ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 3.

УДК 511. 344 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-235-246

Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами

Ф. З. Рахмонов

Рахмонов Фируз Заруллоевич — кандидат физико-математических наук, Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана (г. Душанбе).
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Аннотация

Для достаточно больших целых чисел K, x, y, q при условии $K \leqslant y < x$, n — фиксированное натуральное число, α — вещественное, $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$, $(a,q)=1$, $q \geqslant 1$, получена оценка вида

$$\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{x-y<p\leqslant x} e(\alpha k p^n)\right| \ll Ky\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{y}+\frac{q}{Ky^n}+\frac{1}{K^{2^{n-1}}}\right)^{2^{-n-1}}\mathscr{L}^{\frac{n^2}{2^{n+1}}},$$

что является усилением и обобщением теоремы И. М. Виноградова о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$.

Ключевые слова: короткая тригонометрическая сумма Г. Вейля с простыми числами, равномерное распределение по модулю единицы, нетривиальная оценка, дробная часть.

Библиография: 21 названий.

Для цитирования:
Рахмонов, Ф. З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Чебышёвский сборник, 2025, т. 26, вып. 3, с. 235–246.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 3.

UDC 511. 344 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-235-246

Sum of short exponential sums with prime numbers

F. Z. Rakhmonov

Rakhmonov Firuz Zarulloevich — candidate of physical and mathematical sciences, A. Juraev Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Tajikistan (Dushanbe).
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Abstract

For sufficiently large integers K, x, y, q, subject to $K \leqslant y < x$, n — fixed natural number, α — real, $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$, $(a,q)=1$, $q \geqslant 1$, an estimate of the form

$$\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{x-y<p\leqslant x} e(\alpha k p^n)\right| \ll Ky\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{y}+\frac{q}{Ky^n}+\frac{1}{K^{2^{n-1}}}\right)^{2^{-n-1}} \mathscr{L}^{\frac{n^2}{2^{n+1}}},$$

which is a strengthening and generalization of I. M. Vinogradov's theorem on the distribution of fractional parts of $\{\alpha p\}$.

Keywords: Short exponential sum of G. Weyl with prime numbers, uniform distribution modulo unity, non-trivial estimate, fractional part.

Bibliography: 21 titles.

For citation:
Rakhmonov, F. Z. 2025, "Sum of short exponential sums with prime numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 235–246.

1. Введение

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одной из проблем является распределение дробных частей $\{\alpha p\}$. В этом вопросе И. М. Виноградов [1, 2] получает оценку тригонометрической суммы значительно более точную, чем в общем случае: *пусть K и x — достаточно большие целые числа, $K \leqslant x$, α — вещественное,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \qquad (a,q)=1, \quad q \geqslant 1, \qquad |\theta| \leqslant 1, \tag{1}$$

тогда при $q \leqslant x$, будем иметь

$$V_1(K,x) = \sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{p\leqslant x} e(\alpha k p)\right| \ll Kx^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}} + x^{-0,2}\right).$$

Отсюда следует утверждение: *при любом σ с условием $0 < \sigma \leqslant 1$, число $F_\alpha(x,\sigma)$ значений $\{\alpha p\}$, $p \leqslant x$, подчиненных условию $\{\alpha p\} < \sigma$, выразится формулой*

$$F_\alpha(x,\sigma) = \sigma\pi(x) + R_\sigma(x), \quad R_\sigma(x) \ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}} + x^{-0,2}\right).$$

В частности, если α — иррациональное число с ограниченными неполными частными, то можно выбрать q таким, чтобы оно было порядка $\sqrt{x}$. В этом случае в проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины, то есть *для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количества членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y < p \leqslant x$ и $\{\alpha p\} < \sigma$, имея в виду, что $F_\alpha(x,y,\sigma) = F_\alpha(x,\sigma) - F_\alpha(x-y,\sigma)$, справедлива асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x,y,\sigma) = \sigma(\pi(x) - \pi(x-y)) + O\left(x^{\frac{4}{5}+\varepsilon}\right),$$

являющаяся нетривиальной при $y \gg x^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$.

Методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова [1, 2], в сочетании с методами работ [3, 4] в работах [5, 6] доказано: *пусть K, x, y и q – достаточно большие целые числа, $K \leqslant y$, A — абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln x$, α — вещественное число и имеет вид (1). Тогда при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ и $\mathscr{L}^{4A+20} \leqslant q \leqslant Ky^2x^{-1}\mathscr{L}^{-4A-20}$ справедлива оценка*

$$V_1(K,x,y) = \sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{x-y<p\leqslant x} e(\alpha kp)\right| \ll \frac{Ky}{\mathscr{L}^A}.$$

При $n \geqslant 2$ вопрос о распределении дробных частей $\{\alpha p^n\}$, аргумент которого пробегает простые числа p из короткого интервала $[x-y,x]$, оставался открытым.

