ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 3.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-300-306

Арифметические свойства значений расходящихся в поле $\mathbb{C}$ рядов. Гипотезы

В. Г. Чирский

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

Статья продолжает описание направлений исследования арифметических свойств значений рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! z^n$$

с коэффициентами a_n, удовлетворяющими определённым условиям. При этих условиях рассматриваемый ряд, отличный от многочлена, сходится в поле $\mathbb{C}$ только при $z = 0$. Однако для почти всех, кроме конечного числа, простых чисел p такой ряд сходится в полях $\mathbb{Q}_p$. Поэтому есть два естественных пути исследования. Мы можем рассматривать либо значения результата некоторого суммирования этого ряда, либо его значения в поле $\mathbb{Q}_p$. В статье формулируются гипотезы, относящиеся к значениям рассматриваемых рядов как в одном, так и в другом случае.

Ключевые слова: трансцендентность, суммирование рядов, полиадическое число.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
Чирский, В. Г. Арифметические свойства значений расходящихся в поле $\mathbb{C}$ рядов. Гипотезы // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 3, с. 300–306.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 3.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-300-306

Arithmetic properties of values of divergent in $\mathbb{C}$ series. Conjectures

V. G. Chirskii

Chirskii Vladimir Grigorevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

The article describes the directions of research on the arithmetic properties of series values of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! z^n$$

with coefficients a_n satisfying certain conditions. Under these conditions, the considered series, other than the polynomial, converges in the field $\mathbb{C}$ only at $z = 0$. However, for almost all but a finite number of primes, such a series converges in the fields $\mathbb{Q}_p$. Therefore there are two ways of research. We can either consider the arithmetic properties of the result of some summation of this series, or consider the values of this series in the field $\mathbb{Q}_p$. The paper formulates conjectures, related to the values of the considered series.

Keywords: transcendence,summatuon of a series, polyadic number.

Bibliography: 14 titles.

For citation:
Chirskii, V. G. 2025, “Arithmetic properties of values of divergent in $\mathbb{C}$ series . Conjectures” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 300–306.

1. Введение

Работа дополняет исследования, начатые в статье [1]. Точнее говоря, рассматриваются задачи, к решению которых, в основном, привлекаются различные обобщения метода Зигеля-Шидловского в теории трансцедентных чисел. Сам метод подробно освещен в [2]. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!\, z^n, \tag{1}$$

коэффициенты которого – алгебраические числа из некоторого числового поля $\mathbb{K}$ конечной степени над полем $\mathbb{Q}$. При этом максимумы модулей сопряжённых с a_n чисел не превосходят C_1^n. Кроме того, существует последовательность натуральных чисел q_n таких, что все числа $q_n a_k, k = 0, 1, ..., n$ принадлежат кольцу $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ целых чисел поля $\mathbb{K}$ и выполняется оценка $|q_n| \le C_2^n$. Такие ряды, если они отличны от многочленов, расходятся в поле $\mathbb{C}$.

2. Арифметические свойства просуммированных рядов

Можно рассматривать функции, полученные в результате суммирования Бореля-Лапласа (см. [3])или Рамиса [4] таких рядов. Имеется в виду следующее: для любого числа $\theta \in$ R, кроме конечного числа значений $mod 2\pi$ (так называемых антистоксовских направлений для f) можно выполнить 1-суммирование по Рамису ряда $f(\frac{1}{z})$ в направлении θ. Результат этого суммирования $f_\theta(\frac{1}{z})$ представляет собой функцию, голоморфную на открытом подмножестве $\mathbb{C}$, состоящем из всех $z \ne 0$ с условиями

$$\theta - \frac{\pi}{2} - \varepsilon < argz < \theta + \frac{\pi}{2} + \varepsilon$$

при некотором $\varepsilon > 0$, для которой $f(\frac{1}{z})$ является асимптотическим разложением. Например, ряд связанный с именем Эйлера

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \tag{2}$$

представляет собой асимптотическое разложение (см. [1]) для интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{w}{z}}}{1+w}.$$

Результат суммирования ряда (2) при $z = 1$ является известной постоянной Гомпертца. Точнее говоря, справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! = e(\gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n \cdot n!}),$$

где $\gamma-$ постоянная Эйлера, а левая часть обозначает результат упомянутого выше суммирования.

