

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 3.

УДК 511.32

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-220-234

Короткие квадратичные тригонометрические суммы с простыми числами в больших дугах

З. Х. Рахмонов, Р. Л. Хотамова, М. С. Шарифзода

Рахмонов Зарулло Хусенович — доктор физико-математических наук, академик НАН Таджикистана, Таджикский национальный университет (г. Душанбе).

e-mail: zarullo-r@rambler.ru, zarullo.rakhmotov@gmail.com

Хотамова Рахбарой Латифовна — научный сотрудник, Институт математики им. А. Джуроева НАН Таджикистана (г. Душанбе).

e-mail: hotamovarahbaroi@mail.ru

Шарифзода Машрафи Сулаймон — научный сотрудник, Институт математики им. А. Джуроева НАН Таджикистана (г. Душанбе).

e-mail: mashrab.sharifzoda.92@mail.ru

Аннотация

Воспользовавшись вторым моментом L -функций Дирихле на критической прямой в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathcal{L}^b)$, $\tau = y^3 x^{-1} \mathcal{L}^{-b_1}$, за исключением малой окрестности центров этих дуг $|\alpha - \frac{a}{q}| > (8\pi y^2)^{-1}$ при $y \geq x^{1 - \frac{1}{9-4\sqrt{2}}} \mathcal{L}^{c_2}$, $c_2 = \frac{2A+24+(\sqrt{2}-1)b_1}{2\sqrt{2}-1}$, получена оценка:

$$S_2(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^2) \ll y \mathcal{L}^{-A},$$

а в малой окрестности $|\alpha - \frac{a}{q}| \leq (8\pi y^2)^{-1}$ центра больших дуг $\mathfrak{M}(\mathcal{L}^b)$ для $S_2(\alpha; x, y)$ при $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1,5A+0,25b+18}$ получена асимптотическая формула с остаточным членом, где A, b_1, b — произвольные фиксированные положительные числа, $\mathcal{L} = \ln xq$.

Ключевые слова: короткая тригонометрическая сумма с простыми числами, большие дуги, плотностная теорема, L -функция Дирихле

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:

Рахмонов, З. Х., Хотамова, Р. Л., Шарифзода, М. С. Короткие квадратичные тригонометрические суммы с простыми числами в больших дугах // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 3, с. 220–234.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 3.

UDC 511.32

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-220-234

Short quadratic exponential sums with primes in major arcs

Z. Kh. Rakhmonov, R. L. Hotamova, M. S. Sharifzoda

Rakhmonov Zarullo Khusenovich — doctor of physical and mathematical sciences, Academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, Tajik National University (Dushanbe).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru, zarullo.rakhmomov@gmail.com

Khotamova Rakhbaroy Latifovna — research associate, A. Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan (Dushanbe).
e-mail: hotamovarahbaroi@mail.ru

Sharifzoda Mashrafi Sulaimon — research associate, A. Dzhuraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan (Dushanbe).
e-mail: mashrab.sharifzoda.92@mail.ru

Abstract

Using the second moment of Dirichlet L -functions on the critical line over the major arcs $\mathfrak{M}(\mathcal{L}^b)$, with $\tau = y^3 x^{-1} \mathcal{L}^{-b_1}$, and excluding a small neighborhood of the centers of these arcs, i.e., those α satisfying $|\alpha - \frac{a}{q}| > (8\pi y^2)^{-1}$, for $y \geq x^{1 - \frac{1}{9-4\sqrt{2}}} \mathcal{L}^{c_2}$, where $c_2 = \frac{2A+24+(\sqrt{2}-1)b_1}{2\sqrt{2}-1}$, we obtain the estimate

$$S_2(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^2) \ll y \mathcal{L}^{-A}.$$

Moreover, in a small neighborhood of the center of the major arcs, defined by $|\alpha - \frac{a}{q}| \leq (8\pi y^2)^{-1}$, for $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1.5A+0.25b+18}$, an asymptotic formula with a remainder term is obtained for $S_2(\alpha; x, y)$, where A , b_1 , and b are arbitrary fixed positive constants, and $\mathcal{L} = \ln x$.

Keywords: Short exponential sum with primes, major arcs, density theorem, Dirichlet L -function

Bibliography: 22 titles.

For citation:

Rakhmonov, Z. Kh., Hotamova, R. L., Sharifzoda, M. S. 2025, "Short quadratic exponential sums with primes in major arcs", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 220–234.

1. Введение

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-\varkappa, 1 - \varkappa]$, $\varkappa\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α , для которых $q \leq P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α . $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Дж.Лю и Ж.Тао [1, 2], изучая сумму $S_2(\alpha; x, y)$, $y \geq x^{\theta_2}$ условно (в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана) при $\theta_2 = \frac{2}{3} + \varepsilon$ и безусловно воспользовавшись теоремой М.Ютилы [3] о четвертом моменте L -функций Дирихле в критической прямой при $\theta_2 = \frac{11}{16} + \varepsilon$ доказали, что для любого $A > 0$ существуют константы $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ и справедливо соотношение

$$S_2(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n^2) = \begin{cases} M_2(\alpha; x, y) + O\left(\frac{y}{\mathcal{L}^A}\right), & q \leq \mathcal{L}^{c_1}, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{xy\mathcal{L}^{c_2}}; \\ O\left(\frac{y}{\mathcal{L}^A}\right), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$M_2(\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^q e\left(-\frac{ah^2}{q}\right) \int_{x-y}^x e(\lambda u^2) du, \quad \tau = \frac{y^3}{x\mathcal{L}^{c_3}}.$$

Воспользовавшись теоремой о втором моменте L -функций Дирихле на критической прямой [4], а точнее — её следствием о плотности нетривиальных нулей L -функций Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы, автор [5] доказал для коротких тригонометрических сумм $S_k(\alpha; x, y)$ при $k \geq 3$ асимптотическую формулу с остаточным членом в малой окрестности центра больших дуг и получил нетривиальную оценку в самих больших дугах за исключением малой окрестности их центров (см. также [6, 7, 8, 9, 10]).