Основным результатом этой работы является теорема 1 об оценке сумм модулей коротких тригонометрических сумм с простыми числами.

Теорема 1. *Пусть K, x, y, q – достаточно большие целые числа, $K \leqslant y < x$, n — фиксированное натурально число, α — вещественное число,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \qquad (a,q)=1, \quad q \geqslant 1, \qquad |\theta| \leqslant 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$V_n(K,x,y) = \sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{x-y<p\leqslant x} e(\alpha kp^n)\right| \ll Ky\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q}{Ky^n} + \frac{1}{K^{2^{n-1}}}\right)^{2^{-n-1}} \mathscr{L}^{\frac{n^2}{2^{n+1}}}.$$

Доказательство теоремы 1 проводится методом Г. Вейля в соединении с идеями работ [7, 8, 9, 10, 11]. В этих работах при выводе асимптотической формулы в обобщении проблем Варинга и Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми теорема Хуа Ло-Кена ([12], лемма 2.5) о среднем значении тригонометрической суммы

$$T(\alpha,x) = \sum_{m\leqslant x} e(\alpha m^n)$$

обобщается для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида

$$T(\alpha;x,y) = \sum_{x-y<m\leqslant x} e(\alpha m^n),$$

и получена нетривиальная оценка сумм $T(\alpha;x,y)$ в малых дугах. (см. также [13, 14, 15, 16]).

Теперь определим область значений параметров K, q и y при которых полученная оценка в теореме 1 является нетривиальной.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и пусть*

$$K \gg \mathscr{L}^{4A+\frac{n^2}{2^{n-1}}}, \qquad \mathscr{L}^{2^{n+1}A+n^2} \ll q \ll Ky^2\mathscr{L}^{-2^{n+1}A-n^2}, \qquad y \gg \mathscr{L}^{2^{n+1}A+n^2},$$

где $A \geqslant 2$ — абсолютная фиксированная постоянная. Тогда справедлива оценка

$$V_n(K,x,y) \ll Ky\mathscr{L}^{-A}.$$

Из следствия 1 модифицированным методом «стаканчиков И. М. Виноградова», который разработали Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков [17, 18], следует утверждение.

Следствие 2. *Пусть x — достаточно большое целое число, $A \geqslant 2$ — абсолютная фиксированная постоянная, α — вещественное число,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1, \qquad \mathscr{L}^{2^{n+1}(A+2)+n^2} \ll q \ll y^3 \mathscr{L}^{-2^{n+1}(A+2)-n^2}.$$

Тогда при $y \gg \mathscr{L}^{2^{n+1}A+n^2}$ для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ — количества членов последовательности $\{\alpha p^n\}$, таких, что $x-y<p\leqslant x$ и $\{\alpha p^n\}<\sigma$, имеет место асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\sigma) = \sigma(\pi(x)-\pi(x-y)) + O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right),$$

где $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих числа x.

Из следствия 2 для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ — количества членов последовательности $\{\alpha p^n\}$, таких, что $x-y<p\leqslant x$ и $\mu\leqslant\{\alpha p^n\}<\nu$, причём $0\leqslant\mu<\nu\leqslant 1$, воспользовавшись соотношением

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu) = F_\alpha(x,y,\nu) - F_\alpha(x,y,\mu),$$

получим следующее утверждение:

Следствие 3. *Пусть x — достаточно большое целое число, $A \geqslant 2$ — абсолютная фиксированная постоянная, α — вещественное число,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1, \qquad \mathscr{L}^{2^{n+1}(A+2)+n^2} \ll q \ll y^3 \mathscr{L}^{-2^{n+1}(A+2)-n^2}.$$

Тогда при $y \gg \mathscr{L}^{2^{n+1}A+n^2}$ для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ — количества членов последовательности $\{\alpha p^n\}$, таких, что $x-y<p\leqslant x$ и $\mu\leqslant\{\alpha p\}<\nu$, причём $0\leqslant\mu<\nu\leqslant 1$, имеет место асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu) = (\nu-\mu)(\pi(x)-\pi(x-y)) + O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right).$$

Из следствия 3 для отклонения

$$D_\alpha(x,y) = \sup_{0\leqslant\mu<\nu\leqslant 1}\left|\frac{F_\alpha(x,y,\mu,\nu)}{\pi(x-y)-\pi(x)} - (\nu-\mu)\right|$$

членов последовательности $\{\alpha p^n\}$, таких, что $x-y<p\leqslant x$, получаем следующее утверждение:

Следствие 4. *Пусть x — достаточно большое целое число, $A \geqslant 2$ — абсолютная фиксированная постоянная, α — вещественное число,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1, \qquad \mathscr{L}^{2^{n+1}(A+2)+n^2} \ll q \ll y^3 \mathscr{L}^{-2^{n+1}(A+2)-n^2}.$$

