

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 3.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-284-291

Об эволюции, заданной клеточным автоматом

И. А. Иванов-Погодаев, О. А. Рыжова

Иванов-Погодаев Илья Анатольевич — кандидат физико-математических наук, Московский физико-технический институт (г. Москва).

e-mail: ivanov-pogodaev@mail.ru

Рыжова Ольга Андреевна — Московский физико-технический институт (г. Москва).

e-mail: olya.ryzhova12@gmail.com

Аннотация

Работа посвящена исследованию класса клеточных автоматов. Автомат описывает эволюцию на дискретной плоскости. Заданы правила перехода к следующему состоянию. Проведено исследование стандартных вопросов для подобных эволюционных автоматов, существование неумирающих конфигураций а также периодических эволюций. Найден критерий на правила перехода, при котором существует неумирающая конфигурация. Показано, что в случае симметричных шаблонов периодические эволюции могут иметь только период 2.

В перспективе возможно более глубокое описание различных эволюций, которые может давать заданный фиксированный набор правил (шаблон).

Ключевые слова: клеточный автомат, эволюция, шаблон.

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:

Иванов-Погодаев, И. А., Рыжова, О. А. Об эволюции, заданной клеточным автоматом // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 3, с. 284–291.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 3.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-284-291

On the evolution defined by a cellular automaton

I. A. Ivanov-Pogodaev, O. A. Ryzhova

Ivanov-Pogodaev Ilya Anatolievich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow).

e-mail: ivanov-pogodaev@mail.ru

Ryzhova Olga Andreevna — Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow).

e-mail: olya.ryzhova12@gmail.com

Abstract

This work is devoted to the study of a class of cellular automata. An automaton describes evolution on a discrete plane. Transition rules to the next state are specified. Standard questions for such evolutionary automata are investigated, including the existence of immortal configurations and of periodic evolutions.

A criterion is found for the transition rules under which an immortal configuration exists.

It is shown that in the case of symmetric templates, periodic evolutions can have only period 2.

In perspective, a more detailed description of the various possible evolutions generated by a given fixed set of rules (template) is possible.

Keywords: cellular automaton, evolution, template.

Bibliography: 4 titles.

For citation:

Ivanov-Pogodaev, I. A., Ryzhova, O. A. 2025, "On the evolution defined by a cellular automaton", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 284–291.

1. Введение

Клеточные автоматы популяризировал Джон Конвей, придумавший игру «Жизнь» [1], [2]. Несмотря на сравнительно простые правила, с помощью правил такого типа можно создавать клеточные автоматы, моделирующие машину Тьюринга. Также клеточные автоматы интересны с точки зрения моделирования биологических процессов размножения клеток.

Также эволюциям клеточных автоматов посвящен проект на Летней Конференции Турнира Городов 1997 года [4].

В настоящей работе выбран для изучения автомат, описанный в следующей известной задаче А.Л. Тоома:

«На бесконечной белой плоскости эволюционирует ограниченная черная клякса. Каждую секунду все точки меняют свой цвет по следующему закону. Чтобы определить цвет точки в следующий момент времени, надо нарисовать круг единичного радиуса с центром в этой точке. Если больше половины его площади черная, то центр становится черным, иначе - белым. Пусть K - клякса, K^n означает результат эволюции кляксы за n единиц времени (секунд). Существует ли клякса, которая будет жить вечно?»

Ответ на данный вопрос - нет. Дело в том, что эволюция обладает монотонностью, и если клякса с дополнительным множеством черных точек все равно умирает, то и изначальная клякса не может жить вечно. Поэтому вопрос сводится к изучению эволюции круга, при этом достаточно легко доказать, что в следующие моменты эволюции клякса остается кругом, причем его радиус уменьшается как минимум на некоторую константу.

Интересно изучить аналоги данной задачи в дискретном случае. Оказывается, на клеточной плоскости ситуация более нетривиальная. Аналогом круга единичного радиуса для определения цвета точки в следующий момент времени служит множество из нечетного числа клеток плоскости.

Пусть K' - множество клеток на клеточной плоскости, клякса - произвольное конечное подмножество K' . Площадь кляксы - число её клеток. Дискретный закон эволюции таков: фиксируется конечное множество $S \in K'$ с нечетным числом элементов и одной отмеченной клеткой (не обязательно из S). S называется *шаблоном* эволюции. Чтобы узнать цвет клетки $X \in K'$ через секунду, надо параллельно перенести S так, чтобы отмеченная клетка перешла в X , и посмотреть, точек какого цвета шаблон закрывает больше - это и будет цвет клетки X через секунду. Будем называть шаблон *убивающим*, если любая клякса гибнет при этом шаблоне, и *неубивающим* в противном случае.

