ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 3.

УДК 514.541 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-247-256

Эндоморфизмы специального вида конечно порожденных абелевых групп

А. Сарвари

Сарвари Асадуллах — аспирант, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: sarwary.asad20@gmail.com

Аннотация

Работа посвящена абелевым группам, содержащим хотя бы один эндоморфизм, ядро которого совпадает с его образом. Заметим, что условие $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$ влечет за собой равенство $\varphi^2 = 0$, то есть φ является нильпотентным эндоморфизмом индекса нильпотентности 2.

Основным техническим результатом работы является теорема 1, в которой на языке подгрупп получен критерий существования эндоморфизма абелевой группы, ядро которого совпадает с его образом.

В этой статье существование эндоморфизма, ядро которого совпадает с его образом, полностью решено для абелевых групп из классов циклических и коциклических групп, элементарных p-примарных абелевых групп и конечно порожденных абелевых групп.

Главным результатом работы является теорема 12, в которой доказано, что конечно порожденная абелева группа A обладает эндоморфизмом, образ которого совпадает с его ядром тогда и только тогда, когда либо A — конечная группа, порядок которой является полным квадратом, либо $A = F \oplus K$, где F — свободная абелева группа четного ранга, а K — произвольная конечная абелева группа.

Ключевые слова: абелева группа, эндоморфизм, нильпотентность, элементарная группа, конечно порожденная группа.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Сарвари А. Эндоморфизмы специального вида конечно порожденных абелевых групп // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 3, с. 247–256.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 3.

UDC 514.541 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-247-256

Special endomorphisms of finitely generated Abelian groups

A. Sarwary

Sarwary Asadullah — postgraduate student, Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: sarwary.asad20@gmail.com

Abstract

The paper is devoted to abelian groups containing at least one endomorphism whose kernel coincides with its image. Note that the condition $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$ implies the equality $\varphi^2 = 0$, that is, φ is a nilpotent endomorphism of nilpotency index 2.

The main technical result of the paper is Theorem 1, in which a criterion for the existence of an endomorphism of an abelian group whose kernel coincides with its image is obtained in the language of subgroups.

In this paper, the existence of an endomorphism whose kernel coincides with its image is completely solved for Abelian groups from the classes of cyclic and cocyclic groups, elementary p-primary Abelian groups, and finitely generated Abelian groups.

The main result of the paper is Theorem 12, which proves that a finitely generated Abelian group A has an endomorphism whose image coincides with its kernel if and only if either A is a finite group whose order is a perfect square, or $A = F \oplus K$, where F is a free Abelian group of even rank and K is an arbitrary finite Abelian group.

Keywords: abelian group, endomorphism, nilpotency, elementary group, finitely generated group.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Sarwary, A. 2025, “Special endomorphisms of finitely generated Abelian groups”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 247–256.

1. Введение

Изучение эндоморфизмов абелевых групп представляет для нас интерес, прежде всего, в связи с тем, что позволяет получить дополнительную информацию о самих абелевых группах. В данной статье изучаются абелевы группы, содержащие хотя бы один эндоморфизм, ядро которого совпадает с его образом. Главной задачей работы является описание всех конечно порожденных абелевых групп A, содержащих эндоморфизм $\varphi\colon A \to A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

Под «группой» в работе всегда подразумевается абелева группа, записанная аддитивно. Через $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_m$ обозначается соответственно бесконечная циклическая группа и циклическая группа порядка m. Если M — подмножество группы A, то через $\langle M\rangle$ будем обозначать подгруппу в A, порожденную множеством M:

$$M = \varnothing \ \Rightarrow\ \langle M\rangle = 0;\ \ M \neq \varnothing \ \Rightarrow\ \langle M\rangle = \{k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_sa_s \mid k_i \in \mathbb{Z},\ a_i \in M\}.$$

Через $t(A)$ и $t_p(A)$ будем обозначать соответственно периодическую и p-примарную часть группы A. $E(A)$ — кольцо эндоморфизмов группы A.