Тогда при $y \gg \mathscr{L}^{2^{n+1}A+n^2}$ для отклонения $D_\alpha(x,y)$ членов последовательности $\{\alpha p^n\}$, таких, что $x-y<p\leqslant x$, справедлива следующая оценка

$$D_\alpha(x,y) \ll \frac{y\mathscr{L}^{-A}}{\pi(x)-\pi(x-y)}.$$

Из следствия 4 и теоремы Хис-Брауна [21] о правильном порядке количества простых чисел в интервале малой длины $(x-y,x]$ при $y\geqslant x^{\frac{7}{12}}$ получаем следующий критерий равномерной распределённости по модулю, равному единице, для последовательности $\{\alpha p^n\}$ при условии, что аргумент p принимает значения из интервала малой длины $(x-y,x]$.

Следствие 5. *Пусть x — достаточно большое целое число, $A \geqslant 2$ — абсолютная фиксированная постоянная, α — вещественное число,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1, \qquad \mathscr{L}^{2^{n+1}(A+2)+n^2} \ll q \ll y^3 \mathscr{L}^{-2^{n+1}(A+2)-n^2}.$$

Тогда последовательность $\{\alpha p^n\}$, где $x-y<p\leq x$, при $y\gg x^{\frac{7}{12}}$ является равномерно распределённой по модулю, равному единице.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть Δ_j означает j-ое применение разностного оператора, так что для произвольного многочлена $f(u) = a_s u^s + \ldots + a_1 u$ имеем*

$$\Delta_1(f(u);h) = f(u+h) - f(u), \quad \Delta_{j+1}(f(u);h_1,\ldots,h_{j+1}) = \Delta_1(\Delta_j(f(u);h_1,\ldots,h_j);h_{j+1}). \quad (2)$$

Тогда при $j = 1,\ldots,s-1$ имеет место соотношение

$$\Delta_j(f(u);h_1,\ldots,h_j) = h_1 h_2 \ldots h_j \sum_{i_0=0}^{s-j} a_{s-i_0} \sum_{i_1=0}^{s-j-i_0} C_{s-i_0}^{i_1+1} \sum_{i_2=0}^{s-j-i_0-i_1} C_{s-1-i_0-i_1}^{i_2+1} \ldots \times$$
$$\times \sum_{i_j=0}^{s-j-i_0-i_1-\ldots-i_{j-1}} C_{s-j+1-i_0-i_1-\ldots-i_{j-1}}^{i_j+1} h_1^{i_1} h_2^{i_2} \ldots h_j^{i_j} u^{s-j-i_0-i_1-\ldots-i_j}.$$

Доказательство. Для удобства и симметричности будем пользоваться тождеством

$$(u+h)^r - u^r = h \sum_{i=0}^{r-1} C_r^{i+1} h^i u^{r-1-i}. \quad (3)$$

Найдем $\Delta_1(f(u);h_1)$. Для этого применяя формулу (2), затем при $r = s - i_0$ формулу (3), имеем

$$\Delta_1(f(u);h_1) = \sum_{i_0=0}^{s-1} a_{s-i_0}((u+h_1)^{s-i_0} - u^{s-i_0}) = h_1 \sum_{i_0=0}^{s-1} a_{s-i_0} \sum_{i_1=0}^{s-1-i_0} C_{s-i_0}^{i_1+1} h_1^{i_1} u^{s-1-i_0-i_1}.$$

Воспользовавшись формулой (2) при $r = s - 1 - i_0 - i_1$, найдем $\Delta_2(f(u);h_1,h_2)$:

$$\Delta_2((f(u);h_1,h_2) = \Delta_1\left(\Delta_1((f(u);h_1);h_2\right) = \Delta_1\left(h_1 \sum_{i_0=0}^{s-1} a_{s-i_0} \sum_{i_1=0}^{s-1-i_0} C_{s-i_0}^{i_1+1} h_1^{i_1} u^{s-1-i_0-i_1}; h_2\right) =$$
$$= h_1 \sum_{i_0=0}^{s-1} a_{s-i_0} \sum_{i_1=0}^{s-1-i_0} C_{s-i_0}^{i_1+1} h_1^{i_1} \left((u+h_2)^{s-1-i_0-i_1} - u^{s-1-i_0-i_1}\right) =$$
$$= h_1 h_2 \sum_{i_0=0}^{s-1} a_{s-i_0} \sum_{i_1=0}^{s-1-i_0} C_{s-i_0}^{i_1+1} \sum_{i_2=0}^{s-2-i_0-i_1} C_{s-1-i_0-i_1}^{i_2+1} h_1^{i_1} h_2^{i_2} u^{s-2-i_0-i_1-i_2}.$$

