

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 3.

УДК 534.2

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-358-373

**Рассеяние плоской звуковой волны на изотропных телах
с полигональной границей**

Д. Р. Лепетков

Лепетков Даниил Русланович — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: Lepetkov@ya.ru

Аннотация

Рассматривается задача рассеяния плоской звуковой волны на изотропном, линейно-упругом теле, представленном неструктурированной полигональной сеткой. Проблема исследуется в контексте акустики и эластодинамики. Предлагается эффективный алгоритм на основе метода граничных элементов (ВЕМ) и коллокации для вычисления потенциала рассеянной волны. Основные сложности реализации включают неединственность граничного уравнения, сингулярность интегралов и заполненность матрицы системы. Для их преодоления используются комбинированное уравнение Бертона – Миллера, регуляризация с помощью тождеств для функции Грина и разбиение меша на области Вороного. Метод позволяет снизить вычислительные затраты по сравнению с методом конечных элементов (FEM), так как требует разбиения только поверхности объекта. Для валидации разработанного подхода проводится сравнение с аналитическим решением для шара, а также с численными решениями для сложных тел, полученными в COMSOL. Показано, что предложенный алгоритм позволяет эффективно рассчитывать акустические поля для изотропных тел произвольной формы, представленных полигональными сетками.

Ключевые слова: акустическое рассеяние, эластодинамика, метод граничных элементов (ВЕМ), метод коллокаций, полигональная сетка.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Лепетков, Д. Р. Рассеяние плоской звуковой волны на изотропных телах с полигональной границей // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 3, с. 358–373.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 3.

UDC 534.2

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-358-373

**Scattering of a plane sound wave on isotropic bodies
with a polygonal boundary**

D. R. Lepetkov

Lepetkov Daniil Ruslanovich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: Lepetkov@ya.ru

Abstract

The problem of plane acoustic wave scattering on an isotropic, linear-elastic body represented by an unstructured polygonal mesh is considered. The problem is studied in the context of acoustics and elastodynamics. An efficient algorithm based on the boundary element method (BEM) and collocation is proposed for computing the scattered wave potential. The main implementation challenges include the non-uniqueness of the boundary acoustic equation, the singularity of integrals, and the full population of the system matrix. To overcome these issues, the Burton – Miller combined equation, regularization using Green’s function identities, and Voronoi-based mesh partitioning are employed. Compared to the finite element method (FEM), the proposed approach reduces computational costs as it requires discretization of the object’s surface only. The developed method is validated by comparing it with the analytical solution for a sphere and with numerical solutions for complex bodies obtained using COMSOL. The results show that the proposed algorithm effectively computes acoustic fields for isotropic objects of arbitrary shape represented by polygonal meshes.

Keywords: acoustic scattering, elastodynamics, boundary element method (BEM), collocation method, polygonal mesh.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

Lepetkov, D. R. 2025, “Scattering of a plane sound wave on isotropic bodies with a polygonal boundary”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 358–373.

Введение

Рассматривается задача рассеяния плоской звуковой волны на однородном, изотропном, линейно-упругом теле $D \subset \mathbb{R}^3$. Данная проблема изучается на стыке акустики и эластодинамики (см., [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]). Аналитическое решение известно для шара. Есть некоторые близкие результаты для тел канонической формы с аналитической границей. Однако в общем случае требуется применение численных методов. В данной работе предполагается, что поверхность тела $S = \partial D$ (кусочно гладкая класса C^2) задана неструктурированной полигональной сеткой (3D-мешем), которая может иметь большой размер. Данный случай возникает в практических приложениях, например, для тел, получаемых 3D-реконструкциями.

Дается эффективный подход для вычисления потенциала рассеянной волны, базирующийся на методе граничных элементов (BEM) и коллокации. Реализация этого подхода сталкивается со следующими принципиальными сложностями: 1) неединственность решения граничного акустического уравнения, 2) сингулярность интегралов и 3) заполненность матрицы системы. Для преодоления 1) применяется комбинированное уравнение Бертона–Миллера, для 2 — регуляризация на основе тождеств для статической функции Грина, для 3 — сэмплирование и разбиение меша на области (граничные элементы) Вороного. Так как в методе используется только разбиение поверхности на 2D-элементы, он имеет преимущество в вычислительных ресурсах перед методом конечных элементов (FEM), где требуется разбиение на 3D-элементы.

В соответствующих местах будем пользоваться соглашением о суммировании по повторяющемуся индексу. В частности, через $xy = \sum_{i=1}^3 x_i y_i = x_i y_i$ обозначим скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^3$. Положим $|x| = (xx)^{1/2}$, $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3: |x| = 1\}$ — единичная сфера.

Пусть ρ_0 — плотность окружающей среды, c_0 — скорость звука, $\Psi_1(x) = e^{ik_0 dx}$ — потенциал плоской звуковой волны, падающей на тело в направлении $d \in \mathbb{S}^2$, $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ — волновое число, ω — круговая частота, Ψ_s — потенциал рассеянной волны, $\Psi_0 = \Psi_1 + \Psi_s$ — полный акустический потенциал в среде. Временной множитель $e^{-i\omega t}$ везде опускается.

Пусть ρ — плотность изотропного тела, λ и μ — параметры Ламе, $c_L = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ — скорость продольных волн, $c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ — скорость поперечных волн, $k_L = \frac{\omega}{c_L}$ и $k_T = \frac{\omega}{c_T}$ — соответствующие

волновые числа.

Основная задача состоит в том, чтобы дать эффективный алгоритм для расчета акустического потенциала Ψ_S во внешности D^c тела D в зависимости от полигональной сетки S , падающей волны и параметров среда–материал тела. В разд. 1 приводятся основные уравнения акустики и эластодинамики, формулируется модель задачи. В разд. 2 сформулировано аналитическое решение для случая шара. Оно используется для валидации метода в разд. 4. В разд. 3 даются детали предлагаемого ВЕМ-метода коллокаций для случая полигональных сеток. Также предложен оптимизация этого метода, позволяющая работать с большими сетками. В разд. 4 приведены результаты сравнения решений для шара и тел сложной формы. В последнем случае аналитическое решение недоступно, поэтому в качестве референсного используется решение, полученное в COMSOL комбинированным FEM-методом [9].

1. Основные уравнения акустики и эластодинамики

Приведем основные уравнения, на которых основан метод граничных элементов для проблем акустики и эластодинамики. Пусть $n = n(x) \in \mathbb{S}^d$ — внешняя нормаль к поверхности в точке $x \in S$, $\partial_n = \frac{\partial}{\partial n}$, $v_n = vn$, $(v)_n = v - v_n n$ — проекция вектора v на касательную плоскость, $\nabla_S \Psi = (\nabla \Psi)_n$ — поверхностный градиент, $i, j = 1, 2, 3$, δ_{ij} — символ Кронекера, $u_{,ij} = \partial_{x_i} \partial_{x_j} u$ и аналогично для других частных производных от u по координатам вектора x . Тогда, например, с учетом соглашения о суммировании оператор Лапласа $\Delta u = u_{,ii}$.

Акустические уравнения

Пусть $G_k(x', x) = \frac{e^{ik|x'-x|}}{4\pi|x'-x|}$ — функция Грина (фундаментальное решение) для уравнения Гельмгольца в пространстве $\Psi_{,ii} + k^2 \Psi = 0$, удовлетворяющая условию Зоммерфельда для уходящих волн. Тогда полный акустический потенциал в среде Ψ_0 является единственным решением комбинированного граничного уравнения Бертона–Миллера [3, 7]

$$C(x)T_x(\Psi_0(x)) = \int_S \{T_x(\partial_{n'} G_{k_0}(x', x))\Psi_0(x') - T_x(G_{k_0}(x', x))\partial_{n'} \Psi_0(x')\} dx' + T_x(\Psi_1(x)), \quad (1)$$

где $dx' = dS(x')$, $n' = n(x')$, множитель $C(x)$ для $x \in S$ — положительный геометрический коэффициент, зависящий от скачка нормали ($C(x) = 1/2$ в точках гладкости S), $C(x) = 0$ внутри D , $C(x) = 1$ снаружи D , оператор $T_x(f) = f(x) + \alpha \partial_n f(x)$, $\alpha = i/k_0$. Относительно выбора α см. [10]. Гладкость решения обсуждается в [11].