Основные используемые в работе понятия и определения теории абелевых групп соответствуют книгам [1]–[5]. Дополнительную информацию об эндоморфизмах абелевых групп можно найти в [8]–[15].

2. Базовые свойства

Теорема 1. *Пусть A — абелева группа, тогда эндоморфизм $\varphi\colon A \to A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$ существует тогда и только тогда, когда в группе A найдется подгруппа B, такая что $A/B \cong B$.*

Доказательство. Пусть существует эндоморфизм φ группы A, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$. Тогда по основной теореме о гомоморфизме для подгруппы $B = \ker\varphi$ группы A имеет место изоморфизм $A/B \cong B$.

Обратно, пусть $A/B \cong B$ для некоторой подгруппы группы A. Тогда построим цепочку гомоморфизмов:

$$A \xrightarrow{\alpha} A/B \xrightarrow{\beta} B \xrightarrow{\gamma} A,$$

где α — естественный эпиморфизм, β — изоморфизм и γ — вложение. Отсюда, если $\varphi = \alpha\circ\beta\circ\gamma$, то $\ker\varphi = B = \operatorname{Im}\varphi$.

Следствие 1. *Если для конечной группы A существует эндоморфизм $\varphi\colon A \longrightarrow A$ такой, что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$, то $|A| = n^2$ для некоторого натурального числа n.*

Следствие 2. *Если $A \cong B \oplus B$, то существует эндоморфизм $\varphi\colon A \longrightarrow A$ такой, что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.*

Пример 1. Если $A = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$, то $|A| = |\mathbb{Z}_p| \cdot |\mathbb{Z}_{p^2}| = p \cdot p^2 = p^3$. Но p^3 не является полным квадратом. Тогда из следствия 1 вытекает, что для группы $A = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$ не существует эндоморфизма φ такого, что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

Пример 2. Пусть p — простое число. Рассмотрим квазициклическую группу $\mathbb{Z}_{p^\infty}$,

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \langle a_0,\, a_1,\, \dots,\, a_k,\, \dots \mid pa_i = a_{i-1},\, pa_0 = 0\rangle.$$

Пусть $B \subseteq \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Если B не является конечно порожденной группой, то $B = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Если же подгруппа B конечно порождена, то $B = \langle a_{i1},\, a_{i2},\, \dots,\, a_{is}\rangle = \langle a_{is}\rangle$ — циклическая группа.

Так как $\mathbb{Z}_{p^\infty}/\mathbb{Z}_{p^\infty} = 0$ и $\mathbb{Z}_{p^\infty}/\mathbb{Z}_{p^m} = \mathbb{Z}_{p^\infty}$, то группа $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ не удовлетворяет условиям теоремы 1, а значит, не существует эндоморфизма $\varphi\colon \mathbb{Z}_{p^\infty} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty}$ такого, что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

Пример 3. Пусть A — p-примарная циклическая группа, $A = \mathbb{Z}_{p^k}$. Предположим, что существует эндоморфизм $\varphi\colon A \longrightarrow A$ такой, что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$. Все нетривиальные подгруппы группы $\mathbb{Z}_{p^k}$ образуют цепь:

$$B_1 = p\mathbb{Z}_{p^k} \supseteq B_2 = p^2\mathbb{Z}_{p^k} \supseteq \dots \supseteq B_{k-1} = p^{k-1}\mathbb{Z}_{p^k}.$$

Следовательно, возможны 2 случая.

1. $k = 2n+1$, тогда $|A|$ не является полным квадратом, и в соответствии со следствием 2 не существует эндоморфизма $\varphi\colon A \longrightarrow A$, такого что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

2. $k = 2n$, тогда из равенства $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$ и теоремы Лагранжа следует, что

$$\ker\varphi = B_n = p^n\mathbb{Z}_{p^{2n}} = \operatorname{Im}\varphi.$$

   Более того, искомый эндоморфизм $\varphi\colon A \longrightarrow A$, действует по правилу $\varphi(\bar{a}) = p^n\bar{a}$.