В этом направлении проводятся интересные исследования Ривоаля, Фишлера и Фергюсона, [5],-[9], связанные с подходом И. Андре [10] и Бертрана и Бейкерса [11] к исследованию арифметических свойств значений $E-$ функций. В статье [9] сформулирована гипотеза 2. Она состоит в справедливости следующего предложения.

Гипотеза(Conjecture 2,[9]) . *Пусть* $f(z)$- *Э-функция и направление* $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *таково, что* $f_\theta(1) = 0$. *Тогда* $\frac{f(z)}{z-1}$ *является Э-функцией*

Доказательство этой гипотезы приведёт к получению большого количества важных результатов. В частности, будет доказана трансцендентность постоянной Гомпертца.

В работе [9] рассмотрены также смешанные функции, т.е. формальные степенные ряды вида $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, для которых ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ является $E-$ функцией, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$ является Э-функцией. Сформулирована соответствующая гипотеза (conjecture 3) и её следствия.

3. Арифметические свойства элементов прямых произведений полей $p-$ адических чисел

С другой стороны, упомянутые ряды (1) сходятся в полях p–адических чисел или алгебраических расширениях этих полей, что позволяет рассматривать бесконечномерные векторы, координаты которых представляют собой суммы рассматриваемых рядов в упомянутых полях. С этими рядами тесно связано понятие полиадического числа. Напомним, что каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \le a_n \le n.$$

Этот ряд сходится в любом поле $p-$ адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Разумеется, ряд, члены которого - целые числа, сходящийся во всех полях $p-$ адических чисел, представляет собой целое полиадическое число.

Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых $p-$ адических чисел по всем простым числам p. Элементы λ этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых в соответствующем кольце целых $p-$ адических чисел обозначаем $\lambda^{(p)}$. Разумеется, вполне аналогичным способом можно рассматривать прямые произведения алгебраических расширений $\mathbb{K}_v$ полей $\mathbb{Q}_p$.

Для удобства, напомним понятия бесконечной и глобальной линейной или алгебраической независимости. Рассмотрим ряд $f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \alpha^n$, где $\alpha, c_n \in \mathbb{K}-$ алгебраическому числовому полю конечной степени $\varkappa$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Пусть он сходится в бесконечном множестве полей $\mathbb{K}_v$, где нормирование v поля $\mathbb{K}$ продолжает $p-$адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$. Это позволяет рассматривать ряд $f(\alpha)$, как элемент прямого произведения этих полей $\mathbb{K}_v$. Это прямое произведение имеет естественную структуру кольца, операциям в котором соответствуют операции по каждой координате. Для элемента $\mathfrak{a}$ этого прямого произведения обозначаем $\mathfrak{a}^{(v)}$ его координату в поле $\mathbb{K}_v$.

Если существует $P(x)$ – многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля такой, что $P(\mathfrak{a}) = 0$ (иными словами, $P\left(\mathfrak{a}^{(v)}\right) = 0$ в каждом поле $\mathbb{K}_v$ этого прямого произведения), то говорим, что $\mathfrak{a}$ – *алгебраический элемент.*

Если элемент $\mathfrak{a}$ не является алгебраическим, то его называют *трансцендентным.* Трансцендентность элемента означает, что для любого $P(x)$– многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует простое число p и нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p-адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ такие, что $P\left(\mathfrak{a}^{(v)}\right) \neq 0$ в поле $\mathbb{K}_v$.

Назовем элемент $\mathfrak{a}$ *бесконечно трансцендентным*, если для любого $P(x)$ – многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует бесконечное множество простых чисел p, для каждого из которых есть нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p – адическое нормирование такое, что $P\left(\mathfrak{a}^{(v)}\right) \neq 0$ в поле $\mathbb{K}_v$.

Элемент $\mathfrak{a}$ называется *глобально трансцендентным*, если для любого $P(x)$ – многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, неравенство $P\left(\mathfrak{a}^{(v)}\right) \neq 0$ выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$ рассматриваемого прямого произведения.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности элемента не следует трансцендентность $\mathfrak{a}^{(v)}$ хотя бы для одного простого числа p и нормирования v поля $\mathbb{K}$, продолжающего p-адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$. Например, элемент $(1, 2, \ldots, n, \ldots)$ прямого произведения полей $\mathbb{Q}_p$ (координата которого равна n в поле $\mathbb{Q}_{p_n}$, соответствующем n-ному простому числу p_n) бесконечно трансцендентен. Действительно, любой $P(x)$ – многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля, может обратиться в ноль лишь на конечном множестве натуральных чисел.