При $\alpha = 0$ получаем граничное уравнение в стандартной форме. В [3] для жестких тел показано, что оно имеет неединственное решение для волновых чисел, отвечающих собственным значениям внутренней задачи Дирихле. Поэтому использование граничного уравнения в стандартной форме для определенных волновых чисел (потенциально неизвестных) ведет к численной неустойчивости, в том числе и для изотропных тел (это иллюстрируется рис. 2).

Так как функция Грина и ее производные имеют особенность при $x' = x$ интегралы в уравнении (1) сингулярные и гиперсингулярные. Поэтому в численных расчетах потребуется регуляризация. В случае интегралов с производной функции Грина она проводится на основе следующих тождеств для статической функции Грина [12]:

$$\begin{aligned} \int_S \partial_{n'} G_0(x', x) dx' &= -C(x), \quad \int_S \partial_{nn'}^2 G_0(x', x) dx' = 0, \\ \int_S \partial_{nn'}^2 G_0(x', x)(x' - x) dx' &= \int_S \partial_n G_0(x', x) n' dx' - C(x)n, \end{aligned}$$

где $\partial_{nn'}^2 = \partial_n \partial_{n'}$. Отсюда

$$I_{1,k} \Psi(x) = \int_S \partial_{n'} G_k(x', x) \Psi(x') dx' + C(x) \Psi(x) = \int_S \{ \partial_{n'} G_k(x', x) \Psi(x') - \partial_{n'} G_0(x', x) \Psi(x) \} dx', \quad (2)$$

и

$$I_{2,k} \Psi(x) = \int_S \partial_{nn'}^2 G_k(x', x) \Psi(x') dx' = \int_S \{ \partial_{nn'}^2 G_k(x', x) \Psi(x') - \partial_{nn'}^2 G_0(x', x) L_\Psi(x', x) + \partial_n G_0(x', x) \nabla_S \Psi(x) n' \} dx', \quad (3)$$

где

$$L_\Psi(x', x) = \Psi(x) + \nabla_S \Psi(x) (x' - x)_n.$$

Для случая интегралов вида $\int_S G_k(x', x) F(x') dx'$ с непрерывной функцией F удобных тождеств нет. Однако этот интеграл слабо сингулярный для точек гладкости $x \in S$ (см., например, [5, гл. 2]). Действительно, возьмем окрестность $S_\varepsilon(x) \subset S$ точки x с площадью $w_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (например, проекцию малого круга с центром x из касательной плоскости). Тогда

$$\int_S G_k(x', x) F(x') dx' = \int_{S \setminus S_\varepsilon(x)} G_k(x', x) F(x') dx' + \int_{S_\varepsilon(x)} G_k(x', x) F(x') dx', \quad (4)$$

где

$$\int_{S_\varepsilon(x)} G_k(x', x) F(x') dx' = F(x) \sqrt{\frac{w_\varepsilon}{4\pi}} (1 + o(1)). \quad (5)$$

Приведем следующие полезные формулы, которые используются далее:

$$y = x' - x, \quad r = |y|, \quad t = r^{-1}, \quad \partial_{n'} r = t y n', \quad \partial_n r = -t y n,$$

$$k_1 = ik, \quad \Psi_1 = e^{k_1 dx}, \quad \partial_n \Psi_1 = k_1 e^{k_1 dx} dn, \quad G_k = (4\pi)^{-1} e^{k_1 r} t,$$

$$\partial_{n'} G_k = G_k(k_1 - t) \partial_{n'} r, \quad \partial_n G_k = G_k(k_1 - t) \partial_n r,$$

$$\partial_{nn'}^2 G_k = k_1^2 G_k \partial_{n'} r \partial_n r - G_k(k_1 - t) t (n' n + 3 \partial_{n'} r \partial_n r).$$

Для расчета искомого потенциала рассеянной волны Ψ_s во внешности D используем формулу (следствие (1) при $\alpha = 0$)

$$\Psi_s(x) = \int_S \{ \partial_{n'} G_{k_0}(x', x) \Psi_0(x') - G_{k_0}(x', x) \partial_{n'} \Psi_0(x') \} dx', \quad x \in D^c. \quad (6)$$

Через

$$u_0 = \nabla \Psi_0, \quad p_0 = \rho_0 \omega^2 \Psi_0 \quad (7)$$

обозначим соответственно вектор смещения и давление в акустическом поле.

Уравнения эластодинамики

Воспользуемся результатами [2, 4, 6]. Тело D предполагается однородным, изотропным и линейно-упругим. Пусть u — вектор смещения в D с координатами $u_i = u_i(x)$. Уравнения равновесия при отсутствии объемных сил и под действием гармонических во времени динамических нагрузок для тела D имеют следующий вид:

$$(\lambda + \mu) u_{i,ij} + \mu u_{j,ii} + \rho \omega^2 u_j = 0. \quad (8)$$

В литературе они также известны как уравнения Навье–Коши для установившейся динамики упругих сред.

Пусть ε — тензор смещений, σ — тензор напряжений, p — вектор напряжений на дифференциальном элементе с нормалью n . Имеем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad p_j = \sigma_{ij} n_i.$$

Эти соотношения описывают линейную упругую изотропную среду в рамках закона Гука. Отметим, что тензоры ε , σ симметричны.

Для применения метода граничных элементов уравнение (8) записывается в следующей интегральной форме:

$$C_{ij}(x)u_j(x) = \int_S \{U_{ij}(x', x)p_j(x') - P_{ij}(x', x)u_j(x')\} dx', \quad x \in S, \quad (9)$$

где множитель $C_{ij}(x)$ имеет тот же смысл, что и коэффициент $C(x)$ в (1), $C_{ij}(x) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$ в точках гладкости поверхности, U_{ij} — функция Грина для перемещений и P_{ij} — для напряжений (они образуют фундаментальное решение (8)). Уравнение (9) является динамическим вариантом тождества Бетти в статической теории упругости.

Выражения для функций Грина даны в [2, 6]. Пусть

$$\begin{aligned} r_{,i} &= \partial_{x'_i} r = \frac{y_i}{r} = y_i t, \quad k_{T1} = ik_T, \quad k_{L1} = ik_L, \quad a = \frac{c_T^2}{c_L^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \\ \psi &= \left(1 + \frac{t}{k_{T1}} + \frac{t^2}{k_{T1}^2}\right)(te^{-k_{T1}r}) - \left(\frac{t}{k_{L1}} + \frac{t^2}{k_{L1}^2}\right)(ate^{-k_{L1}r}), \\ \chi &= \left(1 + \frac{3t}{k_{T1}} + \frac{3t^2}{k_{T1}^2}\right)(te^{-k_{T1}r}) - \left(1 + \frac{3t}{k_{L1}} + \frac{3t^2}{k_{L1}^2}\right)(ate^{-k_{L1}r}), \\ \psi' &= -\left(k_{T1} + 2t + \frac{3t^2}{k_{T1}} + \frac{3t^3}{k_{T1}^2}\right)(te^{-k_{T1}r}) + \left(t + \frac{3t^2}{k_{L1}} + \frac{3t^3}{k_{L1}^2}\right)(ate^{-k_{L1}r}), \\ \chi' &= -\left(k_{T1} + 4t + \frac{9t^2}{k_{T1}} + \frac{9t^3}{k_{T1}^2}\right)(te^{-k_{T1}r}) + \left(k_{L1} + 4t + \frac{9t^2}{k_{L1}} + \frac{9t^3}{k_{L1}^2}\right)(ate^{-k_{L1}r}), \end{aligned}$$