Напомним, что группа A называется *коциклической*, если существует элемент $a \in A$, такой что всякий гомоморфизм $\varphi\colon B \longrightarrow A$, где $a \in \operatorname{Im}\varphi$, является эпиморфизмом. Хорошо известно (см., например, [1, теорема 3.1]), что группа A является коциклической тогда и только тогда, когда $A \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ или $A \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Таким образом, из примеров 2 и 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Предложение 1. *В коциклической группе A существует эндоморфизм $\varphi\colon A \longrightarrow A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$ тогда и только тогда, когда $A \cong \mathbb{Z}_{p^{2n}}$.*

3. Элементарные p-примарные абелевы группы

Определение 1. *Абелева группа A называется p-элементарной, где p — простое число, если порядок любого ненулевого элемента из A равен p, т.е. $pA = 0$.*

Заметим, что любая элементарная p-примарная абелева группа A является векторным пространством над полем $\mathbb{Z}_p$. Данное утверждение вытекает из соотношения:

$$\forall\, a \in A \ \forall\, m, k \in \mathbb{Z} \quad ma = ka \ \Leftrightarrow \ m \equiv k \pmod{p}.$$

В связи с этим, при работе с элементарными p-примарными абелевыми группами можно использовать аппарат линейной алгебры. В частности, базис элементарной p-примарной группы A (как $\mathbb{Z}_p$-пространства) будем называть ее *p-базисом*, а его мощность будем обозначать через $r_p(A)$ и называть *p-рангом* группы A.

Напомним следующую хорошо известную теорему о строении элементарных групп (подробнее см. [1, теорема 8.5]).

Теорема 2. *Если A — элементарная p-примарная абелева группа, то A раскладывается в прямую сумму циклических групп порядка p,*

$$A \cong \bigoplus_m \mathbb{Z}_p, \ \textit{где} \ \ m = r_p(A).$$

Из данной теоремы вытекает:

Теорема 3. *Если A — элементарная p-примарная абелева группа, то существует эндоморфизм $\varphi\colon A \longrightarrow A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$ тогда и только тогда, когда либо A — бесконечная группа, либо A — конечная группа четного p-ранга.*

Доказательство. Если A — бесконечная элементарная p-примарная группа, то

$$A \cong \bigoplus_m \mathbb{Z}_p = \bigoplus_m \mathbb{Z}_p \oplus \bigoplus_m \mathbb{Z}_p,$$

а тогда по следствию 2 найдется эндоморфизм $\varphi\colon A \longrightarrow A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

Если же A — конечная элементарная p-примарная группа, то по следствию 1 имеет место равенство $|A| = p^{2n}$, а значит, $r_p(A) = 2n$.

Теорема 4. *Пусть A — элементарная p-примарная абелева группа конечного p-ранга $2n$ и $\varphi\colon A \longrightarrow A$ — эндоморфизм, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$. Тогда найдется p-базис группы A, относительно которого матрица эндоморфизма φ имеет вид $M_\varphi = \begin{pmatrix} \bar{0} & E \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$, где $\bar{0}$ — нулевая $(n \times n)$-матрица и E — единичная $(n \times n)$-матрица.*

Доказательство. Так как $r_p(A) = 2n$ и $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$, то

$$\begin{cases} r_p(\ker\varphi) = n \\ r_p(\operatorname{Im}\varphi) = n \end{cases}.$$

Построим базис $\{\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)\}$ пространства $\operatorname{Im}\varphi$. Тогда векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ тоже линейно независимы над полем $\mathbb{Z}_p$, как прообразы линейно независимых векторов.

Рассмотрим систему $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)\}$. Предположим, что при каких-то скалярах $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{Z}_p$ выполняется равенство:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n + \beta_1\varphi(a_1) + \beta_2\varphi(a_2) + \ldots + \beta_n\varphi(a_n) = 0. \qquad (*)$$

Тогда
$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = \varphi(-\beta_1 a_1 - \beta_2 a_2 - \ldots - \beta_n a_n).$$
Подействуем на полученное равенство эндоморфизмом φ:
$$\alpha_1\varphi(a_1) + \alpha_2\varphi(a_2) + \ldots + \alpha_n\varphi(a_n) = \varphi\big(\varphi(-\beta_1 a_1 - \beta_2 a_2 - \ldots - \beta_n a_n)\big) = 0.$$
Но векторы $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\ldots$, $\varphi(a_n)$ линейно независимые, значит, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Подставим полученные значения α_i в $(*)$, получим:
$$\beta_1\varphi(a_1) + \beta_2\varphi(a_2) + \ldots + \beta_n\varphi(a_n) = 0.$$
А тогда и $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$.