Из верхней границы суммы по i_2 следует, что $i_0 + i_1 + i_2 \leqslant s - 2$. Отсюда в свою очередь следует, что $i_1 \leqslant s - 2 - i_0$ и $i_0 \leqslant s - 2$, поэтому правая часть последнего равенства принимает вид

$$\Delta_2((f(u);h_1,h_2) = h_1 h_2 \sum_{i_0=0}^{s-2} a_{s-i_0} \sum_{i_1=0}^{s-2-i_0} C_{s-i_0}^{i_1+1} \sum_{i_2=0}^{s-2-i_0-i_1} C_{s-1-i_0-i_1}^{i_2+1} h_1^{i_1} h_2^{i_2} u^{s-2-i_0-i_1-i_2}.$$

Предпологая, что утверждение леммы имеет место при $j \leqslant s - 2$, докажем её при $j + 1$. Воспользовавшись соотношением (2), затем при $r = s - j - i_0 - i_1 - \ldots - i_j$ формулой (3), имеем

$$\Delta_{j+1}(f(u);h_1,\ldots,h_{j+1})=\Delta_1\left(\Delta_j(f(u);h_1,\ldots,h_j),h_{j+1}\right)=$$
$$=\Delta_1\left(h_1h_2\ldots h_j\sum_{i_0=0}^{s-j}a_{s-i_0}\sum_{i_1=0}^{s-j-i_0}C_{s-i_0}^{i_1+1}\sum_{i_2=0}^{s-j-i_0-i_1}C_{s-1-i_0-i_1}^{i_2+1}\ldots\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{i_j=0}^{s-j-i_0-i_1-\ldots-i_{j-1}}C_{s-j+1-i_0-i_1-\ldots-i_{j-1}}^{i_j+1}h_1^{i_1}h_2^{i_2}\ldots h_j^{i_j}u^{s-j-i_0-i_1-\ldots-i_j};\ h_{j+1}\right)=$$
$$=h_1h_2\ldots h_j\sum_{i_0=0}^{s-j}a_{s-i_0}\sum_{i_1=0}^{s-j-i_0}C_{s-i_0}^{i_1+1}\sum_{i_2=0}^{s-j-i_0-i_1}C_{s-1-i_0-i_1}^{i_2+1}\ldots\sum_{i_j=0}^{s-j-i_0-i_1-\ldots-i_{j-1}}\times$$
$$\times C_{s-j+1-i_0-i_1-\ldots-i_{j-1}}^{i_j+1}h_1^{i_1}h_2^{i_2}\ldots h_j^{i_j}\left((u+h_{j+1})^{s-j-i_0-i_1-\ldots-i_j}-u^{s-j-i_0-i_1-\ldots-i_j}\right)=$$

$$=h_1\ldots h_{j+1}\sum_{i_0=0}^{s-j}a_{s-i_0}\sum_{i_1=0}^{s-j-i_0}C_{s-i_0}^{i_1+1}\sum_{i_2=0}^{s-j-i_0-i_1}C_{s-1-i_0-i_1}^{i_2+1}\ldots\sum_{i_j=0}^{s-j-i_0-i_1-\ldots-i_{j-1}}C_{s-j+1-i_0-i_1-\ldots-i_{j-1}}^{i_j+1}\times$$
$$\times\sum_{i_{j+1}=0}^{s-j-1-i_0-i_1-\ldots-i_j}C_{s-j-1-i_0-i_1-\ldots-i_j}^{i_{j+1}+1}h_1^{i_1}h_2^{i_2}\ldots h_{j+1}^{i_{j+1}}u^{s-j-1-i_0-i_1-\ldots-i_{j+1}}.$$

Будем рассуждать как в случае $\Delta_2((f(u);h_1,h_2)$. Из верхней границы суммы по i_{j+1} следует, что

$$i_0+i_1+\ldots+i_j+i_{j+1}\leqslant s-j-1,$$

Отсюда в свою очередь следует, что

$$i_j\leqslant s-j-1-i_0-i_1-\ldots-i_{j-1},\qquad i_1\leqslant s-j-1-i_0,\qquad i_0\leqslant s-j-1.$$

Поэтому правая часть последнее равенство принимает вид

$$\Delta_{j+1}(f(u);h_1,\ldots,h_{j+1})=h_1\ldots h_{j+1}\sum_{i_0=0}^{s-j-1}a_{s-i_0}\sum_{i_1=0}^{s-j-1-i_0}C_{s-i_0}^{i_1+1}\sum_{i_2=0}^{s-j-i_0-i_1}C_{s-1-i_0-i_1}^{i_2+1}\ldots\times$$
$$\times\sum_{i_{j+1}=0}^{s-j-1-i_0-i_1-\ldots-i_j}C_{s-j-1-i_0-i_1-\ldots-i_j}^{i_{j+1}+1}h_1^{i_1}h_2^{i_2}\ldots h_{j+1}^{i_{j+1}}u^{s-j-1-i_0-i_1-\ldots-i_{j+1}}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. ([8]. *Пусть $f(u)$ – многочлен степени s, x и y — целые положительные числа, $y<x$. Тогда при $j=1,\ldots,s-1$ имеет место*

$$\left|\sum_{x-y<u\leqslant x}e(f(u))\right|^{2^j}\leq(2y)^{2^j-j-1}\sum_{|h_1|<y}\cdots\sum_{|h_j|<y}\left|\sum_{u\in I_j(x,y;h_1,\ldots,h_j)}e(\Delta_j(f(u);h_1,\ldots,h_j))\right|,$$