Методика изучения поведения сумм $S_k(\alpha; x, y)$ при $k = 2$ в некоторых аспектах отличается от случая $k \geq 3$. В этой работе, с учётом особенностей квадратичной суммы и с использованием метода, изложенного в [5], для коротких квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами $S_2(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг $\mathfrak{M}(\mathcal{L}^b)$ при $\tau = y^3 x^{-1} \mathcal{L}^{-b_1}$ получена асимптотическая формула с остаточным членом. В больших дугах $\mathfrak{M}(\mathcal{L}^b)$, за исключением малой окрестности их центров, доказана нетривиальная оценка.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $x \geq x_0$, A, b_1, b — произвольные фиксированные положительные числа, $1 \leq q \leq \mathcal{L}^b$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad \tau = \frac{y^3}{x\mathcal{L}^{b_1}}.$$

Тогда при $|\lambda| \leq (8\pi y^2)^{-1}$ и $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}^{1,5A+0,25b+18}$ справедливо равенство

$$S_2(\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n=1 \\ (a,q)=1}}^q e\left(\frac{an^2}{q}\right) \int_{x-y}^x e(\lambda u^2) du + O(y\mathcal{L}^{-A}),$$

а, при $|\lambda| > (8\pi y^2)^{-1}$ и $y \geq x^{1-\frac{1}{9-4\sqrt{2}}} \mathcal{L}^{c_2}$, $c_2 = \frac{2A+24+(\sqrt{2}-1)b_1}{2\sqrt{2}-1}$, имеет место оценка

$$S_2(\alpha; x, y) \ll y\mathcal{L}^{-A}.$$

2. Доказательство теоремы 1

2.1. Сведение доказательства теоремы к оценке суммы $W(\alpha; x, y)$

Поступая аналогично доказательству основной теоремы работы [5], полагая $k = 2$, при $x \geq x_0$ и произвольных фиксированных положительных числах A, b, b_1 , для каждого α из промежутка $[-\varkappa, 1 - \varkappa]$, где $\varkappa\tau = 1$, имеем представление:

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad (1)$$

причём $1 \leq q \leq \mathcal{L}^b$ и $\tau = y^3 x^{-1} \mathcal{L}^{-b_1}$. Тогда при

$$T_0 = (xy^{-1} + |\lambda|x^2) q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{A+3}$$

имеем асимптотическую формулу:

$$S_2(\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n=1 \\ (a,q)=1}}^q e\left(\frac{an^2}{q}\right) \int_{x-y}^x e(\lambda u^2) du - W(\alpha; x, y) + O\left(\frac{y}{\mathcal{L}^A}\right), \quad (2)$$

$$W(\alpha; x, y) \ll \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{q}} \sum_{\chi \bmod q} W(\lambda, \chi), \quad W(\lambda, \chi) = \sum_{\substack{|\gamma| \leq T_0 \\ \rho \neq \beta_1}} |I(\rho, \lambda)|, \quad (3)$$

$$|I(\rho, \lambda)| \ll x^\beta \min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min|\gamma + 4\pi\lambda u^2|}, \frac{1}{\sqrt{|4\pi\lambda u^2 - \gamma|}}\right), \quad (4)$$

где β_1 — действительный нуль, если по модулю q существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s, \chi_1)$ имеет действительный нуль $\beta_1 \geq 1 - c/\ln q$.

Также в основной теореме работы [5] было показано, что в формулах (3) и (4) без ограничения общности можно считать $\lambda \geq 0$. Случай $\lambda \leq 0$ с помощью соотношения $W(\lambda, \chi) = W(\chi, -\lambda)$ сводится к случаю $\lambda \geq 0$.

2.2. Вывод асимптотической формулы для $S_2(\alpha; x, y)$ в случае $\lambda \leq (8\pi y^2)^{-1}$

Этот случай доказывается точно так же, как в пункте «3.2. Доказательство теоремы в случае $\lambda \leq (2\pi k^2 x^{k-2} y^2)^{-1}$ » работы [5], если положить $k = 2$.

2.3. Оценка $W(\alpha; x, y)$ в случае $\lambda > (8\pi y^2)^{-1}$

Вводим дополнительный параметр $H = 8\pi\lambda xy$, который при $\lambda > (8\pi y^2)^{-1}$ удовлетворяет условию

$$H \geq \frac{x}{y}.$$

Все нетривиальные нули $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s, \chi)$ с условием $|\gamma| \leq T_0$ разобьём на множества D_1 , D_2 и D_3 :

$$\begin{aligned} D_1 &= \{\rho : -T_0 \leq \gamma < -4\pi\lambda x^2 - H\}, \\ D_2 &= \{\rho : -4\pi\lambda x^2 - H \leq \gamma \leq -4\pi\lambda(x-y)^2 + H\}, \\ D_3 &= \{\rho : -4\pi\lambda(x-y)^2 + H < \gamma \leq T_0\}. \end{aligned}$$

Через $W_j(\lambda, \chi)$, $j = 1, 2, 3$ обозначим сумму модулей интеграла $I(\rho, \lambda)$ по нулям ρ , принадлежащим множеству D_j . Воспользовавшись этим обозначением, представим сумму $W(\lambda, \chi)$, которая определяется формулой (3), представим в виде

$$W(\lambda, \chi) = W_1(\lambda, \chi) + W_2(\lambda, \chi) + W_3(\chi, \lambda). \quad (5)$$

2.3.1. Оценка $W_1(\lambda, \chi)$

Ко всем трём членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_1 , прибавляя слагаемое $4\pi\lambda u^2$, $x - y \leq u \leq x$, получим

$$D_1 = \{\rho : -T_0 + 4\pi\lambda u^2 \leq \gamma + 6\pi\lambda u^2 < -4\pi\lambda x^2 + 4\pi\lambda u^2 - H\},$$

Функция $4\pi\lambda u^2$ в отрезке $x - y \leq u \leq x$ монотонно возрастает, поэтому для правой границы множества D_1 , имеем

$$-4\pi\lambda x^2 + 4\pi\lambda u^2 - H \leq -H.$$

Поэтому, если $\rho \in D_1$, то выполняются неравенство $\gamma + 4\pi\lambda u^2 < -H$. Следовательно для монотонной возрастающей функции $\gamma + 4\pi\lambda u^2$ в отрезке $x - y \leq u \leq x$ имеет место соотношение

$$\min |\gamma + 4\pi\lambda u^2| = -\max(\gamma + 4\pi\lambda u^2) = -\gamma - 4\pi\lambda x^2 \geq H, \quad \text{если } \rho \in D_1,$$

Отсюда из второй оценки формулы (4), находим

$$W_1(\lambda, \chi) \ll \sum_{\rho \in D_1} \frac{x^\beta}{-\gamma - 4\pi\lambda x^2}.$$

Все нетривиальные нули в множестве

$$D_1 = \{\rho : -T_0 \leq \gamma < -4\pi\lambda x^2 - H\} = \{\rho : H \leq -\gamma - 4\pi\lambda x^2 < T_0 - 4\pi\lambda x^2\},$$