Для совокупности элементов $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ аналогичным образом определяются понятия их алгебраической зависимости, алгебраической независимости, бесконечной алгебраической независимости и глобальной алгебраической независимости. Достаточно вместо многочлена $P(x)$ рассмотреть $P(x_1, \ldots, x_m)$ – многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля.

В работах [12],[13] установлены теоремы для F-рядов, подобные теоремам А.Б. Шидловского для E–функций (ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$).

Сформулируем определение F-ряда. Ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n! \cdot z^n.$$

принадлежит классу $F(\mathbb{K}, C_1, C_2, C_3, q)$, если

1. Все коэффициенты c_n принадлежат некоторому алгебраическому числовому полю $\mathbb{K}$ конечной степени $\varkappa$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

2. Максимумы абсолютных величин алгебраически сопряженных с числом c_n чисел представляют собой $O\left(C_1^n\right), n \to \infty$ с некоторой постоянной $C_1 > 1$.

3. Существует последовательность натуральных чисел d_n такая, что при$k = 0, 1, \ldots, n$ числа $d_n c_k$ принадлежат кольцу целых чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ поля $\mathbb{K}$ и $d_n = q^n d_{0,n},\ q \in \mathbb{N}$, а числа $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p, не превосходящие $C_2 n$, и для всех таких простых p выполняется неравенство $\vartheta_p(d_{0,n}) \leqslant C_3 \left(\log_p n\ + \frac{n}{p^2}\right)$. (Символ $\vartheta_p(a)$ обозначает степень, в которой простое число p входит в разложение на множители целого числа a.)

Это определение показывает, что F-ряды относятся к так называемым арифметическим рядам Жевре.

Теорема(Теорема 3,[12]) . *Пусть F-ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$ и составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений вида*

$$y'_k = Q_{k,0} + \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i, k = 1, \ldots, m, Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z) \ .$$

Пусть γ-алгебраическое число, отличное от нуля и особых точек этой системы уравнений. Тогда ряды $f_1(\gamma), \ldots, f_m(\gamma)$ бесконечно алгебраически независимы.

Вместе с тем, для конкретного поля p–адических чисел не удаётся доказать хотя бы иррациональность значений таких рядов, оценки линейных форм зависят от высоты формы [14].

Гипотеза *При условиях теоремы ряды $f_1(\gamma), \ldots, f_m(\gamma)$ глобально алгебраически независимы.*

4. Построение псевдослучайных чисел

Заметим, что если числа a_n– целые, то вычисление частичных сумм ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$ можно произвести, используя только операцию сложения. Действительно, если $1 \le k < n$ то $(k+1)n! = kn! + n!$. Поэтому для вычисления любой конечной суммы вида $\sum_{n=0}^{N} a_n n!$ достаточно заранее вычислить $\frac{N(N+1)}{2}$ чисел вида $kn!, n = 1, ..., N, k = 1, ..., n$. Проведённые эксперименты показали, что, например, при условии периодичности последовательности целых чисел a_n, цифры числа $\sum_{n=0}^{N} a_n n!$ обладают хорошими статистическими свойствами. Строгого доказательства этому нет. Удаётся только доказать алгебраическую независимость функциональных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$ над полем рациональных функций от z и бесконечную алгебраическую независимость их значений в алгебраических точках, отличных от 0. Более того, даже если бы удалось доказать иррациональность ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$ в поле p– адических чисел, из этого не следовало бы, что конечные суммы ряда обладают хорошими статистическими свойствами. Поэтому сформулируем ещё одну гипотезу, базирующуюся на идее о том, что определенный порядок можно нарушить, комбинируя упорядоченные величины с величинами, подчиняющимися другому порядку.

Гипотеза *Частичные суммы рядов вида$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$ с периодическими коэффициентами обладают хорошими свойствами случайности.*

5. Заключение.

В статье дан краткий обзор современного состояния вопроса об арифметической природе значений расходящихся в поле $\mathbb{C}$ рядов и рассказано о двух основных подходах к исследованию проблемы. Сформулированы гипотезы, доказательство которых существенно продвинет наши знания в этой области.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений расходящихся в поле C рядов // Чебышевский сборник.-2024.-т. 25.- вып. 3.-с. 259 – 269.

2. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа.-М.: «Наука».-1987.-448 с.(Английский перевод:[3] Andrei B.Shidlovskii. Transcendental Numbers. W.de Gruyter.-Berlin.-New York.-1989.-467pp.).

3. Харди Г. Г. Расходящиеся ряды.-М.:«URSS».-2006.-506с.

4. Рамис Ж. П. Расходящиеся ряды и асимптотические теории.-М.-Иж.: «Институт компьютерных технологий».-2002.-80 с.

5. Ferguson T. Algebraic properties of Э-functions.//J.Number Theory. 2021.- v.229, pp.168-178.

6. Fischler S.;Rivoal T. Arithmetic theory of E-operators .//J.d l'Ecole polytechnique-Mathematiques.-2016.-т. 3.-с. 31 -65

7. Fischler S.;Rivoal T. Microsolutions of differential operators and values of arithmetic Gevrey series.//Michigan Math. J.-2018.-c.239-254

8. Rivoal T.On the arithmetic nature of the values of the Gamma function,Euler's constant and Gompertz's constant.//American J.of Math.-2012.-n/140.-№2.-c.317-348.

9. Fischler S.;Rivoal T. Relations between values of arithmetic Gevrey series, and applications to values of the Gamma function. arXiv:2301.13518v1[math.NT].

10. Andre Y.Arithmetic Gevrey series and transcendence. A survey.//J.Theor.Nombres Bordeaux.-2003.-т.15.-с.1-10.

11. Bertrand D.;Beukers F.Equations differentielles linearies et majorations de multiplicities.-1985.-Annales scientifiques ENS.-т.18.-№1.-с.181-192.

12. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers // Russ. J. Math. Phys. 2019.- v.26, no.3, pp.286-305.

13. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric $F-$ series // Russ. J. Math. Phys. 2020.- v.27, no.2, pp.175-184.

14. Ernvall-Hytonen A.-M.;Matala-aho T.;Seppala I. Euler's factorial series, Hardy integral, and continued fractions // J.Number Theory. 2023.-v.244.-pp.224-250.

REFERENCES

1. Chirskii V. G.2024." Arithmetic properties ov values of divergent in C series .", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 25, no.3, pp.259-269.

2. Shidlovskii, A. B.1989." Transcendental Numbers", *W.de Gruyter.-Berlin.-New York.*467pp.

3. Hardy G.H.1949." Divergent Series", *Clarendon Press.-London.*510pp.

4. Ramis, J. P.1993." Series divergentes et theories asymptotiques", *Panoramas et Syntheses, no.21, Soc. Math. France. -Paris.* 80pp.

5. Ferguson. T.2021."Arithmetic properties of Э-functions",*J.Number Theoty*, Vol, 229, pp.168-178.

6. Fischler. S.;Rivoal. T.2016.“Arithmetic theory of E-operators”,*J.d l’Ecole polytechnique-Mathematiques*, Vol, 3, pp.31-65.

7. Fischler.S.;Rivoal.T.2018.“Microsolutions of differential operators and values of arithmetic Gevrey series”,*Michigan Math. J.*, Vol, 61, pp.239-254.

8. Rivoal.T.2012.“On the arithmetic nature of the values of the Gamma function,Euler’s constant and Gompertz’s constant”,*American J.of Math*, Vol, 140,no.2. pp.317-348.

9. Fischler. S.;Rivoal. T.2023. “Relations between values of arithmetic Gevrey series, and applications to values of the Gamma function”,*(*arXiv:2301.13518v1[math.NT])

10. Andre.Y.2003.“Arithmetic Gevrey series and transcendence. A survey”,*J. Theor. Nombres Bordeaux*, Vol, 15, pp.1-10.

11. Bertrand.D.;Beukers.F.1985.“Equations differentielles linearies et majorations de multiplicities ”,*Annales scientifiques ENS*, Vol, 18,no.1. pp.181-192.

12. Chirskii V. G. 2019. “Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers”, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.26, no.3, pp.286-305.

13. Chirskii V. G.2020. “ Arithmetic properties of generalized hypergeometric F- series”, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.27, no.2, pp.175-184.

14. Ernvall-Hytonen A.-M.;Matala-aho T.;Seppala I. 2023. “ Euler’s factorial series, Hardy integral, and continued fractions”, *J. Number Theory*, Vol. 244, pp.224-250.

Получено: 17.04.2025
Принято в печать: 27.08.2025