2. Основные определения

Выберем *центральную клетку* следующим образом. Возьмём столбец, слева и справа от которого меньше половины клеток кляксы, и строку, сверху и снизу от которой меньше половины клеток кляксы. Клетку на их пересечении назовем *центральной*.

Понятно, что от выбора центральной клетки не зависит, шаблон убивающий или неубивающий. Ведь если выбрать центральной другую клетку шаблона, то каждый этап новой эволюции будет отличаться от соответствующего этапа старой параллельным переносом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что клетка лежит на прямой, если на прямой лежит её центр. Аналогично, будем говорить о клетке, находящейся снизу, справа и т.п. от прямой, если снизу, справа находится ее центр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Шаблон назовём почти симметричным, если для любой прямой, на которой лежит центральная клетка, по обе стороны от этой прямой лежит поровну других клеток шаблона, и на этой прямой с двух сторон от центральной тоже клеток шаблона поровну.

3. Критерий неубиваемости шаблона

ТЕОРЕМА 1 (о неубивающем шаблоне). Для любого почти симметричного шаблона существует клякса, которая не исчезнет в процессе эволюции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим почти симметричный шаблон. Ясно, что его центральная клетка будет клеткой шаблона. Пусть шаблон помещается внутри окружности с диаметром d и центром в центре центральной клетки. Рассмотрим все прямые, на которых лежат центральная клетка и ещё какая-либо клетка шаблона, и все прямые симметричные им относительно горизонтали, а также вертикальную и горизонтальную прямые, тоже проходящие через центральную клетку. Горизонтальная и вертикальная прямые делят плоскость на 4 части. Посмотрим на прямые, лучи от которых содержатся в левой верхней части плоскости (включая ограничивающие горизонтальную и вертикальную прямые) и пронумеруем их числами от 1 до k , начиная с горизонтальной и заканчивая вертикальной, по часовой стрелке. Теперь построим ломаную, первое звено которой - отрезок длины d , параллельный прямой 1, второе звено длины $2d$ соединено с правым концом первого звена и параллельно прямой 2, и так далее, m -ое звено длины $2d$ соединено с правым концом $m - 1$ звена и параллельно прямой m . Отразим по горизонтали эту ломаную, получив ещё одну, и соединим их концами вертикальных звеньев. Полученную ломаную соединим концами горизонтальных звеньев со своей, отражённой по вертикали, копией. Получается некая фигура F , ограниченная нашей замкнутой ломаной. Заметим, что от выбора четверти плоскости (мы выбрали левую верхнюю) F не зависит. Пусть клякса K состоит из клеток, центры которых находятся внутри фигуры F или на её границе.

ЛЕММА 1. Любая клетка кляксы K не исчезнет в процессе эволюции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если окружность с диаметром d и центром в центре какой-то клетки X кляксы, пересекает лишь одно звено F , то понятно, что внутри F больше половины клеток шаблона (то есть центров клеток шаблона). И тогда клетка X не исчезнет к следующему шагу эволюции.

Если окружность не пересекает никакое звено, то также очевидно, что X не исчезнет в следующий момент. Если же окружность пересекает два звена, то посмотрим, что будет, если эти два звена касаются друг друга в центре центральной клетки. Назовём их 1 и 2, (рисунок 1). 2 продлим до второго пересечения с окружностью. В секторе между 1 и продолжением