разобьём на классы $D_{11}, \dots, D_{1t}$, $t \ll T_0 H^{-1}$. В класс D_{1n} отнесём те нули ρ , для которых выполняется условие:

$$nH < -\gamma - 4\pi\lambda x^2 \leq (n+1)H, \quad \text{если } 1 \leq n \leq t.$$

Следовательно получим

$$\begin{aligned} W_1(\lambda, \chi) &\ll \sum_{n=1}^t \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{-\gamma - 4\pi\lambda x^2} \leq \sum_{n=1}^t \sum_{\rho \in D_{1n}} \frac{x^\beta}{nH} \leq \\ &\leq \frac{\mathcal{L}}{H} \max_{1 \leq n \leq t} \sum_{\rho \in D_{1n}} x^\beta \leq \frac{\mathcal{L}}{H} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T-H < \gamma \leq T} x^\beta. \end{aligned}$$

Эту оценку воспользовавшись соотношением $H = 8\pi\lambda xy$, представим в виде

$$W_1(\lambda, \chi) \ll \frac{\mathcal{L}}{\lambda xy} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \lambda x^2 y < \gamma \leq T} x^\beta.$$

2.3.2. Оценка $W_3(\lambda, \chi)$

Ко всем трём членам неравенства, определяющее множества D_2 прибавляя слагаемое $4\pi\lambda u^2$, $x - y \leq u \leq x$, получим

$$D_3 = \{\rho : 4\pi\lambda u^2 - 4\pi\lambda(x-y)^2 + H < \gamma + 4\pi\lambda u^2 \leq T_0 + 4\pi\lambda u^2\}.$$

Функция $4\pi\lambda u^2$ в отрезке $x - y \leq u \leq x$ монотонно возрастает, поэтому для левой границы множества D_3 имеем

$$4\pi\lambda u^2 - 4\pi\lambda(x-y)^2 + H \geq H.$$

Таким образом, если $\rho \in D_3$, то выполняются неравенство $\gamma + 4\pi\lambda u^2 > H$. Следовательно для монотонной возрастающей функции $\gamma + 4\pi\lambda u^2$ в отрезке $x - y \leq u \leq x$ имеет место соотношение

$$\min |\gamma + 4\pi\lambda u^2| = \min(\gamma + 4\pi\lambda u^2) = \gamma + 4\pi\lambda(x-y)^2 \geq H, \quad \text{если } \rho \in D_3.$$

Отсюда и из второй оценки (4), находим

$$W_3(\lambda, \chi) \ll \sum_{\rho \in D_3} \frac{x^\beta}{\gamma + 4\pi\lambda(x-y)^2}.$$

Все нетривиальные нули в множестве

$$D_3 = \{ \rho : H \leq \gamma + 4\pi\lambda(x-y)^2 < T_0 + 4\pi\lambda(x-y)^2 \},$$

разобьём на классы $D_{31}, \dots, D_{3t}$, $t \ll T_0 H^{-1}$. В класс D_{3n} отнесём те нули ρ , для которых выполняется условие:

$$nH < \gamma + 4\pi\lambda(x-y)^2 \leq (n+1)H, \quad \text{если } 1 \leq n \leq t.$$

Поэтому поступая аналогично как в случае оценки суммы $W_1(\lambda, \chi)$, имеем

$$\begin{aligned} W_3(\lambda, \chi) &\ll \sum_{n=1}^t \sum_{\rho \in D_{3n}} \frac{x^\beta}{\gamma + 4\pi\lambda(x-y)^2} \leq \sum_{n=1}^t \sum_{\rho \in D_{3n}} \frac{x^\beta}{nH} \leq \frac{\mathcal{L}}{H} \max_{1 \leq n \leq t} \sum_{\rho \in D_{3n}} x^\beta \leq \\ &\leq \frac{\mathcal{L}}{H} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T-H < \gamma \leq T} x^\beta \ll \frac{\mathcal{L}}{\lambda xy} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T-\lambda x^2 y < \gamma \leq T} x^\beta. \end{aligned}$$

2.3.3. Оценка $W_2(\lambda, \chi)$

Пользуясь явным значением параметра $H = 8\pi\lambda xy$ вводим следующие обозначения

$$\begin{aligned} T_1 &= 4\pi\lambda x^2 + H = 4\pi\lambda x^2 + 16\pi\lambda xy, \\ H_1 &= 4\pi\lambda x^2 - 4\pi\lambda(x-y)^2 + 2H = 4\pi\lambda(6xy - y^2) \asymp 24\pi\lambda xy, \\ T_1 - H_1 &= 4\pi\lambda x^2 - 8\pi\lambda xy + 4\pi\lambda y^2 \asymp 4\pi\lambda x^2 - 8\pi\lambda xy, \\ T_2 &= T_1 + 4\pi\lambda u^2 = 4\pi\lambda(x^2 + u^2 + 4xy), \end{aligned} \tag{6}$$

и представим множество D_2 в виде

$$\begin{aligned} D_2 &= \{ \rho : -4\pi\lambda x^2 - H \leq \gamma \leq -4\pi\lambda(x-y)^2 + H \} = \\ &= \{ \rho : T_1 - H_1 \leq -\gamma \leq T_1 \} = \\ &= \{ \rho : T_2 - H_1 \leq 4\pi\lambda u^2 - \gamma \leq T_2 \}, \end{aligned} \tag{7}$$

причём

$$\begin{aligned} T_2 - H_1 &= 4\pi\lambda(x^2 + u^2 + 2xy + y^2) \geq 4\pi\lambda(x^2 + (x-y)^2 + 2xy + y^2) = \\ &= 8\pi\lambda(x^2 + y^2) \geq 8\pi\lambda x^2 \gg \lambda x^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, если ρ принадлежит множеству D_2 , то пользуясь третьей оценкой формулы (4), представлением множества D_2 в виде (7) через T_2 , оценкой (8), а затем опять представлением множества D_2 в виде (7) но на этот раз через T_1 , последовательно имеем

$$\begin{aligned} |W_2(\lambda, \chi)| &= \sum_{\rho \in D_2} |I(\rho, \lambda)| = \sum_{T_2 - H_1 \leq 4\pi\lambda u^2 - \gamma \leq T_2} |I(\rho, \lambda)| \ll \\ &\ll \sum_{T_2 - H_1 \leq 4\pi\lambda u^2 - \gamma \leq T_2} \frac{x^\beta}{\sqrt{4\pi\lambda u^2 - \gamma}} \leq \sum_{T_2 - H_1 \leq 4\pi\lambda u^2 - \gamma \leq T_2} \frac{x^\beta}{\sqrt{T_2 - H_1}} \leq \\ &\ll \sum_{T_2 - H_1 \leq 4\pi\lambda u^2 - \gamma \leq T_2} \frac{x^\beta}{\sqrt{\lambda x^2}} = \sum_{T_1 - H_1 \leq -\gamma \leq T_1} \frac{x^\beta}{\sqrt{\lambda x^2}} = \sum_{T_1 - H_1 \leq \gamma \leq T_1} \frac{x^\beta}{\sqrt{\lambda x^2}}. \end{aligned}$$