где интервалы $I_j(x,y;h_1,\ldots,h_j)$ определяются соотношениями:

$$I_1(x,y;h_1)=(x-y,x]\cap(x-y-h_1,x-h_1],$$
$$I_j(x,y;h_1,\ldots,h_j)=I_{j-1}(x,y;h_1,\ldots,h_{j-1})\cap I_{j-1}(x-h_j,y;h_1,\ldots,h_{j-1}),$$

то есть $I_{j-1}(x-h_j,y;h_1,\ldots,h_{j-1})$ получается из $I_{j-1}(x,y;h_1,\ldots,h_{j-1})$ сдвигом на $-h_j$ всех интервалов, пересечением которых он является.

Лемма 3. [19]. *При $x \geqslant 1$, $r \geqslant 2$ и $k \geqslant 1$ имеем*

$$\sum_{h\leqslant x}\tau_r^k(h) \ll \frac{xr^k}{(r!)^{\frac{r^k-1}{r-1}}}\left(\ln x + r^k - 1\right)^{r^k-1}.$$

Лемма 4. [20]. *Пусть α – вещественное число,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q)=1,$$

$x \geqslant 1$, $y > 0$ и β — любое, тогда справедлива оценка

$$\sum_{h\leqslant x}\min\left(y,\ \frac{1}{\|\alpha n+\beta\|}\right) \leqslant 6\left(\frac{x}{q}+1\right)(y+q\ln q).$$

3. Доказательство теоремы 1.

Применяя неравенство Коши, делая сумму по k внутренней, разбивая сумму по p_1 и p_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $p_1 < p_2$, $p_1 = p_2$, $p_1 > p_2$, и оценивая сумму с условием $p_1 = p_2$ величиной $\ll K^2y$, а также имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $p_1 < p_2$ и $p_1 > p_2$ равны, получим

$$\begin{aligned} V_n^2(K,x,y) &\leqslant K\sum_{k=1}^{K}\sum_{x-y<p_1,p_2\leqslant x} e(\alpha k(p_1^n - p_2^n)) \leqslant \\ &\leqslant K^2y + 2K\sum_{x-y<p_1<x}\ \sum_{x-y<p_2<p_1}\left|\sum_{k=1}^{K} e(k(p_1^n-p_2^n))\right|. \end{aligned}$$

В правой части последней суммы суммирование по простым числам p_1 и p_2 заменим на суммирование по натуральным числам m_1 и m_2, и, воспользовавшись тем, что неравенства $x-y<m_2<m_1$ и $0<m_1-m_2<m_1-x+y$ равносильны, а затем, вводя обозначение $m_2 = m_1 - m$, а также имея в виду, что

$$\begin{aligned} &m_1^n - m_2^n = m_1^n - (m_1-m)^n = mf(m_1), \\ &f(m_1) = a_{n-1}m_1^{n-1} + \ldots + a_1m_1, \qquad a_{n-i} = (-1)^{i-1}C_n^i m^{i-1}, \end{aligned} \tag{4}$$

(то есть $f(m_1)$ — многочлен степени $n-1$ относительно m_1) последовательно найдем

$$\begin{aligned} V_K^2(x,y) &\leqslant K^2y + 2K\sum_{x-y<m_1<x}\ \sum_{x-y<m_2<m_1}\left|\sum_{k=1}^{K} e(\alpha k(m_1^n - m_2^n))\right| = \\ &= K^2y + K\sum_{x-y<m_1<x}\ \sum_{0<m_1-m_2<m_1-x+y}\left|\sum_{k=1}^{K} e(\alpha k(m_1^n - m_2^n))\right| = \\ &= K^2y + K\sum_{x-y<m_1<x}\ \sum_{0<m<m_1-x+y}\left|\sum_{k=1}^{K} e(\alpha kmf(m_1))\right| = \\ &= K^2y + KW_1, \quad W_1 = \sum_{0<m<y}\ \sum_{x-y+m<m_1<x}\left|\sum_{k=1}^{K} e(\alpha kmf(m_1))\right|. \end{aligned} \tag{5}$$

Возводя W_1 в квадрат и дважды применяя неравенство Коши, имеем

$$W_1^2 \leqslant y^2 \sum_{0<m<y} \sum_{x-y+m<u<x} \left| \sum_{k=1}^{K} e(\alpha kmf(u)) \right|^2 =$$

$$= y^2 \sum_{0<m<y} \sum_{x-y+m<u<x} \sum_{k_1=1}^{K} \sum_{k_2=1}^{K} e(\alpha(k_1-k_2)mf(u)),$$