где штрих означает производную по r . Тогда

$$U_{ij}(x', x) = \frac{1}{4\pi\mu} (\psi \delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j}) = U_A \delta_{ij} + U_{Br,i} r_{,j}, \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} P_{ij}(x', x) &= -\frac{1}{4\pi} \{ (t\chi - \psi') \partial_{n'} r \delta_{ij} + 2(\chi' - 2t\chi) \partial_{n'} r r_{,i} r_{,j} \\ &\quad + [(2/a - 2)t\chi - (1/a - 2)(\psi' - \chi')] r_{,i} n'_j + (t\chi - \psi') r_{,j} n'_i \} \\ &= P_A \delta_{ij} + P_{Br,i} r_{,j} + P_{Cr,i} n'_j + P_{Dr,j} n'_i. \end{aligned}$$

Также потребуется статическая функция Грина P_{0ij} , отвечающая $\omega = 0$:

$$P_{0ij}(x', x) = -\frac{at^2}{4\pi} \{ \partial_{n'} r \delta_{ij} + 3(1/a - 1) \partial_{n'} r r_{,i} r_{,j} - r_{,i} n'_j + r_{,j} n'_i \},$$

которая аналогично раскладывается по компонентам P_{0A} , P_{0B} , P_{0C} , P_{0D} .

Справедливо тождество [12]

$$C_{ij}(x) = - \int_S P_{0ij}(x', x) dx',$$

которое используется для регуляризации интеграла с P_{ij} в уравнении (9). Тогда это уравнение записывается в виде

$$\int_S \{P_{ij}(x', x)u_j(x') - P_{0ij}(x', x)u_j(x) - U_{ij}(x', x)p_j(x')\} dx' = 0, \quad x \in S. \quad (11)$$

Для интеграла с U_{ij} поступаем аналогично (4), (5). Несложные вычисления с учетом выражения (10) дают

$$\int_{S_\varepsilon(x)} U_{ij}(x', x)F_j(x') dx' = F_i(x) \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \sqrt{\frac{w_\varepsilon}{4\pi}} (1 + o(1)), \quad (12)$$

где F_i — непрерывные функции.

Полная модель задачи

К уравнениям выше нужно присоединить граничные условия для смещения и давления. Пусть $x \in S$. Тогда с учетом (7)

$$u_n = \nabla \Psi_0 n = \partial_n \Psi_0, \quad p_n = -p_0 = -\rho_0 \omega^2 \Psi_0, \quad (p)_n = 0. \quad (13)$$

Для учета условия $(p)_n = 0$ удобно работать в локальной системе координат. Для этого в каждой точке $x \in S$ зададим тангенту $t = t(x)$ и бинормаль $b = b(x)$ ($b = n \times t$), которые вместе с нормалью $n = n(x)$ образуют локально непрерывный ортонормированный базис. Тогда на S

$$u = u_t t + u_b b + u_n n, \quad p = p_n n,$$

где $u_t = ut$, $u_b = ub$, $u_n = un$. Отсюда

$$u_j = u_t t_j + u_b b_j + u_n n_j, \quad p_j = p_n n_j.$$

Подставляя эти равенства в уравнение (11), получаем

$$\begin{aligned} \int_S \{ & (P_{ij}(x', x)t'_j)u_t(x') + (P_{ij}(x', x)b'_j)u_b(x') + (P_{ij}(x', x)n'_j)u_n(x') \\ & - [(P_{0ij}(x', x)t_j)u_t(x) + (P_{0ij}(x', x)b_j)u_b(x) + (P_{0ij}(x', x)n_j)u_n(x)] \\ & - (U_{ij}(x', x)n'_j)p_n(x') \} dx' = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $t' = t(x')$, $b' = b(x')$, $n' = n(x')$.

Акустическое уравнение (1) с учетом (2), (3) запишем в виде

$$\begin{aligned} 2C(x)\Psi_0(x) + \alpha C(x)\partial_n \Psi_0(x) - I_{1,k_0}\Psi_0(x) - \alpha I_{2,k_0}\Psi_0(x) \\ + \int_S T_x(G_{k_0}(x', x))\partial_{n'}\Psi_0(x') dx' = T_x(\Psi_1(x)), \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом граничных условий (13) делаем вывод, что в качестве неизвестных в задаче можно взять функции u_t , u_b , u_n и Ψ_0 . Запишем полученные результаты в виде следующего утверждения, где также использована формула (6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. (а) Компоненты решения u_t , u_b , u_n , Ψ_0 на поверхности S находятся из четырех линейных граничных уравнений (14), (15), в которых $\partial_n \Psi_0$ надо заменить на u_n и p_n на $-\rho_0 \omega^2 \Psi_0$.

(б) Во внешности тела D имеем

$$\Psi_s(x) = \int_S \{ \partial_{n'} G_{k_0}(x', x) \Psi_0(x') - G_{k_0}(x', x) u_n(x') \} dx', \quad x \in D^c.$$

2. Аналитическое решение для шара

Для валидации метода использовалось известное аналитическое решение для изотропного шара $B_a = \{x \in \mathbb{R}^3: |x| \leq a\}$ радиуса $a > 0$ (см., например, [1]). Приведем его. Для этого воспользуемся сферическими координатами $x = r(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$, где $r = |x|$, $\cos \theta = dx/r$. Пусть j_l и h_l — сферические функции Бесселя и Ганкеля первого рода соответственно, P_l — многочлены Лежандра.

Будем пользоваться сферическими разложениями вида $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(r)P_l(\cos \theta)$. Тогда

$$\Psi_I = e^{ik_0 dx} = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l j_l(k_0 r) P_l(\cos \theta), \quad \Psi_S = \sum_{l=0}^{\infty} A_l h_l(k_0 r) P_l(\cos \theta),$$

где $\gamma_l = (2l+1)i^l$, A_l — неизвестные коэффициенты. Отсюда

$$\Psi_0 = \sum_{l=0}^{\infty} (\gamma_l j_l(k_0 r) + A_l h_l(k_0 r)) P_l(\cos \theta).$$

Смещение в упругой сфере представляется в виде $u = \nabla \Psi_L + \nabla \times (r \Psi_T e_r)$, где e_r — радиальный орт, скалярные потенциалы Ψ_L , Ψ_T отвечают продольным и поперечным волнам и удовлетворяют внутри D уравнениям Гельмгольца с волновыми числами k_L , k_T ,

$$\Psi_L = \sum_{l=0}^{\infty} B_l j_l(k_L r) P_l(\cos \theta), \quad \Psi_T = \sum_{l=0}^{\infty} C_l j_l(k_T r) P_l(\cos \theta).$$

Отсюда находятся радиальная (нормальная) компонента вектора смещения, радиальная и касательная компоненты тензора напряжений в виде

$$u_r = \partial_r \Psi_L + (r \partial_r^2 + 2 \partial_r + r k_T^2) \Psi_T = D_{u_r}^L \Psi_L + D_{u_r}^T \Psi_T,$$

$$\sigma_{rr} = (2\mu \partial_r^2 - \lambda k_L^2) \Psi_L + 2\mu(r \partial_r^3 + 3 \partial_r^2 + r k_T^2 \partial_r + k_T^2) \Psi_T = D_{\sigma_{rr}}^L \Psi_L + D_{\sigma_{rr}}^T \Psi_T,$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu r^{-1}(\partial_r - r^{-1}) \partial_\theta \Psi_L + 2\mu(\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r - r^{-2} + k_T^2/2) \partial_\theta \Psi_T = D_{\sigma_{r\theta}}^L \partial_\theta \Psi_L + D_{\sigma_{r\theta}}^T \partial_\theta \Psi_T.$$

Из граничных условий (13) приравниванием коэффициентов разложений на границе шара находим для $l = 0, 1, 2, \dots$

$$\gamma_l \partial_r(j_l(k_0 r)) + A_l \partial_r(h_l(k_0 r)) = B_l D_{u_r}^L(j_l(k_L r)) + C_l D_{u_r}^T(j_l(k_T r)),$$

$$B_l D_{\sigma_{rr}}^L(j_l(k_L r)) + C_l D_{\sigma_{rr}}^T(j_l(k_T r)) = -\rho_0 \omega^2 (\gamma_l j_l(k_0 r) + A_l h_l(k_0 r))$$

$$B_l D_{\sigma_{r\theta}}^L(j_l(k_L r)) + C_l D_{\sigma_{r\theta}}^T(j_l(k_T r)) = 0.$$

Здесь нужно выполнить дифференцирование по r , воспользовавшись известными формулами для функций Бесселя, и положить $r = a$. Получим линейную систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов A_l , B_l , C_l , что и дает аналитическое решение задачи.