Границы последней суммы по γ , то есть величины T_1 и $T_1 - H_1$, согласно их определения в формуле (6) являются величинами порядка λx^2 . Длина этой суммы, то есть параметр H_1 ,

также согласно формулы (6) является величиной порядка $24\pi\lambda xy \asymp \lambda xy$. Разбивая в этой сумме интервал суммирования $T_1 - H_1 \leq \gamma \leq T_1$ на конечное число интервалов вида

$$\varkappa\lambda x^2 - \lambda x^2 y < \gamma \leq \varkappa\lambda x^2,$$

где постоянная величина $\varkappa$ принимает значение из интервала

$$4\pi \left(1 + \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right) < \varkappa \leq 4\pi \left(1 + \frac{4y}{x}\right),$$

получим

$$W_2(\lambda, \chi) \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda x^2}} \sum_{\varkappa\lambda x^2 - \lambda xy < \gamma \leq \varkappa\lambda x^2} x^\beta.$$

В этой оценке, не ограничивая общности для удобства будем считать, что $\varkappa = 1$, а также воспользовавшись неравенством $\lambda x^2 < T_0$, имеем

$$W_2(\lambda, \chi) \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda x^2}} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \lambda xy < \gamma \leq T} x^\beta.$$

2.3.4. Сведение оценки $W(\alpha; x, y)$ к оценкам $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$

Подставляя эту оценку и оценки $W_1(\lambda, \chi)$ и $W_2(\lambda, \chi)$ в (5), а затем воспользовавшись условием $\lambda > (8\pi y^2)^{-1}$, получим:

$$W(\lambda, \chi) \ll \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda x^2}} + \frac{\mathcal{L}}{\lambda xy} \right) \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \lambda xy < \gamma \leq T} x^\beta \ll \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{\lambda q x^2}} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{T - \lambda xy < \gamma \leq T} x^\beta.$$

Отсюда и из оценки (3), найдём

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \frac{\mathcal{L}^2}{\sqrt{\lambda q x^2}} \max_{|T| \leq T_0} \sum_{\chi \bmod q} \sum_{T - \lambda xy < \gamma \leq T} x^\beta = \frac{\mathcal{L}^2}{\sqrt{\lambda q x^2}} \max_{|T| \leq T_0} V_q(T, \lambda xy).$$

Воспользовавшись для $V_q(T, U)$ при $U = \lambda xy$ формулой (11) работы [5], получим

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \frac{\mathcal{L}^2}{\sqrt{\lambda q x^2}} \max_{\substack{|T| \leq T_0 \\ 0,5 \leq u \leq 1-\delta}} x^u \sum_{\chi \bmod q} (N(u, T, \chi) - N(u, T - \lambda xy, \chi)), \quad (9)$$

$$\delta = \delta(q, T_0) = \frac{c_1}{\max \left(\ln q, (\ln(T_0 + 3) \ln \ln(T_0 + 3))^{\frac{3}{4}} \right)}.$$

Всюду ниже в этом параграфе будем считать, что для параметра y выполняется условие

$$x^{1-\frac{1}{9-4\sqrt{2}}} \mathcal{L}^{c_2} \leq y \leq x \mathcal{L}^{-A-0,5b-10}. \quad (10)$$

Из явного значения параметра T_0 , условия $\lambda > (8\pi y^2)^{-1}$ и соотношения (10), находим

$$\begin{aligned} \frac{T}{(\lambda xy)^3} &\leq \frac{T_0}{(\lambda xy)^3} = \frac{(xy^{-1} + |\lambda| x^2) q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{A+3}}{(\lambda xy)^3} = \frac{\sqrt{q} \mathcal{L}^{A+3}}{\lambda^3 x^2 y^4} + \frac{\sqrt{q} \mathcal{L}^{A+3}}{\lambda^2 x y^3} \leq \\ &\leq \frac{(8\pi)^2 y^2 \mathcal{L}^{A+0,5b+3}}{x^2} + \frac{(8\pi)^2 y \mathcal{L}^{A+0,5b+3}}{x} \ll \mathcal{L}^{-7}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что в сумме по $\chi \bmod q$ в (9) выполняется условие $\lambda xy \geq T^{\frac{1}{3}}$, то есть к этой сумме можно применить следующую лемму.

ЛЕММА 1. [4]. Пусть ε — сколь угодно малая положительная постоянная, и $T^{\frac{35}{108}+\varepsilon} \leq H \leq T$, тогда справедливы оценки

$$\sum_{\chi \bmod q} (N(u, T+H, \chi) - N(u, T, \chi)) \ll \begin{cases} (qH)^{\frac{4}{3-2u}(1-u)} (\ln qH)^9, & \text{для } \frac{1}{2} \leq u \leq \frac{3}{4} \\ (qH)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}, & \text{для } \frac{3}{4} \leq u \leq 1, \end{cases}$$

Пологая в лемме 1

$$\varepsilon = \min \left(\frac{53}{3591 \cdot 10^4}, \frac{\delta}{3} \right), \quad (11)$$

имеем

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \frac{\mathcal{L}^{12}}{\sqrt{\lambda q x^2}} \max_{0,5 \leq u \leq 0,75} x^u (q\lambda xy)^{\frac{4-4u}{3-2u}}, \\ \mathcal{B}_2 &= \frac{\mathcal{L}^2}{\sqrt{q\lambda x^2}} \max_{0,75 \leq u \leq 1-\delta(q, T_0)} x^u (q\lambda xy)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}. \end{aligned}$$

2.3.5. Оценка $\mathcal{B}_1$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \max_{0,5 \leq u \leq 0,75} \exp(f_1(u)), \\ f_1(u) &= u \ln x + \left(\frac{1}{u-1,5} + \frac{3}{2} \right) \ln(q\lambda xy), \\ f_1'(u) &= \ln x - \frac{\ln(q\lambda xy)}{(u-1,5)^2}, \quad f_1''(u) = \frac{2 \ln(q\lambda xy)}{(u-1,5)^3} < 0. \end{aligned}$$