Разбивая сумму по k_1 и k_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $k_1<k_2$, $k_1=k_2$, $k_1>k_2$, и оценивая сумму с условием $k_1=k_2$ величиной $\ll y^4K$, а также имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $k_1<k_2$ и $k_1>k_2$ равны, получим

$$W_1^2 \ll y^4K + y^2W_2, \qquad W_2 = \sum_{0<m<y} \sum_{x-y+m<u<x} \sum_{2\leqslant k_1\leqslant K} \sum_{1\leqslant k_2<k_1} e(\alpha(k_1-k_2)mf(u)). \qquad (6)$$

Воспользовавшись тем, что неравенства $1\leqslant k_2<k_1$ и $1\leqslant k_1-k_2\leqslant k_1-1$ равносильны, вводя обозначение $k=k_1-k_2$ и делая сумму по u внутренней, а затем переходя к оценкам, последовательно найдем

$$W_2 = \sum_{0<m<y} \sum_{x-y+m<u<x} \sum_{2\leqslant k_1\leqslant K} \sum_{1\leqslant k_1-k_2\leqslant k_1-1} e(\alpha(k_1-k_2)mf(u)) =$$

$$= \sum_{0<m<y} \sum_{x-y+m<u<x} \sum_{2\leqslant k_1\leqslant K} \sum_{1\leqslant k\leqslant k_1-1} e(\alpha kmf(u)) =$$

$$= \sum_{0<m<y} \sum_{2\leqslant k_1\leqslant K} \sum_{1\leqslant k\leqslant k_1-1} \sum_{x-y+m<u<x} e(\alpha kmf(u)) \leqslant$$

$$\leqslant K \sum_{0<m<y} \sum_{k\leqslant K} \left| \sum_{x-y+m<u<x} e(\alpha kmf(u)) \right|.$$

Возводя обе части последнего неравенства в степень 2^{n-2} и два раза применяя неравенство Коши, а затем применяя к внутренней сумме по u при $s=n-1$ и $j=n-2$ лемму 2, имеем

$$W_2^{2^{n-2}} \leqslant K^{2^{n-1}-1} y^{2^{n-2}-1} \sum_{m<y} \sum_{k\leqslant K} \left| \sum_{x-y+m<u<x} e(\alpha kmf(u)) \right|^{2^{n-2}} \ll K^{2^{n-1}-1} y^{2^{n-1}-n} \cdot W_3$$

$$W_3 = \sum_{k\leqslant K} \sum_{m<y} \sum_{|h_1|<y-m} \cdots \sum_{|h_{n-2}|<y-m} \left| \sum_{u\in I_{n-2}(x,y-m;h_1,\ldots,h_{n-2})} e(\Delta_{n-2}(\alpha kmf(u);h_1,\ldots,h_{n-2})) \right|. \qquad (7)$$

Воспользовавшись линейным свойством разностного оператора, а затем леммой 1 при $s=n-1$ и $j=n-2$, имеем

$$\Delta_{n-2}(\alpha kmf(u);h_1,\ldots,h_{n-2})) = \alpha km\Delta_{n-2}(f(u);h_1,\ldots,h_{n-2})) =$$

$$= \alpha kmh_1h_2\ldots h_{n-2} \sum_{i_0=0}^{1} a_{n-1-i_0} \sum_{i_1=0}^{1-i_0} C_{n-1-i_0}^{i_1+1} \sum_{i_2=0}^{1-i_0-i_1} C_{n-2-i_0-i_1}^{i_2+1} \ldots \times$$

$$\times \sum_{i_{n-2}=0}^{1-i_0-i_1-\ldots-i_{n-3}} C_{2-i_0-i_1-\ldots-i_{n-3}}^{i_{n-2}+1} h_1^{i_1}h_2^{i_2}\ldots h_{n-2}^{i_{n-2}} u^{1-i_0-i_1-\ldots-i_{n-2}}.$$

Кратная сумма по переменным суммирования $i_0,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{n-2}$ в правой части последней формулы является линейным многочленом относительно u и $h_1,\ldots,h_{n-2}$. В этой сумме только одно слагаемое является линейным одночленом относительно u, который появляется тогда, когда все переменные суммирования $i_0,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{n-2}$ равны нулю, все остальные слагаемые образуют линейный многочлен относительно $h_1,\ \ldots,\ h_{n-2}$ с целыми коэффициентами зависящими от параметра n, который обозначим через $g(h_1,\ldots,h_{n-2})$. Выделяя линейный одночлен относительно u, а также воспользовавшись явным значением старшего коэффициента $a_{n-1}=n-1$ многочлена $f(u)$ из соотношения (4), имеем

$$\begin{aligned}&\Delta_{n-2}(\alpha kmf(u);h_1,\ldots,h_{n-2}))=\\&\qquad=\alpha kmh_1h_2\ldots h_{n-2}\left(a_{n-1}\;C_{n-1}^1C_{n-2}^1\ldots C_2^1u+g(h_1,\ldots,h_{n-2})\right)=\\&\qquad=\alpha(n-1)!kmh_1h_2\ldots h_{n-2}u+\alpha kmh_1h_2\ldots h_{n-2}g(h_1,\ldots,h_{n-2})\end{aligned}$$