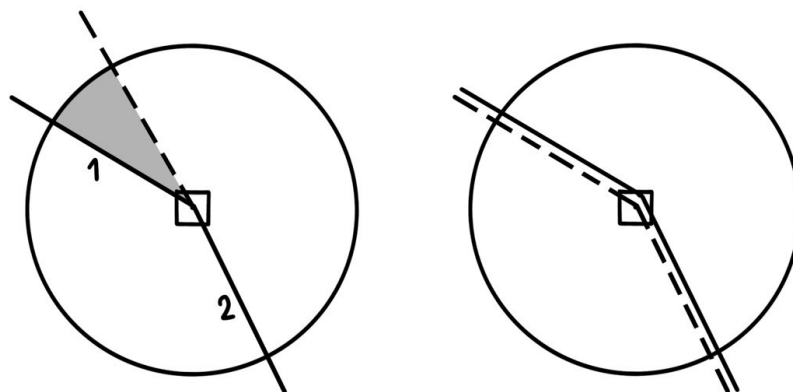


Рис. 1: Окружность шаблона

2 (на рисунке он закрашен серым) не должно быть центров клеток шаблона, ведь мы, когда строили ломаную, брали подряд звенья, параллельные прямой, выходящим из центра, между которыми клеток шаблона нет. Тогда внутри кляксы клеток шаблона столько, сколько клеток шаблона с одной стороны от прямой, содержащей звено 2 и на ней (с той, где звено 1). Тогда понятно, что их больше половины. Теперь рассмотрим случай, когда два звена касаются друг друга не в центре центральной клетки. Понятно, что раз центр центральной клетки должен быть внутри фигуры F , то часть окружности, ограниченная этими двумя звеньями (пересечение круга с F) содержит сектор, ограниченный радиусами, параллельными звеньям, правая часть рисунка 1. Тогда в этом случае внутри кляксы клеток шаблона разве что больше, чем в предыдущем (когда два звена касаются друг друга в центре центральной клетки). Ясно, что более двух звеньев окружность пересекать не могут (из-за их длины). \square

Эта лемма завершает доказательство теоремы. \square

Теперь докажем, что если шаблон не принадлежит к описанному классу почти симметричных, то он убивающий.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого шаблона, который не является почти симметричным, любая клякса исчезнет в процессе эволюции.*

Рассмотрим шаблон, не являющийся почти симметричным, и произвольную кляксу.

ЛЕММА 2. *Существует прямая l , на которой лежит центральная клетка и с одной стороны от l не меньше половины клеток. Кроме того, l не вертикальная и не горизонтальная.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если центральная клетка не является клеткой шаблона, то можно просто взять прямую, на которой не лежит ни одной клетки шаблона. Если центральная клетка является клеткой шаблона, то должна найтись прямая, на которой больше не лежит клеток шаблона и с одной стороны от неё клеток больше половины. Предположим, это не так. Но шаблон не почти симметричный, и тогда найдётся прямая, на которой лежит несколько клеток

шаблона и их не поровну с двух сторон от центральной клетки, или с двух сторон от этой прямой клеток шаблона не поровну. В любом случае малым шевелением можно эту прямую изменить на такую, чтоб с одной стороны от неё оказалось больше половины клеток. Если мы нашли искомую прямую, но она является вертикальной или горизонтальной, то это также можно исправить малым шевелением. \square

ЛЕММА 3 (о монотонности). *Если существует клякса A , покрывающая кляксу B , и A исчезнет в процессе эволюции, то и B исчезнет.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Клетки кляксы, которые совпадают с клетками шаблона клетки Y , назовём соседями Y .*

ЛЕММА 4. *На i -ый шаг эволюции A каждая клетка имеет соседей не менее, чем на i -ый шаг эволюции B .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем это по индукции. База: 0 шаг, условие леммы выполняется. Переход: от i к $i + 1$. Все клетки, что стали соседними с Y на $i + 1$ -ый шаг эволюции B , будут соседними и с Y на $i + 1$ -ый шаг эволюции A , ведь у них на i -ый шаг эволюции B было не больше соседей, чем на i -ый шаг эволюции A . Значит, на $i + 1$ -ый шаг эволюции A Y имеет соседей не менее, чем на $i + 1$ -ый шаг эволюции B . Переход доказан.

Тогда, если A исчезнет, то на какой-то шаг у любой клетки будет 0 соседей, значит и в эволюции B на какой-то шаг у любой клетки будет 0 соседей и B исчезнет. Лемма доказана. \square

ЛЕММА 5. *Существует клякса A , покрывающая нашу кляксу, такая, что A исчезнет в процессе эволюции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмём треугольник T со следующими свойствами:

1. Стороны T параллельны l , вертикальной и горизонтальной прямой.
2. T содержится в той полуплоскости от прямой, содержащей сторону, параллельную l , что и меньшая часть клеток шаблона.
3. T содержит всю кляксу.

Пусть клякса A состоит из клеток, центры которых находятся внутри треугольника T или на его границе.

Не умаляя общности, скажем, что треугольник T находится выше его горизонтальной стороны и правее вертикальной. Понятно, что ниже его горизонтальной стороны и левее вертикальной не появится клеток кляксы, ведь мы выбирали центральную клетку так, что с обеих сторон от вертикальной или горизонтальной прямой, на которой она лежит, было менее половины клеток.

Проведём множество прямых, параллельных l , так, чтоб каждая клетка нашей кляксы лежала хоть на какой-то из них. Понятно, что правее и выше самой правой из проведённых прямых новых клеток кляксы не появится из-за выбора l . А клетка (возможно, клетки), лежащая на самой правой из проведённых прямых, исчезнет к следующему шагу эволюции и больше клеток кляксы на этой прямой не появится. Дальше исчезнет клетка (клетки) со следующей прямой и т. д. Следовательно, клякса A исчезнет. Тогда по лемме о монотонности наша клякса также исчезнет. \square

Итак, почти симметричные шаблоны - неубивающие, а остальные - убивающие.