3. ВЕМ-метод коллокаций для полигональных сеток

Входная геометрия

На практике применяются следующие способы задания поверхности тела сложной формы: Вгеп-представление и представление полигональной сеткой. Вгеп-представление при помощи uv -поверхностей применяется в САД-системах и позволяет максимально точно описать

границу тела. Полигональное представление в виде меша используется в 3D-редакторах типа Blender, возникает при 3D-реконструкции реального тела, широко применяется в интерактивной графике. Вгер-представление удобно для реализации метода граничных элементов тем, что позволяет выполнять интегрирование с учетом аналитического задания поверхности (см., например, [7]). Однако, если перевести Вгер-представление в полигональное относительно просто, то обратный процесс сложен. Поэтому необходимо уметь решать задачи рассеяния напрямую на телах с полигональной границей.

Пусть поверхность S тела D задана неструктурированной полигональной (треугольной) сеткой (мешем) с вершинами $V = \{x^{(l)}\}_{l=1}^N \subset \mathbb{R}^3$ и внешними нормальными в них $\{n^{(l)}\}_{l=1}^N \subset \mathbb{S}^2$. Лучшие результаты показывают равномерные меши без заметного числа вытянутых и тупых треугольников. Улучшить свойства меша помогает сглаживание, ремешинг и другие операции. Предлагаемый метод работает и для структурированных сеток, например, четырехугольных. Однако работать с таким представлением и получать его технически может быть сложнее.

Обычно нормаль в вершине получается усреднением нормалей примыкающих к вершине плоских граней, поэтому без ограничения общности можно считать нормаль гладкой, а вершины отвечающими точкам гладкости поверхности S . Поэтому полагаем коэффициенты $C(x) = C_{ii}(x) = 1/2$. Также в меше допускается иметь несколько небольших дыр. Все это не сказывается на точности в большинстве примеров.

В качестве локального базиса t, b, n берутся столбцы ортогональной матрицы

$$F = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n_1^2}{1+n_3} & -\frac{n_1 n_2}{1+n_3} & n_1 \\ -\frac{n_1 n_2}{1+n_3} & 1 - \frac{n_2^2}{1+n_3} & n_2 \\ -n_1 & -n_2 & n_3 \end{pmatrix},$$

где для $n_3 = -1$ полагается $F = \text{diag}(1, -1, -1)$, чтобы удовлетворить условию $\det F = 1$.

Меш предполагается достаточно подробным, что позволяет аппроксимировать гладкие функции на поверхности кусочно-линейными функциями с точками интерполяции в вершинах меша [13]. В этом случае для приближенного вычисления поверхностных интегралов можно использовать масс-формулу

$$\int_S f(x) dx = \sum_{l=1}^N w^{(l)} f(x^{(l)}), \quad (16)$$

точную для кусочно-линейных функций. В ней $w^{(l)}$ — площади ячеек Вороного с центрами в вершинах $x^{(l)}$, на которые разбивается меш [14]. До описываемого далее укрупнения эти ячейки выступают в качестве граничных элементов. Их размер характеризуется средней длиной ребра h треугольных граней. В FEM-пакетах рекомендуется использовать элементы, для которых

$$\frac{h}{\lambda} \leq \frac{1}{6} = 0.166 \dots,$$

где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны.

Масс-формула (16) позволяет для дискретизации задачи воспользоваться методом коллокаций. Отметим, что на практике часто берется метод Галеркина, более устойчивый к ошибкам. Однако он требует больше ресурсов. Недостатком метода коллокаций является заполненность итоговой системы линейных уравнений, что не позволяет напрямую решать задачи для мешей из сотен тысяч вершин. Далее приводится один из вариантов оптимизации, основанный на укрупнении ячеек и позволяющий преодолеть указанный недостаток.

Дискретизация задачи

Модель задачи рассеяния дается предложением 7. Применим к интегральным уравнениям квадратурную формулу (16). Пусть $l, l' = 1, \dots, N$. Сопоставим (x, t, b, n) с $(x^{(l)}, t^{(l)}, b^{(l)}, n^{(l)})$ и

(x', t', b', n') с $(x^{(l')}, t^{(l')}, b^{(l')}, n^{(l')})$. Положим $f^{(l)} = f(x^{(l)})$, $f^{(l',l)} = f(x^{(l')}, x^{(l)})$.

Тогда предложение 7 (а) запишется следующим образом:

$$A_i^{(l)} = \sum_{l'=1}^N w^{(l')} \left\{ (P_{ij}^{(l',l)} t_j^{(l')}) u_t^{(l')} + (P_{ij}^{(l',l)} b_j^{(l')}) u_b^{(l')} + (P_{ij}^{(l',l)} n_j^{(l')}) u_n^{(l')} \right. \\ \left. - [(P_{0ij}^{(l',l)} t_j^{(l')}) u_t^{(l)} + (P_{0ij}^{(l',l)} b_j^{(l')}) u_b^{(l)} + (P_{0ij}^{(l',l)} n_j^{(l')}) u_n^{(l)}] + (U_{ij}^{(l',l)} n_j^{(l')}) \rho_0 \omega^2 \Psi_0^{(l')} \right\} = 0, \quad (17)$$

$$A_4^{(l)} = 2C^{(l)} \Psi_0^{(l)} + \alpha C^{(l)} u_n^{(l)} - I_{1,k_0} \Psi_0^{(l)} - \alpha I_{2,k_0} \Psi_0^{(l)} + \sum_{l'=1}^N w^{(l')} T_{x^{(l)}}(G_{k_0}^{(l',l)}) u_n^{(l')} = T_{x^{(l)}}(\Psi_1^{(l)}), \quad (18)$$

где

$$T_{x^{(l)}}(G_{k_0}^{(l',l)}) = G_{k_0}^{(l',l)} + \alpha \partial_{n^{(l)}} G_{k_0}^{(l',l)}, \quad T_{x^{(l)}}(\Psi_1^{(l)}) = \Psi_1^{(l)} + \alpha \partial_{n^{(l)}} \Psi_1^{(l)}, \\ I_{1,k_0} \Psi_0^{(l)} = \sum_{l'=1}^N w^{(l')} \{ \partial_{n^{(l')}} G_{k_0}^{(l',l)} \Psi_0^{(l')} - \partial_{n^{(l')}} G_0^{(l',l)} \Psi_0^{(l)} \}, \\ I_{2,k_0} \Psi_0^{(l)} = \sum_{l'=1}^N w^{(l')} \{ \partial_{n^{(l)} n^{(l')}}^2 G_k^{(l',l)} \Psi_0^{(l')} - \partial_{n^{(l)} n^{(l')}}^2 G_0^{(l',l)} L_{\Psi_0}^{(l',l)} + \partial_{n^{(l)}} G_0^{(l',l)} \nabla_S \Psi_0^{(l)} n^{(l')} \}, \\ L_{\Psi_0}^{(l',l)} = \Psi_0^{(l)} + \nabla_S \Psi_0^{(l)} (x^{(l')} - x^{(l)})_{n^{(l)}}.$$

