают существенное развитие арифметики обобщённых кватернионов положительной нормы. Результаты М. Петерса были далее усилены Ю. Г. Тетериным [41, 42]. В дальнейшем Ю. Г. Тетерин перенес ДЭМ для положительных тернарных квадратичных форм на алгебраические поля.

4. Реальным является использование ДЭМ для обобщения исследований Ю. В. Линника, Б.Ф. Скубенко и У. М. Пачева на произвольные неопределённые тернарные квадратичные формы (здесь в связи с работой У. М. Пачева [27] остаётся исследовать только случай неопределённых анизотропных форм), аппарата матриц второго порядка здесь уже недостаточно. Но в некотором смысле арифметика неопределённых кватернионов проще арифметики положительных кватернионов ввиду того, что здесь в максимальном порядке все идеалы главные и их арифметика близка к арифметике гамильтоновых кватернионов.

5. Одной из важнейших проблем ДЭМ является получение безусловных остаточных членов в задаче представления чисел неопределёнными тернарными квадратичными формами, избавляясь при этом от условия $\left(\dfrac{-m}{p}\right) = 1$, где m — число представимое тернарной формой f; p — некоторое простое число или от гипотезы о нулях L — функции Дирихле. Безусловное решение этой задачи со степенным понижением остаточного члена в случае простейшей неопределённой тернарной квадратичной формы $xz - y^2$ было получено в работе Дьюка [38] методом модулярных форм полуцелого веса. Большой интерес представляет обобщение результата Дьюка на арифметические прогрессии с помощью ДЭМ или же методом модулярных форм.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линник Ю. В. Обобщение теоремы Frobenius'а и установление связи ее с теоремой Hurwitz'а о композиции квадратичных форм. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1938, Т. 2, №1, С. 41-52.

2. Линник Ю. В. Несколько новых теорем о представлении больших чисел отдельными положительными тернарными квадратичными формами // ДАН СССР, 1939, Т. 24, №3, С. 211-212.

3. Линник Ю. В. О представлении больших чисел положительными тернарными квадратичными формами // ДАН СССР, 1939, Т. 25, №7, С. 578.

4. Линник Ю. В. Одна общая теорема о представлении чисел отдельными тернарными квадратичными формами // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1939, Т. 3, №1, С. 87-108.

5. Linnik Y. V. On certain results relating to positive ternary quadratic forms // Мат. сб., 1939, Т. 5, вып. 3, С. 453-471.

6. Линник Ю. В. О представлении больших чисел положительными тернарными квадратичными формами. Тезисы к дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. — Л. 1940. 21 С.

7. Линник Ю. В. О представлении больших чисел положительными тернарными квадратичными формами // Изв. АН СССР, сер. матем., 1940, С. 363-402.

8. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л., 1967. 208 С.

9. Венков Б. А. Об арифметике кватернионов // Изд-во Российской АН, 1922 (Второе сообщение)

10. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, Т. 65. М-Л. Изд-во АН СССР, 1962, 212 С.

11. Malyshev A. V. Yu. V. Linnik's ergodic method in number theory // Acta Arithmetica XXII (1975) pp. 555-598.

12. Кассельс Дж. Рациональные квадратичные формы. — М.: Мир. 1982. 440 С.

13. Вон Р. Метод Харди-Литтлвуда. — М.: Мир. 1985.

14. Линник Ю. В. Кватернионы и числа Кэли: некоторые приложения арифметики кватернионов // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4, вып. 5, С. 49-98.

15. Линник Ю. В., Малышев А. В. О целых точках на сфере // ДАН СССР, 1953, №2, С. 209-211.

16. Линник Ю. В. Асимптотическое распределение целых точек на сфере // ДАН СССР, 1954, Т. 96, №5, С. 909-912.

17. Линник Ю. В. Асимптотическое распределение приведенных бинарных квадратичных форм в связи с геометрией Лобачевского // Вестн. ЛГУ, 1955, №2. Сер. мат., физ., хим., вып. 1, С. 3-23.

18. Линник Ю. В. Асимптотическая геометрия гауссовых родов; аналог эргодической теоремы. ДАН СССР, 1956, Т. 108, №6, С. 1018-1021.