Теперь докажем, что для любого натурального n найдутся такие шаблон и клякса, что в процессе эволюции клякса будет меняться с периодом n .

ТЕОРЕМА 3. Для натурального n существует шаблон и клякса, переходящая в себя через n моментов времени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть шаблон состоит из центральной клетки, соседних с ней по нижнему и левому ребру и двух клеток, находящихся сверху и справа от центральной так, чтобы между каждой из этих клеток и центральной клеткой было расстояние $n - 1$. На левой части рисунка 2 показан шаблон для $n = 5$.

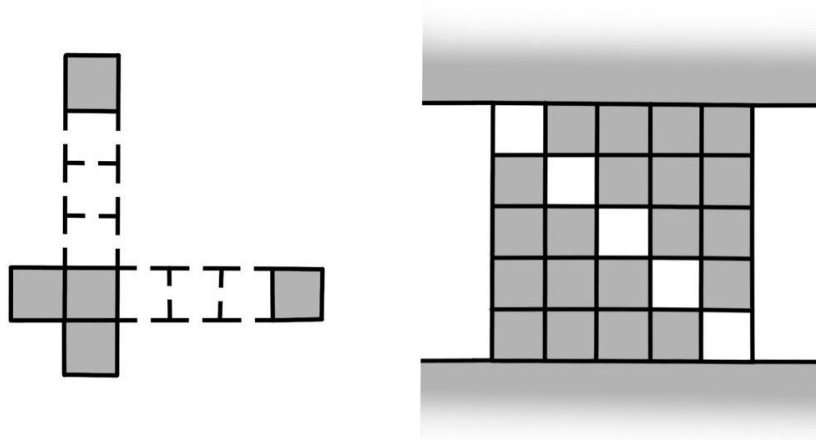


Рис. 2: Шаблон и клякса с периодической эволюцией

Мы умеем строить кляксу, снизу и сверху которой минимум по $2d - 1$ подряд идущих клеток, находящихся в одной строке. Возьмём квадрат $n \times n$, а сверху и снизу от него поместим две такие кляксы, чтобы его нижняя и верхняя строка соседствовали (по рёбрам) с кляксами.

Пронумеруем клетки в зависимости от того, на каких диагоналях они находятся. В левом нижнем углу - 1, в клетках, соседних с левым нижним углом, - 2, и так далее. На центральной диагонали из левого верхнего до правого нижнего угла - n , на следующей диагонали снова 1, затем снова 2 и так далее, в правом верхнем углу - $n - 1$.

Скажем, что все клетки квадрата, кроме клеток с номером n , изначально принадлежат кляксе. На правой части рисунка 2 показана схема кляксы для $n = 5$. Теперь окажем, что если на какой-то шаг эволюции кляксе принадлежат все клетки квадрата, кроме клеток с номером i , то на следующий шаг кляксе будут принадлежать все клетки, кроме клеток с номером $i + 1$ (будем считать, что $n + 1 = 1$).

С любой клеткой с номером $i + 1$ в одной строке есть клетка с номером i , причём либо на расстоянии 1 и слева от неё, если она не в самом левом столбце квадрата, либо на расстоянии $n - 1$ и справа от неё, если она в самом левом столбце квадрата. А вторая клетка шаблона, находящаяся в одной строке с центральной, вне квадрата. Тогда понятно, что обе клетки шаблона, находящиеся в одной строке с центральной, не совпадают с клетками кляксы. А в одном столбце с клеткой с номером $i + 1$ есть клетка с номером i на расстоянии 1 и снизу от неё, либо на расстоянии $n - 1$ и сверху от неё. Тогда для нашей клетки с номером $i + 1$ есть ещё одна клетка шаблона, не совпадающая с клеткой кляксы, значит у неё точно есть 3

клетки шаблона, не совпадающие с клетками кляксы и она перестанет быть клеткой кляксы к следующему шагу.

Для всех клеток с номерами, отличными от $i + 1$, клетка выше на $n - 1$, ниже на 1 и одна из тех, что правее на $n - 1$ и левее на 1 будут клетками кляксы. А значит, к следующему шагу все клетки, кроме клеток с номером $i + 1$, станут клетками кляксы, и лемма об этом доказана. Тогда понятно, что клякса эволюционирует с периодом n . \square

Интересно, что если шаблон является симметричным, то возможны лишь периодические эволюции с периодами 1 и 2.