Подставляя правую часть полученного равенства в (7), найдем

$$W_3=\sum_{k\leqslant K}\sum_{m<y}\sum_{|h_1|<y-m}\cdots\sum_{|h_{n-2}|<y-m}\left|\sum_{u\in I_{n-2}(x,y-m;h_1,\ldots,h_{n-2})}e\left(\alpha(n-1)!kmh_1h_2\ldots h_{n-2}u\right)\right|,$$

В последней сумме по u количество членов для которых выполняется соотношение $h_1\cdots h_{n-2}=$ $=0$ не превосходит величины $Ky\cdot(n-2)y(2y)^{n-3}$. Следовательно

$$W_3\ll 2^{n-2}W_4+(n-2)Ky^2(2y)^{n-3}, \tag{8}$$

$$W_4=\sum_{k\leqslant K}\sum_{m<y}\sum_{1\leqslant h_1<y-m}\cdots\sum_{1\leqslant h_{n-2}<y-m}\left|\sum_{u\in I_{n-1}(x,y-m;h_1,\ldots,h_{n-1})}e\left(\alpha(n-1)!kmh_1h_2\ldots h_{n-2}u\right)\right|.$$

Внутренняя сумма по u является линейным и из определения интервала $I_{n-1}(x,y-m;h_1,\ldots,h_{n-1})$ в лемме 2 следует, что

$$|I_{n-1}(x,y-m;h_1,\ldots,h_{n-1})|\leqslant y-m.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}W_4&\leqslant\sum_{k\leqslant K}\sum_{m<y}\sum_{1\leqslant h_1<y-m}\cdots\sum_{1\leqslant h_{n-2}<y-m}\min\left(y-m,\ \frac{1}{2\|\alpha(n-1)!kmh_1h_2\ldots h_{n-2}\|}\right)\leqslant\\&\leqslant\sum_{h\leqslant(n-1)!Ky^{n-1}}\tau_n(h)\min\left(y,\ \frac{1}{2\|\alpha h\|}\right).\end{aligned}$$

Применяя к последней сумме неравенство Коши, а затем леммы 3 и 4, находим

$$\begin{aligned}W_4^2&\leqslant y\sum_{h\leqslant(n-1)!Ky^{n-1}}\tau_n^2(h)\sum_{h\leqslant(n-1)!Ky^{n-1}}\min\left(y,\ \frac{1}{2\|\alpha h\|}\right)\ll\\&\ll(n-1)!Ky^n\mathscr{L}^{n^2-1}\left(\frac{(n-1)!Ky^{n-1}}{q}+1\right)(y+q\ln q)\ll\\&\ll K^2y^{2n}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{Ky^{n-1}}\right)\left(1+\frac{q}{y}\right)\mathscr{L}^{n^2}\ll\\&\ll K^2y^{2n}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{Ky^{n-1}}+\frac{1}{y}+\frac{q}{Ky^n}\right)\mathscr{L}^{n^2}.\end{aligned}$$

Воспользовавшись формулами (8), (6) и (5) сумму $V_K(x,y)$ выражаем через сумму W_4, а затем подставляя полученную оценку для W_4^2, получим

$$
\begin{aligned}
V_K^{2^{n+1}}(x,y) &\ll K^{2^{n+1}}y^{2^{n+1}}\left(\frac{1}{y^{2^n}}+\frac{1}{K^{2^{n-1}}}+\frac{1}{y^2}+\frac{W_4^2}{K^2y^{2n}}\right)\ll\\
&\ll K^{2^{n+1}}y^{2^{n+1}}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{Ky^{n-1}}+\frac{1}{y}+\frac{q}{Ky^n}+\frac{1}{K^{2^{n-1}}}\right)\mathscr{L}^{n^2}\ll\\
&\ll K^{2^{n+1}}y^{2^{n+1}}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{y}+\frac{q}{Ky^n}+\frac{1}{K^{2^{n-1}}}\right)\mathscr{L}^{n^2}.
\end{aligned}
$$

Извлекая корень степени 2^{n+1}, получим утверждение теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Избранные труды — М: Изд-во АН СССР, 1952 г.

2. Виноградов И. М., Карацуба А. А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 77. С. 4 – 30.

3. Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57, № 4. С. 55 – 71.

4. Рахмонов Ф З. Оценка квадратичных тригонометрических с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. № 3. С. 56 – 60.

5. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459, № 2. С. 156 – 157.

6. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З., Исматов С.Н. // Оценка сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами //Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 12. С. 937 – 945.

7. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. № 2(93). С. 139-168.

8. Рахмонов Ф З. Асимптотическая формула в обобщении тернарной проблемы Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. № 4(95). С. 120–137.

9. Рахмонов Ф З. Оценка коротких тригонометрических сумм Г. Вейля в малых дугах // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2024. Т. 67. № 5-6. С. 238-242.

10. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Проблема Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2023. Т. 66. № 9-10. С. 481-488.

11. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2024. Т. 67. № 3-4. С. 125-136.

12. Вон Р. Метод Харди–Литтлвуда — Москва: Мир, 1985.

13. Рахмонов Ф.З. Оценка тригонометрических сумм с простыми числами // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. В. 1. С. 158–171.

14. Рахмонов Ф.З. Оценка квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2011. № 3. С. 56–60.

15. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Короткие кубические суммы простыми числами // Труды Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук. 2016. Т. 296. С. 220-242.

16. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф З. Тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 4. С. 281-305.

17. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Три теоремы о тригонометрических суммах из анализа // Доклады Российской Академии наук. 1994. Т. 335. № 4. С. 407–408.

18. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу // Москва: Дрофа. 2004. 635с.

19. Марджанишвили К.К. Оценка одной арифметической суммы // ДАН СССР. 1939. Т. 22. № 7. С. 391-393.

20. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — М.: Наука, 1983, 2-ое изд.

21. Heath-Brown D. R. The number of primes in a short interval // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1988. V. 389. P. 22-63.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M., 1952, *Izbrannye trudy. (Russian) [Selected works.]*, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow.

2. Vinogradov, I. M., & Karatsuba, A. A., 1986, “The method of trigonometric sums in number theory”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 168, pp. 3-30.

3. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, “Theorem on the mean value of $\psi(x,\chi)$ and its applications”, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 43, Is. 1, pp. 49 – 64.

4. Rahmonov, F. Z., 2011, “Estimate of quadratic trigonometric sums with prime numbers”, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, no. 3, pp. 56 – 60.

5. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2014, “Sum of short exponential sums over prime numbers”, *Doklady Mathematics*, vol. 90, No 3, pp. 699–700.

6. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., Ismatov S. N., 2013, “Estimate of sums of short exponential sums over prime numbers”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tadzhikistan*, vol. 56, no 12, pp. 937-945, (in Russian).

7. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2024, “Asymptotic formula in the Waring’s problem with almost proportional summands”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, Is. 2, pp. 138–168, (in Russian).

8. Rakhmonov, F. Z., 2024, “Asymptotic formula in generalization of ternary Esterman problem with almost proportional summands”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, Is. 4, pp. 120–137, (in Russian).

9. Rakhmonov, F. Z., 2024, "Estimate of short G.Weyl exponential sums on minor arcs", *Doklady Natsional'noy akademii nauk Tadzhikistana*, vol. 67, Is 5-6, pp. 238-242.

10. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2023, "Waring's problem with almost proportional summands", *Doklady Natsional'noy akademii nauk Tadzhikistana*, vol 66, Is 9-10, pp. 481-488.

11. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2024, "Asymptotic formula in the Waring's problem with almost proportional summands", *Doklady Natsional'noy akademii nauk Tadzhikistana*, vol 67, Is 3-4, pp. 125-136.

12. Vaughan R. C., 1981. *The Hardy-Littlewood method*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 80, Cambridge University Press, Cambridge, 172 p.

13. Rakhmonov, F. Z., 2011, "Estimation of trigonometric sums with prime numbers", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 12, Is. 1, pp. 158–171, (in Russian).

14. Rakhmonov, F. Z., 2011, "Estimate of quadratic trigonometric sums with prime numbers", *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, Is. 3, pp. 56–60.

15. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2017, "Short Cubic Exponential Sums over Primes", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, pp. 211–233.

16. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2019, "Short cubic exponential sums with Möbius function", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, Is. 4, pp. 281–305, (in Russian).

17. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., 1994, "Three theorems in the analysis of trigonometric sums", *Doklady Mathematics*, vol. 49, No 2, pp. 326–327.

18. Arkhipov G. I.,& Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N., 1999, *Lectures on mathematical analysis.: Textbook for universities and pedagogical universities*, / Ed. V. A. Sadovnichii – Moscow: Higher School — 695 p.

19. Mardjhanashvili, K. K., 1939, "An estimate for an arithmetic sum", *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 22, no 7, pp. 391–393.

20. Karatsuba A. A., 1993, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, xiv+222 pp.

21. Heath-Brown D. R., 1988, "The number of primes in a short interval", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 389, pp 22-63.

Получено: 07.04.2025
Принято в печать: 27.08.2025