19. Скубенко Б. Ф. Асимптотическое распределение целых точек на однополостном гиперболоиде и эргодические теоремы // Изв. АН СССР. сер. матем. 26, №5 (1962) С. 721-752.

20. Малышев А. В., Пачев У. М. Об арифметике матриц второго порядка // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1980. Т. 93, С. 87-141.

21. Малышев А. В. О применении дискретного эргодического метода в аналитической арифметике неопределенных тернарных квадратичных форм // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 93. С. 5-23.

22. Пачев У. М. О распределении целых точек на некоторых двуполостных гиперболоидах // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 1980. Т. 93. С. 87-141.

23. Малышев А. В., Нгуен Нгор Гой. О распределении целых точек на некоторых однополостных гиперболоидах // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1983. Т. 121. С. 83-93.

24. Карпов А. Н. О представлении целых чисел изотропными квадратичными формами // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 151. С. 66-67.

25. Малышев А. В., Широков Б. М. Новое доказательство ключевой леммы дискретного эргодического метода для вектор-матриц второго порядка // Вестник Ленингр. ун-та. 1991. С. 34-40.

26. Malyshev A. V. Discrete ergodic method and applications to the aritmetic of ternary quadratic forms // Topics in classical number theory. Budapest. — 1981. V. 34. P. 1023-1049.

27. Пачев У. М. Представление целых чисел изотропными тернарными квадратичными формами // Изв. РАН. — 2006. Сер. матем. Т. 70, №3. — С. 167-184.

28. Линник Ю. В. Асимптотическая геометрия гауссовых родов; аналог эргодической теоремы // Докл. АН СССР. — 1956. Т. 108, №6. — С. 1018-1021.

29. Малышев А. В., Пачев У. М. О числе классов целочисленных положительных бинарных квадратичных форм, арифметический минимум которых делится на заданное число // Алгебра и теория чисел. Нальчик. 1979. — Вып. 4. — С. 33-37.

30. Пачев У. М. О числе классов гауссового рода, арифметический минимум которых делится на квадрат заданного нечетного числа // Математические заметки. 1994. — Т. 55. — №2. — С. 118-127.

31. Пачев У. М. Эргодические свойства потоков положительных бинарных квадратичных форм в гауссовых родах // Зап. научн. семин. ЛОМИ РАН. — 1997. — Т. 236. — С. 149-161.

32. Пачев У. М. О распределении приведенных положительных бинарных квадратичных форм с условием делимости первых коэффициентов по классам вычетов // Ученые записки Орловского университета. — 2012. №6 (50). — С. 177-182.

33. Пачев У. М. О распределении приведенных неопределенных бинарных квадратичных форм с условием делимости первых коэффициентов по классам вычетов // Чебышевский сборник. 2013. — Т. 14. — Вып. 2 (46). — С. 139-150.

34. Пачев У. М. Асимптотическое распределение классов положительных бинарных квадратичных форм с условиями делимости коэффициентов // Фундаментальная прикладная математика. 2005. — Т. 11 (6). — С. 123-130.

35. Пачев У. М. Об асимптотике числа приведенных целочисленных бинарных квадратичных форм с условием делимости первых коэффициентов // Сибирский математический журнал. — 2007. — Т. 48. №2. — С. 376-388.

36. Голубева Е. П. О представлении больших чисел тернарными квадратичными формами // Докл. АН СССР. 1970. Т. 91, №3. С. 519-521.

37. Быковский В. А. Арифметико-аналитические свойства бинарных положительно определенных квадратичных форм // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1985. Т. 144. С. 5-20.

38. Duke W. Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maas forms // Invent. math. — 1988. V 92, №1. p. 78-90.

39. Голубева Е. П. Геодезические на верхней полуплоскости и распределение квадратичных иррациональностей // Зап. научн. семин. ЛОМИ РАН. 1988. Т. 254. С. 28-55.

40. Eichler M. Quadratische Formen und ortogonale Gruppen. Berlin, 1952.

41. Peters M. Darstellungen durch definite ternare quadratische Formen. Acta arithm. — 1977. Bd. 34, №1.

42. Тетерин Ю. Г. О представлении целых чисел положительными тернарными квадратичными формами // Зап. научн. сем. ЛОМИ. Т. 121. Изд-во "Наука". Ленинград 1983, С. 117-156.