Таким образом, система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)\}$ линейно независимая. Следовательно, она образует p-базис группы A. Построим матрицу эндоморфизма φ в этом p-базисе:
$$\begin{aligned}
\varphi(a_1) &= 0\cdot a_1 + 0\cdot a_2 + \ldots + 0\cdot a_n + 1\cdot\varphi(a_1) + 0\cdot\varphi(a_2) + \ldots + 0\cdot\varphi(a_n)\\
\varphi(a_2) &= 0\cdot a_1 + 0\cdot a_2 + \ldots + 0\cdot a_n + 0\cdot\varphi(a_1) + 1\cdot\varphi(a_2) + \ldots + 0\cdot\varphi(a_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi(a_n) &= 0\cdot a_1 + 0\cdot a_2 + \ldots + 0\cdot a_n + 0\cdot\varphi(a_1) + 0\cdot\varphi(a_2) + \ldots + 1\cdot\varphi(a_n)\\
\varphi\left(\varphi(a_1)\right) &= 0\cdot a_1 + 0\cdot a_2 + \ldots + 0\cdot a_n + 0\cdot\varphi(a_1) + 0\cdot\varphi(a_2) + \ldots + 0\cdot\varphi(a_n)\\
\varphi\left(\varphi(a_2)\right) &= 0\cdot a_1 + 0\cdot a_2 + \ldots + 0\cdot a_n + 0\cdot\varphi(a_1) + 0\cdot\varphi(a_2) + \ldots + 0\cdot\varphi(a_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi\left(\varphi(a_n)\right) &= 0\cdot a_1 + 0\cdot a_2 + \ldots + 0\cdot a_n + 0\cdot\varphi(a_1) + 0\cdot\varphi(a_2) + \ldots + 0\cdot\varphi(a_n)
\end{aligned}$$
Таким образом, $M_\varphi = \begin{pmatrix}\bar{0} & E\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$.

4. Конечно порожденные абелевы группы

Определение 2. *Абелева группа A называется конечно порожденной, если она порождается конечным набором элементов, т.е. найдутся $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, такие что*
$$A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle = \{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_n a_n \mid m_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть A — конечно порожденная абелева группа. Хорошо известно (см., например, [1, теорема 15.5]), что $A = F \oplus K$, где $F = \bigoplus\limits_m \mathbb{Z}$ — свободная группа конечного ранга m и K — конечная группа.

Пример 4. Пусть $A = \langle e_1\rangle \oplus \langle e_2\rangle$, где $o(e_1) = p$ и $o(e_2) = p^3$, т.е. $A \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^3}$. Тогда $|A| = p^4$, и A удовлетворяет необходимому условию существования эндоморфизма, ядро которого совпадает с его образом. Построим циклическую подгруппу B группы A, порожденную элементом $b = e_1 + pe_2$, $B = \langle b\rangle$. Так как $o(b) = p^2$, то $B \cong \mathbb{Z}_{p^2}$. По теореме Лагранжа $|A/B| = |A| : |B| = p^2$, следовательно, $A/B \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ или $A/B \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

Предположим, что $A/B \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, тогда все ненулевые элементы в A/B имеют порядок p. Рассмотрим элемент $\bar{x} = (e_1 + e_2) + B \in A/B$. Поскольку $o(\bar{x}) = p$, то $p\bar{x} = (pe_1 + pe_2) + B = \bar{0}$, т.е. $pe_1 + pe_2 \in B$, а значит,
$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad pe_1 + pe_2 = k(e_1 + pe_2).$$
Отсюда следует, что k делится на p, $k = ps$. Тогда $pe_2 = sp^2 e_2$, получили противоречие.