Поверхностный градиент $\nabla_S \Psi^{(l)}$ оценивается из приближенных линейных равенств

$$(x^{(l'')} - x^{(l)})_{n^{(l)}} \nabla_S \Psi^{(l)} = \Psi^{(l'')} - \Psi^{(l)}, \quad l'' \in R^{(l)},$$

где $R^{(l)}$ — множество индексов соседних с $x^{(l)}$ вершин. Эти равенства образуют переопределенную систему с матрицей $U^{(l)} = ((x^{(l'')} - x^{(l)})_{n^{(l)}})_{l'' \in R^{(l)}}$. Отсюда

$$\nabla_S \Psi^{(l)} = \sum_{l'' \in R^{(l)}} (U^{(l)})_{l''}^+ (\Psi^{(l'')} - \Psi^{(l)}),$$

где плюсом обозначено взятие псевдообратной матрицы и $(U^{(l)})_{l''}^+$ — вектор-строка с номером l'' матрицы $(U^{(l)})^+$.

В формулах (17), (18) нужно учесть, что функции Грина не определены при $l' = l$. Производные G_k и функцию P_{ij} в силу примененной регуляризации доопределяем нулем. В случае G_k и U_{ij} , чтобы не потерять точность, применяем (5) и (12), где в качестве окрестности берем ячейку Вороного вершины $x^{(l)}$. Тогда с учетом ее площади полагаем

$$G_{k_0}^{(l,l)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi w^{(l)}}}, \quad U_{ij}^{(l,l)} = \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{\sqrt{4\pi w^{(l)}}}.$$

Уравнения (17), (18) сводятся к линейной системе уравнений размера $4N \times 4N$ для неизвестных $u_t^{(l)}$, $u_b^{(l)}$, $u_n^{(l)}$, $\Psi_0^{(l)}$

$$A_i^{(l)}(u_t^{(l)}, u_b^{(l)}, u_n^{(l)}, \Psi_0^{(l)}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad A_4^{(l)}(u_t^{(l)}, u_b^{(l)}, u_n^{(l)}, \Psi_0^{(l)}) = T_{x^{(l)}}(\Psi_1^{(l)}) \quad (19)$$

Нетрудно заметить, что матрица этой системы заполненная.

Предложение 7 (b) запишется следующим образом:

$$\Psi_s(x) = \sum_{l=1}^N w^{(l)} \{ \partial_{n^{(l)}} G_{k_0}(x^{(l)}, x) \Psi_0^{(l)} - G_{k_0}(x^{(l)}, x) u_n^{(l)} \}, \quad x \in D^c. \quad (20)$$

Таким образом, с учетом заполненности матрицы приходим к следующему утверждению, которое лежит в основе предлагаемого ВЕМ-метода коллокаций.

Предложение 1. (а) *Расчетная модель задачи рассеяния методом коллокаций дается формулами (19), (20).*

(б) *Теоретическая сложность складывается из $O(N^2)$ операций для расчета матрицы, $O(N^3)$ для решения системы с заполненной матрицей и $O(N)$ для вычисления одного значения потенциала Ψ_s .*

Обоснование сходимости метода коллокаций можно провести по аналогии с [17]. Ключевую роль здесь играют единственность и гладкость решения, а также оценки интегралов со слабо сингулярным ядром. Данные оценки схожи с оценками, которые используются для доказательства компактности интегральных операторов простого и двойного слоя [18].

Оптимизация метода коллокаций

ВЕМ-метод коллокаций на основе предложения 1 показывает хорошие результаты для сравнительно небольших сеток (до десятков тысяч вершин). Метод был протестирован в сравнении с комбинированным подходом, основанным на методе конечных элементов [9]. При одинаковых размере элемента h и точности ВЕМ-метод требует примерно в десять раз меньше вычислительных ресурсов, поскольку использует двумерные граничные элементы, тогда как в FEM применяются трехмерные. Однако возникает проблема с плотной заполненностью матрицы A , что делает расчеты для сеток размером в сотни тысяч вершин затруднительными.

Естественным решением является симплификация сетки, позволяющая получить версию с меньшим числом вершин. Однако при значительном упрощении в областях с высокой кривизной ухудшается аппроксимация поверхности, что может снижать точность численного интегрирования. Поэтому рассмотрим следующий смешанный подход.

Субсэмплингом берется подмножество вершин $V' \subset V$ размера N' , которое позволяет провести расчеты (скажем, $N = 100000$, $N' = 10000$). Это можно сделать методом диска Пуассона, который за $O(N)$ операций порождает равномерное распределение вершин [15], или методом квадрик, который за $O(N \log N)$ операций порождает адаптивное распределение сэмпированных вершин (реже, где меньше кривизна) [16]. Если мелкие детали важны, то нужно выбирать метод квадрик.

Пусть далее $I(U)$ обозначает множество индексов вершин $U \subset V$. Множество исходных вершин разбивается на крупные области Вороного с центрами в вершинах V'

$$V = \bigcup_{s \in I(V')} V^{(s)}.$$

Здесь областью Вороного $V^{(s)}$ называется множество вершин из V , ближайших к центру $x^{(s)}$ по реберному расстоянию, аппроксимирующему геодезическое расстояние. Это делается за $O(N'N)$ операций, например, при помощи функции `voronoi_cells` из пакета `Networkx`, основанной на алгоритме Дейкстры.

Теперь для сокращения размерности системы уравнений (19) положим искомые функции u_t , u_b , u_n , Ψ_0 постоянными на областях $V^{(s)}$, например, $\Psi_0^{(l)} = \Psi_0^{(s)}$ для всех $l \in I(V^{(s)})$. Другими словами, искомые функции аппроксимируются кусочно-постоянными функциями с носителями на областях Вороного, которые теперь можно считать укрупненными конечными элементами. Так как рассматриваются интегральные уравнения и размер областей $V^{(s)}$ остается малым, данная аппроксимация оставляет метод в пределах заданной погрешности.

С другой стороны, сохраним значения функций Грина в формулах суммирования. Например, для первой суммы в (20) будем иметь

$$\sum_{l=1}^N w^{(l)} \partial_{n^{(l)}} G_{k_0}(x^{(l)}, x) \Psi_0^{(l)} = \sum_{s \in I(V')} \Psi_0^{(s)} \sum_{l \in I(V^{(s)})} w^{(l)} \partial_{n^{(l)}} G_{k_0}(x^{(l)}, x)$$

и аналогично для всех подобных сумм. Тогда численное интегрирование от функций Грина по-прежнему ведется по исходной поверхности, что важно для областей с большой кривизной. В итоге точность оптимизированного будет метода выше, чем просто при упрощении меша. При таком подходе области $V^{(s)}$ становятся граничными элементами.

Просуммируем коэффициенты при одинаковых $\Psi^{(l')}$ в уравнениях системы (19). Тогда останутся только переменные с индексами $l' \in I(V')$. Соответственно достаточно оставить уравнения, отвечающие индексам $l \in I(V')$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. (а) В оптимизированном ВЕМ-методе коллокаций неизвестные $u_t^{(s)}$, $u_b^{(s)}$, $u_n^{(s)}$, $\Psi_0^{(s)}$ для $s \in I(V')$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений с матрицей размера $4N' \times 4N'$.

(б) Метод требует $O(N'N)$ операций для расчета матрицы, $O(N'^3)$ для решения системы и $O(N)$ для вычисления одного значения потенциала Ψ_s .