43. Тетерин Ю. Г. Асимптотическая формула для числа представлений вполне положительными тернарными квадратичными формами // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1985, том 49, вып. 2. С. 393-426.

REFERENCES

1. Linnik, Y.V. 1938, "Generalization of Frobenius' theorem and establishing its connection with Hurwitz' theorem on the composition of quadratic forms", *Izv. AN SSSR. Ser. mat.*, Vol. 2, No. 1, pp. 41-52.

2. Linnik, Y.V. 1939, "Several new theorems on the representation of large numbers by individual positive ternary quadratic forms", *DAN SSSR*, Vol. 24, No. 3, pp. 211-212.

3. Linnik, Y.V. 1939, "On the representation of large numbers by positive ternary quadratic forms", *DAN SSSR*, Vol. 25, No. 7, p. 578.

4. Linnik, Y.V. 1939, "A general theorem on the representation of numbers by individual ternary quadratic forms", *Izv. AN SSSR. Ser. mat.*, Vol. 3, No. 1, pp. 87-108.

5. Linnik, Y.V. 1939, "On certain results relating to positive ternary quadratic forms", *Mat. sb.*, Vol. 5, Issue 3, pp. 453-471.

6. Linnik, Y.V. 1940, "On the representation of large numbers by positive ternary quadratic forms. Theses for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences", Leningrad, 21 p.

7. Linnik, Y.V. 1940, "On the representation of large numbers by positive ternary quadratic forms", *Izv. AN SSSR, ser. matem.*, pp. 363-402.

8. Linnik, Y.V. 1967, *Ergodic properties of algebraic fields*, Leningrad, 208 p.

9. Venkov, B.A. 1922, "On the arithmetic of quaternions", *Publishing House of the Russian Academy of Sciences (Second report).*

10. Malyshev, A.V. 1962, "On the representation of integers by positive quadratic forms", *Trudy Mat. in-ta im. V.A. Steklova AN SSSR*, Vol. 65, Moscow-Leningrad, Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 212 p.

11. Malyshev, A.V. 1975, "Yu. V. Linnik's ergodic method in number theory", *Acta Arithmetica*, Vol. XXII, pp. 555-598.

12. Cassels, J. 1982, *Rational quadratic forms*, Mir Publishers, Moscow, 440 p.

13. Wong, R. 1985, *The Hardy-Littlewood method*, Mir, Moscow.

14. Linnik, Y.V. 1949, "Quaternions and Cayley numbers: some applications of quaternion arithmetic", *Uspekhi mat. nauk*, Vol. 4, Issue 5, pp. 49-98.

15. Linnik, Y.V. and Malyshev, A.V. 1953, "On integer points on the sphere", *DAN SSSR*, No. 2, pp. 209-211.

16. Linnik, Y.V. 1954, "Asymptotic distribution of integer points on the sphere", *DAN SSSR*, Vol. 96, No. 5, pp. 909-912.

17. Linnik, Y.V. 1955, "Asymptotic distribution of reduced binary quadratic forms in connection with Lobachevsky geometry", *Vestn. LGU*, No. 2, Ser. mat., fiz., him., Issue 1, pp. 3-23.

18. Linnik, Y.V. 1956, "Asymptotic geometry of Gaussian genera; analogue of the ergodic theorem", *DAN SSSR*, Vol. 108, No. 6, pp. 1018-1021.

19. Skubenko, B.F. 1962, "Asymptotic distribution of integer points on a one-sheeted hyperboloid and ergodic theorems", *Izv. AN SSSR. ser. matem.*, Vol. 26, No. 5, pp. 721-752.

20. Malyshev, A.V. and Pachev, U.M. 1980, "On the arithmetic of second-order matrices", *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI*, Vol. 93, pp. 87-141.

21. Malyshev, A.V. 1980, "On the application of the discrete ergodic method in the analytical arithmetic of indefinite ternary quadratic forms", *Zap. nauchn. semin. LOMI*, Vol. 93, pp. 5-23.

22. Pachev, U.M. 1980, "On the distribution of integer points on some two-sheeted hyperboloids", *Zap. nauchn. semin. LOMI*, Vol. 93, pp. 87-141.