Значит, $o(\bar{x}) = p^2$ и $A/B \cong \mathbb{Z}_{p^2} \cong B$. Таким образом, по теореме 1 найдется эндоморфизм $\varphi\colon A \longrightarrow A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

Лемма 1. *Если существуют эндоморфизмы* $\varphi\colon A \longrightarrow A$ *и* $\psi\colon B \longrightarrow B$, *такие что* $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$ *и* $\ker\psi = \operatorname{Im}\psi$, *то найдется эндоморфизм* $\chi\colon A \oplus B \longrightarrow A \oplus B$, *такой что* $\ker\chi = \operatorname{Im}\chi$.

Доказательство. Пусть $C = A \oplus B$. Построим эндоморфизм $\chi\colon C \longrightarrow C$, действующий по правилу $\chi(a,\, b) = (\varphi(a),\, \psi(b))$. Тогда

$$(a,\, b) \in \ker\chi \;\Rightarrow\; \chi(a,\, b) = (\varphi(a),\, \psi(b)) = (0,\, 0) \;\Rightarrow\; \varphi(a) = 0 \text{ и } \psi(b) = 0,$$

т.е. $a \in \ker\varphi$ и $b \in \ker\psi$, значит, $(a,\, b) \in \ker\varphi \oplus \ker\psi$. Таким образом, $\ker\chi \subseteq \ker\varphi \oplus \ker\psi$.

Обратно, пусть $(a,\, b) \in \ker\varphi \oplus \ker\psi$, тогда $\chi(a,\, b) = (\varphi(a),\, \psi(b)) = (0,\, 0)$, т.е. $(a,\, b) \in \ker\chi$. Таким образом, $\ker\chi = \ker\varphi \oplus \ker\psi$.

Если $(a,\, b) \in \operatorname{Im}\chi$, то $(a,\, b) = \chi(a_1,\, b_1) = (\varphi(a_1),\, \psi(b_1)) \in \operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Im}\psi$, а значит, имеет место включение $\operatorname{Im}\chi \subseteq \operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Im}\psi$. Обратно, если $(a,\, b) \in \operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Im}\psi$, то $a = \varphi(a_1)$ и $b = \psi(b_1)$, следовательно, $\chi(a_1,\, b_1) = (\varphi(a_1),\, \psi(b_1)) = (a,\, b) \in \operatorname{Im}\chi$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{Im}\chi = \operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Im}\psi$.

Таким образом, $\operatorname{Im}\chi = \operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Im}\psi = \ker\varphi \oplus \ker\psi = \ker\chi$.

Следующая лемма обобщает разобранный выше пример 4.

Лемма 2. *Пусть* $A = \langle e_1\rangle \oplus \langle e_2\rangle$, *где* $o(e_1) = p^k$ *и* $o(e_2) = p^n$. *Если* $k + n$ — *четное число, то существует эндоморфизм* $\varphi\colon A \longrightarrow A$, *такой что* $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

Доказательство. Если k и n — четные числа, то искомый эндоморфизм существует по предложению 1 и лемме 1.

Пусть k и n — нечетные числа. Если $k = n$, то искомый эндоморфизм φ также существует по следствию 2.

Положим, что $k < n$. Построим циклическую подгруппу B группы A, порожденную элементом $b = e_1 + p^{\frac{n-k}{2}} e_2$, $B = \langle b\rangle$. Тогда $|B| = o(e_1 + p^{\frac{n-k}{2}} e_2) = p^{\frac{n+k}{2}}$ и $|A/B| = p^{\frac{n+k}{2}}$.