Таким образом, в оптимизированном случае для N' , существенно меньших N , получаем большой выигрыш как по памяти: $O(N'^2)$ против $O(N^2)$ для матрицы, так и по скорости: $O(N'^3 + N'N)$ против $O(N^3 + N^2)$ при составлении и решении системы.

4. Вычислительные результаты

Примеры входной геометрии приведены на рис. 1 (также показаны нормали).

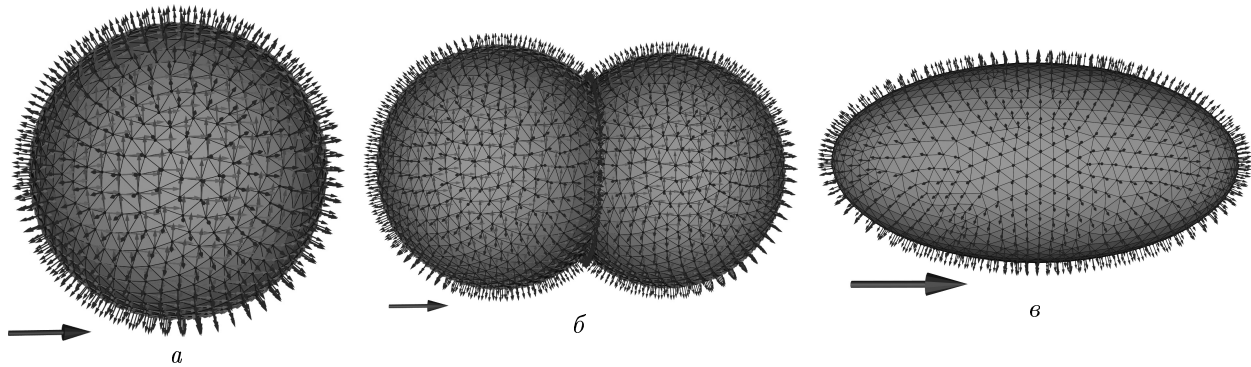


Рис. 1: Примеры входной геометрии: сфера (а), объединение двух сфер (б), сфероид (в)

Случай эластостатики ($\omega = 0$) в отсутствии акустического поля был проверен на примерах из книги [19, гл. 9]. Результаты одинаковые.

Далее тестировался основной случай эластодинамики. В качестве окружающей среды бралась вода — $\rho_0 = 1000$, $c_0 = 1485$ (единицы измерения не приводятся). Рассматривались материалы: алюминий — $\rho = 2700$, $\lambda = 5.3e10$, $\mu = 2.6e10$, медь — $\rho = 8960$, $\lambda = 7.6e10$, $\mu = 4.4e10$.

Везде представлен только модуль акустического потенциала Ψ_s . На рисунках сплошная линия отвечает численному решению по ВЕМ-методу коллокаций из разд. 3, штриховая линия — аналитическому решению для шара B_a с объемом, равным объему тела, штрихпунктирная линия — ФЕМ-методу. Для меры различия использовалась относительная погрешность в процентах.

На рис. 2 представлено сравнение аналитического и численного решений в дальней зоне для шара (см. рис. 1 а) в случае алюминия (а, б) и меди (в, г). Параметр h/λ около 0.1. Взято $ka = 2\pi$, чтобы продемонстрировать проблему неединственности акустического уравнения (1) в стандартной формулировке ($\alpha = 0$). На а, в использовалось уравнение (1) с $\alpha = i/k_0$

(различие около 1 %), а на b , g — с $\alpha = 0$, где видно большое расхождение (различие около 10 %). Это происходит из-за того, что шар близок к жесткому, а выбранный параметр отвечает собственному значению внутренней проблемы Дирихле. Таким образом, применение комбинированного уравнения Бертона–Миллера в данном подходе является необходимым.

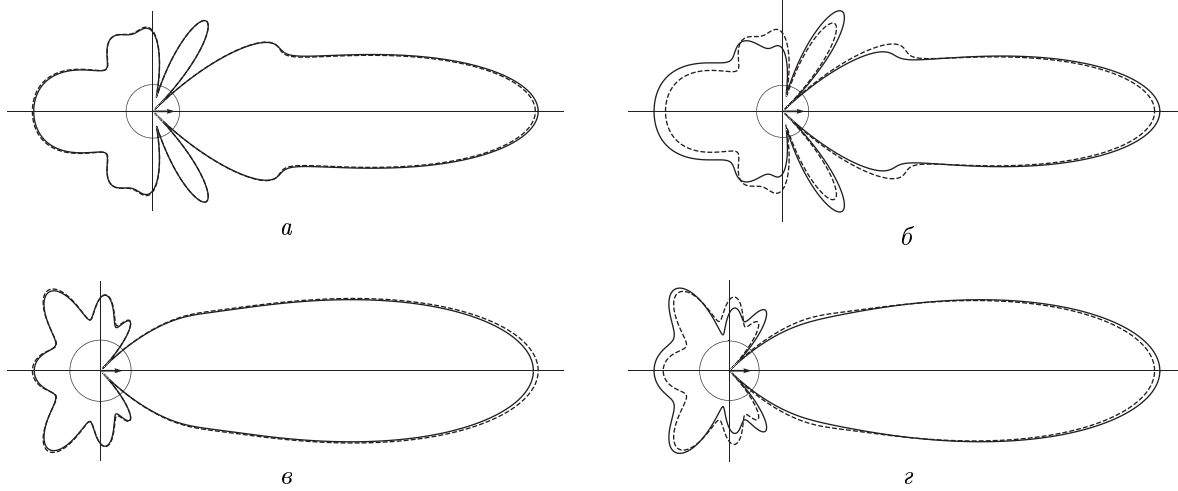


Рис. 2: Случай сферы (рис. 1 а)

В табл. 1 дано массивное сравнение аналитического и численного решений для шара (вода–алюминий) в дальней ($R = 100.0a$) и ближней ($R = 1.5a$) зонах для разных размеров сетки, N — число вершин, δ — различие, t — время счета.

Таблица 1: Сравнение аналитического и численного решений для шара

$R = 100a$															
N	$ka = 1.0$			$ka = 3.0$			$ka = 5.0$			$ka = 7.0$			$ka = 9.0$		
	h/λ	$\delta, \%$	t, c	h/λ	$\delta, \%$	t, c	h/λ	$\delta, \%$	t, c	h/λ	$\delta, \%$	t, c	h/λ	$\delta, \%$	t, c
200	0.04	2.51	0.4	0.13	2.23	0.2	0.22	3.70	0.2	0.31	13.65	0.2	0.40	21.01	0.2
500	0.03	1.29	0.6	0.08	1.22	0.6	0.14	1.14	0.6	0.20	5.42	0.6	0.25	7.45	0.6
1000	0.02	0.80	2.0	0.06	0.83	2.0	0.10	0.80	2.0	0.14	3.05	2.0	0.18	3.90	2.0
2000	0.01	0.52	10.9	0.04	0.58	10.9	0.07	0.63	10.9	0.10	1.80	11.0	0.13	2.12	11.1
3000	0.01	0.41	31.7	0.03	0.47	31.7	0.06	0.55	31.3	0.08	1.38	30.8	0.10	1.57	31.7
$R = 1.5a$															
200	0.04	3.28	0.3	0.13	1.95	0.1	0.22	3.67	0.1	0.31	11.62	0.1	0.40	17.35	0.1
500	0.03	1.73	0.5	0.08	1.29	0.5	0.14	1.46	0.7	0.20	4.66	0.5	0.25	6.08	0.5
1000	0.02	1.09	2.2	0.06	0.94	2.2	0.10	1.08	2.1	0.14	2.57	2.1	0.18	3.34	1.9
2000	0.01	0.72	10.5	0.04	0.67	12.6	0.07	0.86	11.9	0.10	1.64	10.9	0.13	2.03	11.0
3000	0.01	0.57	32.0	0.03	0.55	31.6	0.06	0.77	32.7	0.08	1.28	32.9	0.10	1.52	30.2

На рис. 3 представлено сравнение численных решений, полученных ВЕМ-методом и комбинированным FEM-методом [9]. Взята модель из объединения двух сфер одинакового радиуса с расстоянием между центрами в 1.4 радиуса (см. рис. 1 б), вода–алюминий, на a направление вдоль оси, на $б$ — под углом 30° . Различие между решениями около 1.5 %. На рис. 3 в показано разбиение расчетной области на конечные 3D-элементы в FEM-методе. В этой области задача эластодинамики решается средствами FEM (применялся COMSOL). Затем значение на окружающей сфере $\partial\Omega$ применяется для расчета сферических коэффициентов Ψ_s . FEM-метод заметно затратнее как по памяти, так и по времени. Например, для примера время счета им составило около 7000 с (CPU 8 ядер, 2.4 ГГц, RAM 256 Гб). Расчет ВЕМ-методом занял около 30 с (CPU 6 ядер, 2 ГГц, RAM 16 Гб).