23. Malyshev, A.V. and Nguyen Ngoc Goy 1983, "On the distribution of integer points on some one-sheeted hyperboloids", *Zap. nauchn. semin. LOMI*, Vol. 121, pp. 83-93.

24. Karpov, A.N. 1986, "On the representation of integers by isotropic quadratic forms", *Zap. nauchn. semin. LOMI*, Vol. 151, pp. 66-67.

25. Malyshev, A.V. and Shirokov, B.M. 1991, "A new proof of the key lemma of the discrete ergodic method for second-order vector-matrices", *Vestnik Leningr. un-ta*, pp. 34-40.

26. Malyshev, A.V. 1981, "Discrete ergodic method and applications to the arithmetic of ternary quadratic forms", *Topics in classical number theory*, Budapest, Vol. 34, pp. 1023-1049.

27. Pachev, U.M. 2006, "Representation of integers by isotropic ternary quadratic forms", *Izv. RAN. Ser. matem.*, Vol. 70, No. 3, pp. 167-184.

28. Linnik, Y.V. 1956, "Asymptotic geometry of Gaussian genera; an analogue of the ergodic theorem", *Dokl. AN SSSR*, Vol. 108, No. 6, pp. 1018-1021.

29. Malyshev, A.V. and Pachev, U.M. 1979, "On the number of classes of integer positive binary quadratic forms whose arithmetic minimum is divisible by a given number", *Algebra i teoriya chisel*, Nalchik, Issue 4, pp. 33-37.

30. Pachev, U.M. 1994, "On the number of classes of Gaussian genus whose arithmetic minimum is divisible by the square of a given odd number", *Matematicheskie zametki*, Vol. 55, No. 2, pp. 118-127.

31. Pachev, U.M. 1997, "Ergodic properties of flows of positive binary quadratic forms in Gaussian genera", *Zap. nauchn. semin. LOMI RAN*, Vol. 236, pp. 149-161.

32. Pachev, U.M. 2012, "On the distribution of reduced positive binary quadratic forms with the condition of divisibility of the first coefficients by residue classes", *Uchenye zapiski Orlovskogo universiteta*, No. 6 (50), pp. 177-182.

33. Pachev, U.M. 2013, "On the distribution of reduced indefinite binary quadratic forms with the condition of divisibility of the first coefficients by residue classes", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 14, Issue 2 (46), pp. 139-150.

34. Pachev, U.M. 2005, "Asymptotic distribution of classes of positive binary quadratic forms with conditions of divisibility of coefficients", *Fundamentalnaya prikladnaya matematika*, Vol. 11 (6), pp. 123-130.

35. Pachev, U.M. 2007, "On the asymptotics of the number of reduced integer binary quadratic forms with the condition of divisibility of the first coefficients", *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, Vol. 48, No. 2, pp. 376-388.

36. Golubeva, E.P. 1970, "On the representation of large numbers by ternary quadratic forms", *Dokl. AN SSSR*, Vol. 91, No. 3, pp. 519-521.

37. Bykovsky, V.A. 1985, "Arithmetico-analytic properties of binary positive definite quadratic forms", *Zap. nauchn. semin. LOMI*, Vol. 144, pp. 5-20.

38. Duke, W. 1988, "Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maas forms", *Invent. math.*, Vol. 92, No. 1, pp. 78-90.

39. Golubeva, E.P. 1988, "Geodesics on the upper half-plane and distribution of quadratic irrationals", *Zap. nauchn. semin. LOMI RAN*, Vol. 254, pp. 28-55.

40. Eichler, M. 1952, *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*, Berlin.

41. Peters, M. 1977, "Representations by definite ternary quadratic forms", *Acta arithm.*, Vol. 34, No. 1.

42. Teterin, Yu.G. 1983, "On the representation of integers by positive ternary quadratic forms", *Zap. nauchn. sem. LOMI*, Vol. 121, Nauka Publishing House, Leningrad, pp. 117-156.

43. Teterin, Yu.G. 1985, "Asymptotic formula for the number of representations by completely positive ternary quadratic forms", *Izv. AN SSSR. Ser. matem.*, Vol. 49, Issue 2, pp. 393-426.

Получено: 09.04.2025
Принято в печать: 27.08.2025