Убедимся, что A/B — циклическая группа. Построим элемент $\bar{x} = e_1 + e_2 + B \in A/B$. Предположим, что $p^{\frac{n+k}{2}-1}\bar{x} = \bar{0}$. Так как $n \geqslant k + 2$, то $\frac{n+k}{2} - 1 \geqslant k$, а значит,

$$p^{\frac{n+k}{2}-1}\bar{x} = \bigl(p^{\frac{n+k}{2}-1}e_1 + p^{\frac{n+k}{2}-1}e_2\bigr) + B = p^{\frac{n+k}{2}-1}e_2 + B = \bar{0},$$

т.е. $p^{\frac{n+k}{2}-1}e_2 \in B$. Следовательно, $p^{\frac{n+k}{2}-1}e_2 = m\bigl(e_1 + p^{\frac{n-k}{2}}e_2\bigr)$, откуда

$$me_1 = 0 \text{ и } mp^{\frac{n-k}{2}}e_2 = p^{\frac{n+k}{2}-1}e_2$$

Из полученных равенств следует, что $m = p^k s$ $(s \in \mathbb{N})$ и

$$p^{\frac{n+k-2}{2}}e_2 = p^k s \cdot p^{\frac{n-k}{2}}e_2 = sp^{\frac{n+k}{2}}e_2,$$

а значит, элемент e_2 делится на p. Получили противоречие.

Таким образом, $p^{\frac{n+k}{2}-1}\bar{x} \neq 0$, т.е. $o(\bar{x}) = p^{\frac{n+k}{2}}$ и A/B — циклическая группа, порожденная элементом $\bar{x}$. Следовательно, $B \cong \mathbb{Z}_{p^m} \cong A/B$, где $m = p^{\frac{n+k}{2}}$. Тогда по теореме 1 найдется эндоморфизм $\varphi\colon A \longrightarrow A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

Лемма 3. *Конечная группа* A *имеет эндоморфизм, образ которого совпадает с его ядром, тогда и только тогда, когда* $|A| = n^2$.

Доказательство. Пусть $|A| = n^2$. Так как A — конечная группа, то A раскладывается в прямую сумму своих p-примарных компонент, $A = \bigoplus_{p\in P} t_p(A)$, где P — конечное множество простых чисел.

Зафиксируем простое число p. Тогда группа $t_p(A)$ раскладывается в конечную прямую сумму циклических p-примарных групп:

$$t_p(A) \cong \mathbb{Z}_{p^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{k_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{k_m}},$$

причем, очевидно, число $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ — четное. В силу предложения 1, следствия 2 и леммы 1 можно считать, что числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$ нечетные и попарно различные. Но тогда m — четное число, а значит, в силу лемм 1 и 2 найдется эндоморфизм $\alpha_p\colon t_p(A) \longrightarrow t_p(A)$, такой что $\ker\alpha_p = \operatorname{Im}\alpha_p$. Поскольку A — конечная прямая сумма групп $t_p(A)$, то по лемме 1 и для A найдется эндоморфизм $\alpha\colon A \longrightarrow A$, такой что $\ker\alpha = \operatorname{Im}\alpha$.

Обратное утверждение справедливо в силу следствия 1.

Напомним, что элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ произвольной группы A называются *линейно независимыми*, если из равенства $m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_ka_k = 0$, где $m_i \in \mathbb{Z}$, следует, что $m_1 = m_2 = \ldots = m_k = 0$. Бесконечная система элементов линейно независима, если линейно независима любая ее конечная подсистема.

Мощность максимальной линейно независимой системы элементов группы A называется *рангом* (*без кручения*) группы A и обозначается $r_0(A)$. Хорошо известно (см., например, [5, § 0]), что $r_0(A/B) = r_0(A) - r_0(B)$.

Если A — конечно порожденная группа, то $A = F \oplus K$, где F — свободная группа, а K — конечная группа, при этом, $r_0(A) = r(F) < \infty$.

Лемма 4. *Пусть $A = F \oplus K$ — конечно порожденная группа, имеющая эндоморфизм, образ которого совпадает с его ядром, тогда $r(F) = 2m$ — четное число.*

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 1 группа A содержит подгруппу B, такую что $A/B \cong B$. Тогда $r_0(A) - r_0(B) = r_0(B)$ и $r_0(A) = r(F) = 2 \cdot r_0(B) = 2m$.