На рис. 4 такое же сравнение проведено для сфероида (см. рис. 1 в), вода–алюминий,

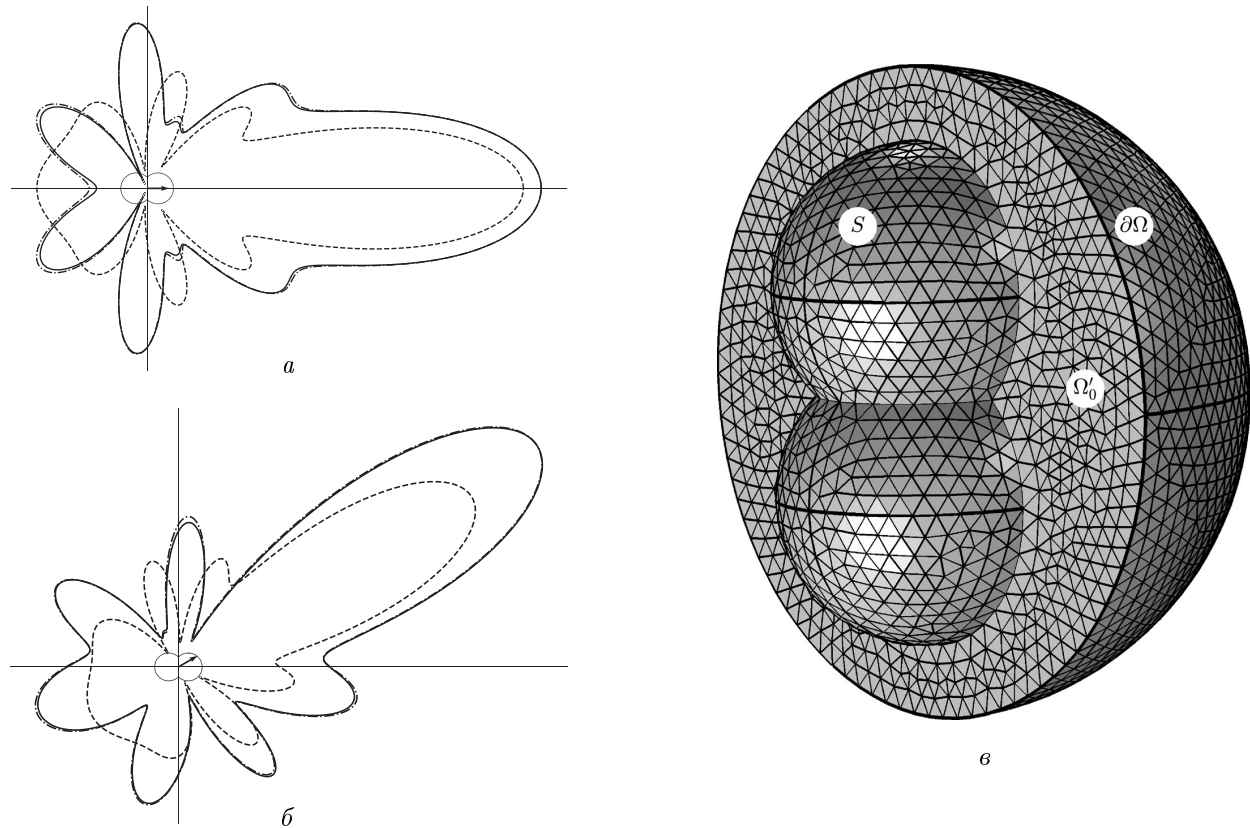


Рис. 3: Случай объединения двух сфер (рис. 1 б)

различие около 1.5 %. На рис. 4 в изображено распределение на границе модуля потенциала Ψ_0 в случае ВЕМ-метода.

Заключение

В данной работе рассмотрена задача рассеяния плоской звуковой волны на изотропном, линейно-упругом теле, представленном неструктурированной полигональной сеткой. Разработан численный метод для расчета потенциала рассеянной волны, основанный на методе граничных элементов (ВЕМ) и коллокации. В отличие от метода конечных элементов (FEM), предложенный подход требует дискретизации только поверхности объекта, что снижает вычислительные затраты.

Основные сложности реализации включают неединственность граничного уравнения, особенности обработки сингулярных интегралов и заполненность матрицы системы. Для их преодоления применены комбинированное уравнение Бертона–Миллера, регуляризация с использованием тождеств для функции Грина и разбиение полигональной сетки на области Вороного. Это позволило повысить устойчивость и эффективность метода, особенно при работе с большими 3D-моделями.

Проведена валидация метода на примере шара, для которого известно аналитическое решение, а также выполнено сравнение с численными результатами, полученными в COMSOL для тел сложной формы. Результаты подтверждают высокую точность и эффективность предложенного алгоритма.

Разработанный метод может применяться для анализа акустических свойств сложных объектов в инженерных и научных задачах, включая диагностику материалов, моделирование