ТЕОРЕМА 4. Пусть имеется симметричный относительно центральной точки шаблон S . Тогда произвольная клякса, либо перестает через какое-то время меняться, либо принимает всего два состояния, переходящие одно в другое, то есть переходит в периодическую эволюцию с периодом 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем называть кляксой K^i множество не только чёрных, но и белых клеток в момент i . Пусть X – некоторая клетка. Обозначим $S(X_i)$ множество клеток, принадлежащих кляксе K^{i-1} которое накрывает шаблон S , приложенный к X . То есть, это множество клеток, определяющее цвет клетки X_i .

Назовем *переменчивостью* кляксы K^i количество разноцветных пар вида (X, Y) , таких, что $X \in K^i$, а $Y \in S(X) \in K^{i-1}$. Докажем, что переменчивость кляксы K^{i+1} не превосходит переменчивость K^i , то есть переменчивость не возрастает со временем и является полуинвариантом.

Посчитаем число разноцветных пар для одной клетки X . Будем называть *бриллиантом* D_x граф, содержащий в качестве вершин клетки $A = X_{i+1}$, $B = X_{i-1}$ и множество $S(X_{i+1}) \in K^i$, а в качестве рёбер пары вида (A, C) , где $C \in S(X_{i+1})$, и пары вида (B, C) , где $C \in S(X_{i+1})$. Пары первого типа будем называть *верхними*, а пары второго - *нижними*.

Докажем, что в любом бриллианте верхних разноцветных пар не больше, чем нижних.

Действительно, допустим сначала, что A и B одноцветные. Тогда количество разноцветных пар в обоих случаях одинаково.

Пусть теперь A и B разноцветные, и, ради определенности A – черная, а B – белая. Тогда среди множества $S(X_{i+1})$, как раз и определяющего цвет клетки A , больше чёрных клеток, чем белых. Тогда и пар этих чёрных клеток с B больше, чем пар оставшихся белых клеток с A .

Все множество пар вида $(X_i, S(X_i))$ представляет собой верхние пары всех возможных бриллиантов D_{X_i} , причем каждая пара входит в один бриллиант. В силу симметричности шаблона S , всё множество пар $(S(X_i), X_{i-1})$ представляет собой множество нижних пар для всевозможных бриллиантов D_{X_i} , где также каждая пара входит в один бриллиант.

Из этого следует, что переменчивость кляксы не возрастает со временем, причем, если найдется хотя бы одна клетка X , что X_{i+1} и X_{i-1} разного цвета, то в соответствующем бриллианте верхних разноцветных пар будет меньше, чем нижних. Тогда переменчивость кляксы уменьшится.

Рассмотрим эволюцию кляксы. В силу того, что множество черных клеток ограничено некоторым прямоугольником, в некоторый момент клякса начнет меняться периодически. Следовательно, переменчивость кляксы должна быть всё время постоянной. В случае, если период не равен 1 или 2, найдется клетка X , что X_{i+1} и X_{i-1} разного цвета, что приводит к уменьшению переменчивости и противоречию. \square

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gardner, Martin *The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game 'life'*. Mathematical Games. Scientific American. Vol. 223, no. 4. pp. 120–123, 1970

2. Тoffоли Т., Марголюс Н. *Машины клеточных автоматов* М.: Мир, 1991. — ISBN 5-03-001619-8
3. Wolfram, Stephen *A New Kind of Science* Wolfram Media, 2002 ISBN: 1-57955-008-8
4. Белов(Канель) А. Я., Буфетов А. И., Иванов И. А., Малистов А. С. *Кляксы и шаблоны* Летняя конференция турнира городов., 1998, М.:МЦНМО, 46–49, 114–132, Матем.Образование, № 2, июль–сентябрь 1997 г., стр.125–127

REFERENCES

1. Gardner, M. 1970, “The fantastic combinations of John Conway’s new solitaire game ‘life’”, *Scientific American*, vol. 223, no. 4, pp. 120–123.
2. Toffoli, T. & Margolus, N. 1991, *Machines of cellular automata*, Mir, Moscow. (in Russian)
3. Wolfram, S. 2002, *A New Kind of Science*, Wolfram Media.
4. Belov(Kanel) A.Ya, Bufetov A.I., Ivanov. I.A., Malistov A. S. *Blots and templates*, Summer Conference of Tournaments of Towns, 1998, MCCME, 46–49, 114–132, Math Education № 2, july-september 1997 г., 125–127(in Russian)

Получено: 26.05.2025

Принято в печать: 27.08.2025