Покажем, что выполняется неравенство $f_1'(0,5) > 0$. Пользуясь условиями

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{q\tau}, \quad \tau = \frac{y^3}{x \mathcal{L}^{b_1}}, \quad y \geq x^{1-\frac{1}{9-4\sqrt{2}}} \mathcal{L}^{c_2},$$

находим

$$\begin{aligned} -f_1'(0,5) &= \ln(q\lambda y) \leq \ln\left(\frac{y}{\tau}\right) = \ln\left(\frac{x \mathcal{L}^{b_1}}{y^2}\right) \leq \ln\left(\frac{\mathcal{L}^{b_1}}{x^{1-\frac{2}{9-4\sqrt{2}}} \mathcal{L}^{2c_2}}\right) = \\ &= \ln\left(x^{-\frac{17}{31+8\sqrt{2}}} \mathcal{L}^{b_1-2c_2}\right) = -\frac{17}{31+8\sqrt{2}} \mathcal{L} + (b_1 - 4c_2) \ln \mathcal{L} < 0. \end{aligned}$$

Случай $q\lambda xy \leq x^{\frac{9}{16}}$. Воспользовавшись условием рассматриваемого случая имеем

$$f_1'(u) \geq f_1'(0,75) = \ln x - \frac{16}{9} \ln(q\lambda xy) \geq \ln x - \frac{16}{9} \ln x^{\frac{9}{16}} = 0,$$

следовательно функция $f_1(u)$ возрастает в интервале $0,5 \leq u \leq 0,75$. Пользуясь этим свойством, а затем соотношением (10), найдем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \exp(f_1(0,75)) = \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{3}{4} \ln x + \frac{1}{6} \ln(q\lambda xy)\right) = \\ &= (q\lambda xy)^{\frac{1}{6}} x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12} < x^{\frac{11}{32}} y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12} = y \left(\frac{x^{\frac{11}{16}} \mathcal{L}^{2A+24}}{y} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{-A} \ll y \mathcal{L}^{-A}. \end{aligned}$$

Случай $q\lambda xy > x^{\frac{9}{16}}$. Вводя дополнительные параметры μ и c , обозначая длины суммы y в виде

$$y = x^{1-\mu^2} \mathcal{L}^c, \quad (13)$$

ищем наибольшее значение μ и наименьшее значение c , что имеет место оценка

$$\mathcal{B}_1 \ll y \mathcal{L}^{-A}. \quad (14)$$

Воспользовавшись условиями рассматриваемого случая, а именно соотношениями

$$\frac{1}{yx^{\frac{7}{16}}} < q\lambda \leq \frac{1}{\tau}, \quad \tau = \frac{y^3}{x \mathcal{L}^{b_1}}, \quad y \geq x^{1-\frac{1}{9-4\sqrt{2}}} \mathcal{L}^{c_2} > x^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{-0,5b_1},$$

находим

$$q\lambda xy \leq \frac{xy}{\tau} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \mathcal{L}^{b_1} < \left(\mathcal{L}^{-0,5b_1}\right)^2 \mathcal{L}^{b_1} = 1.$$

Поэтому

$$f'_1(0,5) = \ln x - \ln(q\lambda xy) > \ln x > 0, \quad f'_1(0,75) = \ln x - \frac{16}{9} \ln(q\lambda xy) < 0,$$

и точка

$$u_0 = \frac{3}{2} - \left(\frac{\ln(q\lambda xy)}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{3}{2} - \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4},$$

где $f'_1(u_0) = 0$ принадлежит интервалу $[0,5, 0,75]$. В этом интервале как мы уже отмечали также выполняется неравенство $f''(u) < 0$. Поэтому в этом интервале $0,5 \leq u \leq 0,75$ график функции $f(u)$ является выпуклым вверх, следовательно

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \exp(f_1(u_0)) = \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \exp\left(u_0 \ln x + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{u_0 - 1,5}\right) \ln(q\lambda xy)\right) \\ &= \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\left(\frac{3}{2} - \left(\frac{\ln(q\lambda xy)}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \ln x + \left(\frac{3}{2} - \left(\frac{\ln x}{\ln(q\lambda xy)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \ln(q\lambda xy)\right) \\ &= xy^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12} \exp\left(\frac{3}{2} \ln(q\lambda xy) - 2(\ln(q\lambda xy) \ln x)^{\frac{1}{2}}\right) = xy^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12} \exp(g(q\lambda xy)), \end{aligned} \quad (15)$$

здесь $g(t) = \frac{3}{2} \ln t - 2(\ln t \ln x)^{\frac{1}{2}}$. Из условий

$$q\lambda xy \geq x^{\frac{9}{16}}, \quad \lambda \leq \frac{1}{q\tau}, \quad \tau = \frac{y^3}{x \mathcal{L}^{b_1}},$$

и формулы (13) следует, что

$$x^{\frac{9}{16}} \leq q\lambda xy \leq \frac{xy}{\tau} = \frac{x^2 \mathcal{L}^{b_1}}{y^2} = x^u \mathcal{L}^v, \quad u = 2\mu^2, \quad v = b_1 - 2c. \quad (16)$$

Поэтому с учётом соотношения $t = q\lambda xy \geq x^{\frac{9}{16}}$, имеем

$$g'(t) = \frac{3}{2t} - \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{t(\ln t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{9 \ln t - 4 \ln x}{2t(\ln t)^{\frac{1}{2}}(3(\ln t)^{\frac{1}{2}} + 2(\ln x)^{\frac{1}{2}})} > 0,$$

то есть $g(t)$ в интервале своего изменения является возрастающей функцией, поэтому

$$g(q\lambda x^2 y) \leq g(x^u \mathcal{L}^v).$$

Пользуясь этим неравенством и соотношением

$$y^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2} + \frac{u}{4}} \mathcal{L}^{-\frac{b_1-v}{4}},$$

которая является следствием соотношения (16), правую часть (15) оценим следующим образом

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &\leq xy^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12} \exp(g(x^u \mathcal{L}^v)) = yx^{\frac{1}{2} + \frac{u}{4}} \mathcal{L}^{12 - \frac{b_1-v}{4}} \exp(g(x^u \mathcal{L}^v)) = \\ &= yx^{\frac{1}{2} + \frac{u}{4}} \mathcal{L}^{12 - \frac{b_1-v}{4}} \exp\left(\frac{3}{2} \ln(x^u \mathcal{L}^v) - 2(\ln(x^u \mathcal{L}^v) \mathcal{L})^{\frac{1}{2}}\right) = \\ &= y \mathcal{L}^{12 - \frac{b_1-v}{4} + \frac{3v}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2} + \frac{u}{4} + \frac{3u}{2}} \exp\left(-2(u \mathcal{L}^2 + v \mathcal{L} \ln \mathcal{L})^{\frac{1}{2}}\right) = \\ &= y \mathcal{L}^{12 - \frac{b_1}{4} + \frac{7v}{4}} x^{\frac{7u}{4} + \frac{1}{2}} \exp\left(-2\sqrt{u} \mathcal{L} \left(1 + \frac{v \ln \mathcal{L}}{u \mathcal{L}}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Пользуясь при $|t| \leq 0, 1$ формулой