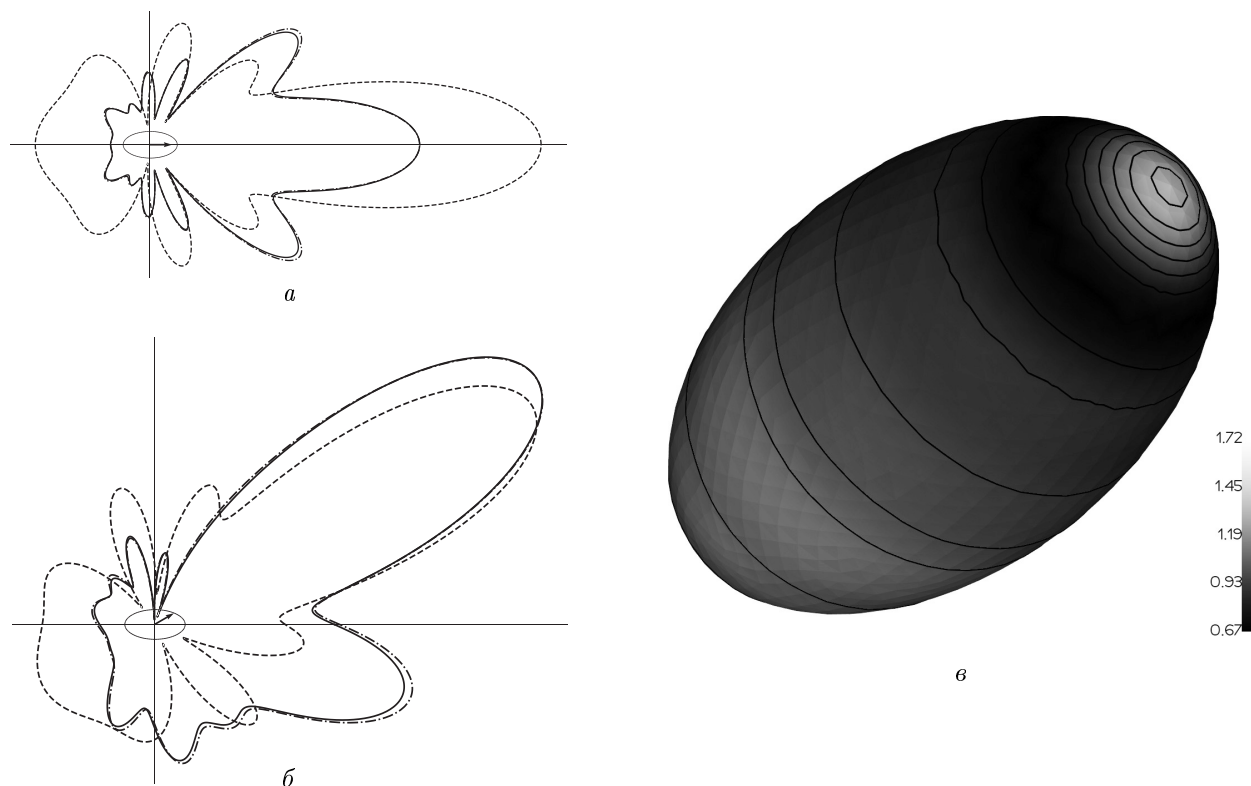


Рис. 4: Случай сфероид (рис. 1 в)

рассеяния звука и акустический дизайн. Дальнейшие исследования могут быть направлены на расширение метода для неоднородных и анизотропных сред.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Goodman R.R., Stern R. Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells // J. Acoust. Soc. Am. 1962. Vol. 34, № 3. P. 338–344.
2. Cruse T.A., Rizzo F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. I // J. Math. Anal. Appl. 1968. Vol. 22, № 1. P. 244–259.
3. Burton A.J., Miller G.F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems // Proc. R. Soc. Lond. A. Math. Phys. Sci. 1971. Vol. 323, № 1553. P. 201–210.
4. Domínguez J., Abascal R. On fundamental solutions for the boundary integral equations method in static and dynamic elasticity // Eng. Anal. 1984. Vol. 1, № 3. P. 128–134.
5. Бреббия К. Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов / Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
6. Silva Rêgo J.J., Power H., Wrobel L.C. A boundary element method for 3D time-harmonic elastodynamics — Numerical aspects // Transactions on Modelling and Simulation. Vol. 2. WIT Press, 1993. P. 423–439.
7. Simpson R.N., Scott M.A., Taus M., Thomas D.C., Lian H. Acoustic isogeometric boundary element analysis // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2014. Vol. 269. P. 265–290.

8. Dineva P.S., Manolis G.D., Wuttke F. Fundamental solutions in 3D elastodynamics for the BEM: A review // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2019. Vol. 105. P. 47–69.
9. Скобелцын С.А. Некоторые обратные задачи дифракции звуковых волн на неоднородных анизотропных упругих телах // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Тула, ТулГУ, 2020.
10. Amini S. On the choice of the coupling parameter in boundary integral formulations of the exterior acoustic problem // *Appl. Anal.* 1990. Vol. 35. P. 75–92.
11. Lin T.C. A proof for the Burton and Miller integral equation approach for the Helmholtz equation // *J. Math. Anal. Appl.* 1984. Vol. 103, № 2. P. 565–574.
12. Liu Y.J., Rudolph T.J. Some identities for fundamental-solutions and their applications to weakly-singular boundary element formulations // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 1991. Vol. 8, № 6. P. 301–311.
13. Jacobson A. Algorithms and interfaces for real-time deformation of 2D and 3D shapes. Diss. ETH, 2013.
14. Meyer M., Desbrun M., Schröder P., Barr A.H. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds // In: H.-C. Hege, K. Polthier (eds) *Visualization and Mathematics III. Mathematics and Visualization*. Berlin–Heidelberg: Springer, 2003.
15. Bridson R. Fast Poisson disk sampling in arbitrary dimensions // *SIGGRAPH sketches*. 2007. Vol. 10, № 1. P. 1.
16. Garland M., Heckbert P.S. Surface simplification using quadric error metrics // *Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (SIGGRAPH '97)*. 1997. P. 209–216.
17. Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца // *ЖВМ и МФ*. 2016. Том. 56. № 7. С. 1340–1348.
18. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
19. Chen G., Zhou J. *Boundary element methods with applications to nonlinear problems* / 2nd ed. Springer: Dordrecht, 2010.

REFERENCES

1. Goodman, R.R. & Stern, R. 1962. “Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells”, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 34, no. 3, pp. 338–344.
2. Cruse, T.A. & Rizzo, F.J. 1968. “A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. I”, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 22, no. 1, pp. 244–259.
3. Burton, A.J. & Miller, G.F. 1971. “The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems”, *Proc. R. Soc. Lond. A. Math. Phys. Sci.*, vol. 323, no. 1553, pp. 201–210.
4. Domínguez, J. & Abascal R. 1984. “On fundamental solutions for the boundary integral equations method in static and dynamic elasticity”, *Eng. Anal.*, vol. 1, no. 3, pp. 128–134.

5. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. & Wrobel, L.C. 1984. "Boundary element techniques, theory and applications in engineering", Springer, Berlin.
6. Silva Rêgo, J.J., Power, H. & Wrobel, L.C. 1993. "A boundary element method for 3D time-harmonic elastodynamics — Numerical aspects", *Transactions on Modelling and Simulation*, vol. 2, WIT Press, pp. 423–439.
7. Simpson, R.N., Scott, M.A., Taus M., Thomas D.C. & Lian H. 2014. "Acoustic isogeometric boundary element analysis", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 269, pp. 265–290.
8. Dineva, P.S., Manolis, G.D. & Wuttke, F. 2019. "Fundamental solutions in 3D elastodynamics for the BEM: A review", *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 105, pp. 47–69.
9. Skobeltsyn, S.A. 2020. "Some inverse problems of diffraction of sound waves on inhomogeneous anisotropic elastic bodies", Diss. ... doc. physics and mathematics Sci., Tula State University, Tula. (In Russ.).
10. Amini, S. 1990. "On the choice of the coupling parameter in boundary integral formulations of the exterior acoustic problem", *Appl. Anal.*, vol. 35, pp. 75–92.
11. Lin, T.C. 1984. "A proof for the Burton and Miller integral equation approach for the Helmholtz equation", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 103, no. 2, pp. 565–574.
12. Liu, Y.J. & Rudolphi, T.J. 1991. "Some identities for fundamental-solutions and their applications to weakly-singular boundary element formulations", *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 8, no. 6, pp. 301–311.
13. Jacobson A. Algorithms and interfaces for real-time deformation of 2D and 3D shapes. Diss. ETH, 2013.
14. Meyer, M., Desbrun, M., Schröder, P. & Barr, A.H. 2003. "Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds", In: H.-C. Hege, K. Polthier (eds) *Visualization and Mathematics III. Mathematics and Visualization*, Springer, Berlin–Heidelberg.
15. Bridson, R. 2007. "Fast Poisson disk sampling in arbitrary dimensions", *SIGGRAPH sketches*, vol. 10, no. 1, pp. 1.
16. Garland, M. & Heckbert, P.S. 1997. "Surface simplification using quadric error metrics", *Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (SIGGRAPH '97)*, pp. 209–216.
17. Khalilov, E.H. 2016. "Justification of the collocation method for the integral equation for a mixed boundary value problem for the Helmholtz equation", *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 56, no. 7, pp. 1310–1318.
18. Colton, D. & Kress, R. 2013. "Integral equation methods in scattering theory", SIAM, Philadelphia.
19. Chen, G. & Zhou, J. 2010. "Boundary element methods with applications to nonlinear problems", 2nd ed., Springer, Dordrecht.

Получено: 04.03.2025

Принято в печать: 27.08.2025