Пример 5. Пусть $A = \langle e_1\rangle \oplus \langle e_2\rangle \oplus \langle e_3\rangle$, $o(e_1) = o(e_2) = \infty$ и $o(e_2) = m$, где m — произвольное натуральное число большее 1, т.е. $A \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m$. Построим подгруппу B группы A, порожденную элементами me_2 и e_3, т.е. $B = \langle me_2\rangle \oplus \langle e_3\rangle$. Тогда

$$A/B \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m \cong B.$$

Следовательно, по теореме 1 найдется эндоморфизм $\varphi\colon A \longrightarrow A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

Перейдем к основному результату данного исследования.

Теорема 5. *Пусть A — конечно порожденная группа, тогда эндоморфизм $\varphi\colon A \longrightarrow A$, такой что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$, существует в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:*

1. *A — конечная группа, порядок которой $|A|$ является полным квадратом;*
2. *$A = F \oplus K$, где $F \cong \bigoplus_{2k} \mathbb{Z}$ $(k \in \mathbb{N})$ и K — произвольная конечная группа.*

Доказательство. Если A — конечная группа, то в силу леммы 3 эндоморфизм группы A, образ которого совпадает с его ядром, существует тогда и только тогда, когда $|A| = n^2$.

Если же A — смешанная конечно порожденная группа, то условие 2 является необходимым для существования эндоморфизма $\varphi\colon A \longrightarrow A$, такого что $\ker\varphi = \operatorname{Im}\varphi$. Покажем, что условие 2 также является достаточным.

Заметим, что произвольную конечную группу K можно представить в виде $K = \langle a \rangle \oplus K_1$, где $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_m$ и $|K_1| = n^2$. Тогда по лемме 3 и теореме 1 найдется подгруппа B_1 группы K_1, такая что $K_1/B_1 \cong B_1$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{2k}$ — базис свободной группы F. Тогда построим подгруппу $B = F_1 \oplus \langle a \rangle \oplus B_1$ группы A, где $F_1 = \langle me_1, e_2, \ldots, e_k \rangle$. Очевидно, имеет место изоморфизм:

$$A/B \cong (F/F_1) \oplus \big(K/(\langle a \rangle \oplus B_1)\big) \cong \bigoplus_k \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m \oplus K/B_1 \cong \bigoplus_k \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m \oplus B_1 \cong B.$$

Таким образом, по теореме 1 найдется эндоморфизм $\varphi\colon A \longrightarrow A$, образ которого совпадает с его ядром.

5. Заключение

Абелевы группы, имеющие эндоморфизмы, ядра которых совпадают с их образами, образуют довольно широкие классы. Необходимым и достаточным условием существования такого эндоморфизма у конечно порожденной смешанной группы является четность свободной части этой группы.

Дальнейшие исследования в этом направлении могут быть сосредоточены на прямых суммах примарных циклических групп и на абелевых группах без кручения конечного ранга.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир. Т. 1, 1974. — 335 с.

2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир. Т. 2, 1977. — 416 с.

3. Fuchs L. Abelian Groups. — Elsevier, International series in pure and applied Mathematics. Vol. 1–2, 2014.

4. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал Пресс, 2006. — 512 с.

5. Arnold D.M. Finit Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — LNM, Vol. 931, 1982. — 198 p.

6. Сарвари А. Эндоморфизмы специального вида конечно порожденных абелевых групп // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XXIII Международной конференции, посвященной 80-летию профессора Александра Ивановича Галочкина и 75-летию профессора Владимира Григорьевича Чирского. – Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2024. С. 67.

7. Сарвари А. Примарные абелевы группы с нильпотентными эндоморфизмами индекса нильпотентности 2 // НАН Беларуси: Материалы XIV Беларуской Международной Математической Конференции, посвященной 65-летию Института математики. – Минск: Нац. акад. нау. Беларуси. 2024. С. 56–57.

8. Крылов П.А., Туганбаев А.А., Царев А.В. sp-Группы и их кольца эндоморфизмов // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 159. ВИНИТИ РАН, С. 68–110.