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{t}{2} + R_1(t), \quad R_1(t, \theta) = -\frac{(1-\theta)t^2}{8(1+\theta t)^{\frac{3}{2}}},$$

которая является следствием разложения функции $f(t) = (1+t)^{\frac{1}{2}}$ в ряд Маклорена с остаточным членом в форме Коши вида

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 + \sum_{n=1}^m \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \dots (\frac{1}{2}-(n-1))}{n!} t^n + R_m(t, \theta), \\ R_m(t, \theta) &= \frac{f^{(m+1)}(\theta t)}{(m+1)!} (1-\theta)^m t^{m+1}, \quad 0 < \theta < 1, \\ f'(t) &= \frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(t) = -\frac{1}{4}(1+t)^{-\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

при $m = 1$. В этой формуле, рассматривая остаточный член $R_1(t, \theta)$ как функцию от θ , имеем

$$\frac{\partial R_1(t, \theta)}{\partial \theta} = \frac{t^2(1+\theta t)^{\frac{3}{2}} + (1-\theta)t^2 \cdot \frac{3}{2}(1+\theta t)^{\frac{1}{2}}t}{8(1+\theta t)^2} = \frac{((3-\theta)t+2)t^2}{16(1+\theta t)^{\frac{5}{2}}} > 0.$$

Поэтому

$$\min R_1(t, \theta) = R_1(t, 0) = -\frac{t^2}{8}, \quad (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{t}{2} + R_1(t) \geq 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} -2\sqrt{u} \mathcal{L} \left(1 + \frac{v \ln \mathcal{L}}{u \mathcal{L}}\right)^{\frac{1}{2}} &\leq -2\sqrt{u} \mathcal{L} \left(1 + \frac{v \ln \mathcal{L}}{2u \mathcal{L}} - \frac{v^2 \ln^2 \mathcal{L}}{8u^2 \mathcal{L}^2}\right) = \\ &= \ln x^{-2\sqrt{u}} + \ln \mathcal{L}^{-\frac{v}{\sqrt{u}}} + \frac{v^2 \ln^2 \mathcal{L}}{4u^{\frac{3}{2}} \mathcal{L}} \leq \ln x^{-2\sqrt{u}} + \ln \mathcal{L}^{-\frac{v}{\sqrt{u}}} + 1. \end{aligned}$$

Подставляя найденную оценку в правую часть (17), находим

$$\mathcal{B}_1 \ll y \mathcal{L}^{12 - \frac{b_1}{4} + \frac{7v}{4}} x^{\frac{7u}{4} + \frac{1}{2}} \cdot x^{-2\sqrt{u}} \mathcal{L}^{-\frac{v}{\sqrt{u}}} = y x^{\frac{7}{4}u - 2\sqrt{u} + \frac{1}{2}} \mathcal{L}^{12 - \frac{b_1}{4} + \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)v}. \quad (18)$$

Пользуясь соотношениями в формуле (16), показатели x и $\mathcal{L}$ в правой части последнего неравенства выражаем через параметры μ и c , обозначив их соответственно через $\mathfrak{x}(\mu)$ и $\omega(\mu, c)$, имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}(\mu) &= \frac{7}{2}\mu^2 - 2\sqrt{2}\mu + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(7\mu^2 - 4\sqrt{2}\mu + 1 \right), \\ \omega(\mu, c) &= 12 - \frac{b_1}{4} + \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}\mu} \right) (b_1 - 2c) = \\ &= 12 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}\mu} \right) b_1 - \left(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{2}}{\mu} \right) c.\end{aligned}$$

Величина $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mu)$ является квадратичным многочленом относительно μ , имеющим два положительных корня. Большим корнем является μ_2 :

$$\mu_2 = \frac{2\sqrt{2} + 1}{7} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 1}, \quad \mu_2^2 = \frac{1}{9 - 4\sqrt{2}}. \quad (19)$$

Поэтому наибольшее значение параметра μ , при котором $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mu)$ — показатель x в оценке (18) равен нулю, является корень μ_2 . При этом $\omega(\mu, c)$ — показатель $\mathcal{L}$ при $\mu = \mu_2$ определяется следующим образом

$$\begin{aligned}\omega(\mu_2, c) &= 12 + \left(\frac{3}{2} - \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \right) b_1 - \left(\frac{7}{2} - \sqrt{2}(2\sqrt{2} - 1) \right) c = \\ &= 12 + \frac{\sqrt{2} - 1}{2} b_1 - \frac{2\sqrt{2} - 1}{2} c.\end{aligned}$$

и при $c = c_2$, где

$$c_2 = \frac{2 \left(A + 12 + \frac{\sqrt{2}-1}{2} b_1 \right)}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{2A + 24 + (\sqrt{2} - 1) b_1}{2\sqrt{2} - 1},$$

имеет место равенство $\omega(\mu_k, c_2) = -A$, то есть оценка (18) превращается в оценку (14). Таким образом, из представлений параметра y в виде (13) и параметра μ_k^2 в виде (19) следует, что оценка (14) имеет место при

$$y \geq x^{1 - \frac{1}{9 - 4\sqrt{2}}} \mathcal{L}^{c_2}.$$

2.3.6. Оценка $\mathcal{B}_2$

Сумму $\mathcal{B}_2$ представим в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 &= \frac{\mathcal{L}^2}{\sqrt{q\lambda x^2}} \max_{0.75 \leq u \leq 1 - \delta(q, T_0)} x^u (q\lambda xy)^{\frac{2}{u}(1-u) + \varepsilon} = \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^2}{x^{\frac{1}{2}}} (q\lambda xy)^{-\frac{1}{2}} \max_{0.75 \leq u \leq 1 - \delta} f_2(u), \\ f_2(u) &= x^u (q\lambda xy)^{\frac{2}{u}(1-u) + \varepsilon}, \quad \delta = \delta(q, T_0),\end{aligned}$$

где функция $f_2(u)$ и её производная второго порядка $f_2''(u)$ положительны:

$$\begin{aligned}f_2'(u) &= f_2(u) \left(\ln x - \frac{2}{u^2} \ln(q\lambda xy) \right), \\ f_2''(u) &= f_2(u) \left(\left(\ln x - \frac{2}{u^2} \ln(q\lambda xy) \right)^2 + \frac{4}{u^2} \ln(q\lambda xy) \right) \geq \\ &\geq \frac{4f_2(u)}{u^2} \ln(q\lambda xy) \geq \frac{4f_2(u)}{u^2} \ln \left(\frac{qx}{8\pi y} \right) > 0.\end{aligned}$$

Следовательно график функции $f_2(u)$ является выпуклым вниз, поэтому

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 &\leq \frac{y^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^2}{x^{\frac{1}{2}}} (q\lambda xy)^{-\frac{1}{2}} (f_2(0, 75) + f_2(1 - \delta)) = \\ &= \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \left(x^{\frac{3}{4}} (q\lambda xy)^{\frac{1}{6} + \varepsilon} + x^{1-\delta} (q\lambda xy)^{-\frac{1}{2} + \frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon} \right) \mathcal{L}^2 = \\ &= y \left(x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{2}} (q\lambda xy)^{\frac{1+6\varepsilon}{6}} + y^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}-\delta} (q\lambda xy)^{-\frac{1}{2} + \frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon} \right) \mathcal{L}^2.\end{aligned}$$

Пользуясь условием рассматриваемого случая для параметра λ , то есть соотношением

$$\frac{1}{8\pi y^2} < \lambda \leq \frac{1}{q\tau} = \frac{x \mathcal{L}^{b_1}}{qy^3},$$

найдем

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 &\ll y \left(x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2 \mathcal{L}^{b_1}}{y^2} \right)^{\frac{1+6\varepsilon}{6}} + y^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}-\delta} \left(\frac{x}{y} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon} \right) \mathcal{L}^2 = \\ &= y \left(\frac{x^{2 + \frac{3}{2(1+6\varepsilon)}} \mathcal{L}^{b_1}}{y^{2 + \frac{3}{1+6\varepsilon}}} \right)^{\frac{1+6\varepsilon}{6}} \mathcal{L}^2 + y \left(\frac{x^{\frac{\delta + \delta^2 + (1-\delta)\varepsilon}{2\delta + (1-\delta)\varepsilon}}}{y} \right)^{\frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon} \mathcal{L}^2 = \\ &= y \left(\frac{x^{1 - \frac{3}{10+24\varepsilon}} \mathcal{L}^{\frac{b_1+6\varepsilon}{5+12\varepsilon}}}{y} \right)^{\frac{5+12\varepsilon}{6}} \mathcal{L}^2 + \left(\frac{x^{\frac{\delta + \delta^2 + (1-\delta)\varepsilon}{2\delta + (1-\delta)\varepsilon}}}{y} \right)^{\frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon} \mathcal{L}^2 = \\ &= y \left(\frac{x^{1 - \frac{1}{9-4\sqrt{2}}} \mathcal{L}^{c_2}}{y} \right)^{\frac{5+12\varepsilon}{6}} x^{g(\varepsilon)} \mathcal{L}^{h(\varepsilon)} + y \left(\frac{x^{1 - \frac{1}{9-4\sqrt{2}}} \mathcal{L}^{c_2}}{y} \right)^{\frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon} x^{f(\varepsilon)} \mathcal{L}^{v(\varepsilon)},\end{aligned}\tag{20}$$

где функции $g(\varepsilon)$, $h(\varepsilon)$, $f(\varepsilon)$ и $v(\varepsilon)$ определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}g(\varepsilon) &= \left(\frac{1}{9 - 4\sqrt{2}} - \frac{3}{10 + 24\varepsilon} \right) \frac{5 + 12\varepsilon}{6}; \\ h(\varepsilon) &= \left(\frac{b_1 + 6\varepsilon}{5 + 12\varepsilon} - c_2 \right) \frac{5 + 12\varepsilon}{6} + 2b; \\ f(\varepsilon) &= \left(\frac{\delta + \delta^2 + (1-\delta)\varepsilon}{2\delta + (1-\delta)\varepsilon} - \left(1 - \frac{1}{9 - 4\sqrt{2}} \right) \right) \left(\frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon \right); \\ v(\varepsilon) &= -c_2 \left(\frac{2\delta}{1-\delta} + \varepsilon \right) + 2.\end{aligned}$$

Теперь последовательно воспользовавшись неравенствами $40\sqrt{2} < 57$ и $c_2 > 0$, а также определением параметра ε из (11), каждую из функции $g(\varepsilon)$, $h(\varepsilon)$, $f(\varepsilon)$ и $v(\varepsilon)$ оценим сверху. Имеем

$$\begin{aligned}g(\varepsilon) &= -\frac{57 - 40\sqrt{2}}{588} + \left(3 - \frac{57 - 40\sqrt{2}}{245} \right) \varepsilon < \\ &< -\frac{57 - 40\sqrt{2}}{588} + 3\varepsilon = -\frac{1}{84(57 + 40\sqrt{2})} + 3\varepsilon < -\frac{1}{84 \cdot 114} + 3\varepsilon = \\ &= -\frac{1}{9576} + 3\varepsilon = -\frac{1}{10000} + 3 \left(\varepsilon - \frac{53}{3591 \cdot 10^4} \right) \leq -\frac{1}{10000}.\end{aligned}$$

$$h(\varepsilon) = \left(\frac{b_1 + 6\varepsilon}{5 + 12\varepsilon} - c_2 \right) \frac{5 + 12\varepsilon}{6} + 2b = \frac{b_1}{6} + 2 + \varepsilon - \left(\frac{5}{6} + \varepsilon \right) c_2 < \frac{b_1}{6} + 2 + \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= \delta + \delta^2 + (1 - \delta)\varepsilon - \frac{40 - 4\sqrt{2}}{49} \left(2\delta + 2\delta^2 + \frac{2\delta^3}{1 - \delta} + \varepsilon \right) < \\ &< \delta + \delta^2 + (1 - \delta)\varepsilon - \frac{34}{49} \left(2\delta + 2\delta^2 + \frac{2\delta^3}{1 - \delta} + \varepsilon \right) = \\ &= -\frac{2}{7}\delta + \frac{15}{49}\varepsilon - \frac{5}{49}\delta = -\frac{2}{7}\delta + \frac{15}{49} \left(\varepsilon - \frac{\delta}{3} \right) \leq -\frac{2}{7}\delta; \\ v(\varepsilon) &= -c_2 \left(\frac{2\delta}{1 - \delta} + \varepsilon \right) + 2 < 2. \end{aligned}$$