9. Чехлов А.Р. Абелевы группы с мономорфизмами, инвариантными относительно эпиморфизмов // Изв. вузов. Матем. 2018. №12. С. 86–93

10. Чехлов А.Р. Об абелевых группах с перестановочными коммутаторами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Т. 20, № 5. С. 227–233.

11. Крылов П.А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2007. № 1. С. 17–27.

12. Крылов П.А. Наследственные кольца эндоморфизмов смешанных абелевых групп // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43, № 1. С. 108–119.

13. Крылов П.А., Туганбаев А.А., Царев А.В. E-группы и E-кольца // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 159. ВИНИТИ РАН, С. 111–132.

14. Гриншпон С.Я., Себельдин А.М. Определяемость периодических абелевых групп своими группами эндоморфизмов // Матем. заметки. 1995. Т. 57, № 5. С. 457–462.

15. Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А. Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2021. № 74. С. 30–42.

REFERENCES

1. Fuchs, L. 1970, *Infinite Abelian Groups*, Academic Press, vol. I, New York and London.

2. Fuchs, L. 1973, *Infinite Abelian Groups*, Academic Press, vol. II, New York and London.

3. Fuchs, L. 2014, *Abelian Groups*, International Series in Pure and Applied Mathematics, Vol. 1–2, Elsevier, Amsterdam. Holland.

4. Krylov, P.A., Mikhalev, A.V. and Tuganbaev, A.A. 2003, *Endomorphism Rings of Abelian Groups*, Springer Dordrecht, Berlin.

5. Arnold, D.M. 1982, *Finite rank torsion free abelian groups and rings*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 931, Springer-Verlag, Berlin.

6. Sarwary, A. 2024, Endomorphisms of special type of finitely generated abelian groups // Algebra, Number theory, Discrete geometry and Multiscale modeling: Contemporary problems, applications and historical aspects: Proceedings of the XXIII International Conference dedicated to the 80th anniversary of Professor Alexander Ivanovich Galochkin and the 75th anniversary of Professor Vladimir Grigorievich Chirsky. Tula: Tula State L. Tolstoy Pedagogical University, p. 67.

7. Sarwary, A. 2024, Primary abelian groups with nilpotent endomorphisms of nilpotency index 2 // National Academy of Sciences of Belarus: Proceedings of the XIV Belarusian International Mathematical Conference dedicated to the 65th anniversary of the Institute of Mathematics. Minsk: National Academy of Sciences of Belarus, pp. 56-57.

8. Krylov, P.A., Tuganbaev, A.A. and Tsarev, A.V. 2021, “sp-Groups and their Endomorphism Rings”, *J. Math. Sci.*, New York, vol. 256, no. 3, pp. 299–340.

9. Chekhlov, A.R. 2018, “Abelian Groups With Monomorphisms Invariant With Respect to Epimorphisms”, *Russian Mathematics* [Izvestiya VUZ. Matematika], vol. 62, no. 12, pp. 74–80.

10. Chekhlov, A.R. 2018, “On Abelian Groups with Commutative Commutators of Endomorphisms”, *J. Math. Sci.*, New York, vol. 230, no. 3, pp. 502–506.

11. Krylov, P.A. 2007, “Radicals of endomorphism rings of abelian groups”, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, no. 1, pp. 17–27.

12. Krylov, P.A. 2002, “Hereditary endomorphism rings of mixed abelian groups”, *Siberian Math. J.*, vol. 43, no. 1, pp. 83–91.

13. Krylov, P.A., Tuganbaev, A.A. and Tsarev, A.V. 2019, “E-groups and E-rings”, *J. Math. Sci.*, New York, vol. 256, no. 3, pp. 341–361.

14. Grinshpon, S.Y. and Sebeldin, A.M. 1995, “Definability of periodic abelian groups by their endomorphism groups”, *Math. Notes*, vol. 57, no. 5, pp. 457–462.

15. Stepanova, A.Yu. and Timoshenko, E.A. 2021, “Matrix representation of endomorphisms of primary groups of small ranks”, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, no. 74, pp. 30–42.

Получено: 13.05.2025
Принято в печать: 27.08.2025