В правой части формулы (20) воспользовавшись условием

$$y \geq x^{1 - \frac{1}{9 - 4\sqrt{2}}} \mathcal{L}^{c_2},$$

а затем подставляя полученные оценки сверху для функций $g(\varepsilon)$, $h(\varepsilon)$, $f(\varepsilon)$ и $v(\varepsilon)$, последовательно получим

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 &\ll yx^{g(\varepsilon)} \mathcal{L}^{h(\varepsilon)} + yx^{f(\varepsilon)} \mathcal{L}^{v(\varepsilon)} \ll yx^{-\frac{1}{10000}} \mathcal{L}^{\frac{b_1}{6} + 2 + \varepsilon} + yx^{-\frac{2}{7}\delta} \mathcal{L}^2 \ll \\ &\ll y\mathcal{L}^{-A} + y\mathcal{L}^2 \exp\left(-\frac{2}{7}\delta\mathcal{L}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Воспользовавшись условием (10), получим

$$\begin{aligned} T_0 &= (xy^{-1} + \lambda x^2) q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{A+3} \leq \left(\frac{x\sqrt{q}}{y} + \frac{x^2}{\sqrt{q}\tau} \right) \mathcal{L}^{A+3} \leq \\ &\leq \left(\frac{x\sqrt{q}}{y} + \frac{x^3 \mathcal{L}^{b_1}}{y^3 \sqrt{q}} \right) \mathcal{L}^{A+3} \leq \left(\frac{x\mathcal{L}^b}{y} + \frac{x^3 \mathcal{L}^{b_1}}{y^3} \right) \mathcal{L}^{A+3} \leq \\ &\leq \left(x^{\frac{1}{9 - 4\sqrt{2}}} \mathcal{L}^{b - c_2} + x^{\frac{3}{9 - 4\sqrt{2}}} \mathcal{L}^{b_1 - 3c_2} \right) \mathcal{L}^{A+3} = \\ &= \left(x^{\frac{9 + 4\sqrt{2}}{49}} \mathcal{L}^{b - c_2} + x^{\frac{27 - 12\sqrt{2}}{49}} \mathcal{L}^{b_1 - 3c_2} \right) \mathcal{L}^{A+3} < \\ &< \left(x^{\frac{15}{49}} \mathcal{L}^{b - c_2} + x^{\frac{45}{49}} \mathcal{L}^{b_1 - 3c_2} \right) \mathcal{L}^{A+3} < 0,01x. \end{aligned}$$

При помощи этой оценки оценим параметр $\delta = \delta(q, T_0)$ снизу. Имеем

$$\delta(q, T_0) \geq \frac{c_1}{\max\left(b \ln \mathcal{L}, (\mathcal{L} \ln \mathcal{L})^{\frac{3}{4}}\right)} \geq c_1 \mathcal{L}^{-0,76}.$$

Поэтому

$$\mathcal{B}_2 \ll y\mathcal{L}^{-A} + y\mathcal{L}^2 \exp\left(-\frac{2}{7}\delta\mathcal{L}\right) \ll y\mathcal{L}^{-A}.$$

2.4. Нетривиальная оценка $S_2(\alpha; x, y)$ в случае $\lambda \leq (8\pi y^2)^{-1}$

Из найденных оценок для $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ с учетом формулы (12), имеем

$$|W(\alpha; x, y)| \ll y\mathcal{L}^{-A}.$$

Подставляя последнюю оценку в правую часть формулы (2), найдем

$$S_2(\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n=1 \\ (a,q)=1}}^q e\left(\frac{an^2}{q}\right) \int_{x-y}^x e(\lambda u^2) du + O\left(\frac{y}{\mathcal{L}^A}\right),$$

Переходя к оценкам и воспользовавшись тривиальной оценкой суммы по n , то есть числом слагаемых, находим

$$S_2(\alpha; x, y) \ll \left| \int_{x-y}^x e(\lambda u^2) du \right| + \frac{y}{\mathcal{L}^A}.$$

Оценивая тригонометрический интеграл по величине первой производной, и воспользовавшись условиями $\lambda > (8\pi y^2)^{-1}$, а затем соотношением (10), то есть неравенством $y \leq x\mathcal{L}^{-A-0,5b-10}$, имеем

$$S_2(\alpha; x, y) \ll \frac{1}{\min_{x-y \leq u \leq x} 2\lambda x} + \frac{y}{\mathcal{L}^A} \ll y \left(\frac{y}{x} + \frac{1}{\mathcal{L}^A} \right) \ll \frac{y}{\mathcal{L}^A}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu J., Zhan T. On sums of five almost equal prime squares // Acta Arithmetica. 1996. V. 77. P. 369–383.
2. Liu J., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals // Monatshefte für Mathematik. 1999. № 127. P. 27–41.
3. Jutila M. Mean value estimates for exponential sums with applications to L -functions // Acta Arithmetica. 1991. V. 57. Is. 2. P. 93–114.
4. Zhan T. On the Mean Square of Dirichlet L -Functions // Acta Mathematica Sinica. New Series. 1992. Vol. 8, No 2. pp. 204–224.
5. Рахмонов З.Х. Оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами в длинных дугах // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 4(81). С. 199–223.
6. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Короткие кубические суммы простыми числами // Труды МИАН. 2016. Т. 296. С. 220 – 242.
7. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм в малых дугах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2016. Т. 59. № 7–8. С. 273 – 277.
8. Рахмонов З. Х., Собиров А. А., Фозилова П. М. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2020. Т. 63. № 5–6. С. 279–288.
9. Рахмонов З. Х., Собиров А. А., Фозилова П. М. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в большие дуги // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2020. Т. 63. № 7–8. С. 405–415.
10. Хотамова Р. Л., Шарифзода М. С. Короткие квадратичные тригонометрические суммы с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2021. Т. 64. № 1–2. С. 5–10.

REFERENCES

1. Liu, J., & Zhan, T., 1996, “On sums of five almost equal prime squares”, *Acta Arithmetica*, vol. 77. pp. 369–383.
2. Liu, J., & Zhan, T., 1999, “Estimation of exponential sums over primes in short intervals I”, *Monatshefte fur Mathematik*, vol. 127, Is. 1, pp. 27-41.
3. Jutila, M., 1991, “Mean value estimates for exponential sums with applications to L -functions”, *Acta Arithmetica*, vol. 57, Is. 2. pp. 93-114.
4. Zhan T., 1992, “On the Mean Square of Dirichlet L -Functions”, *Acta Mathematica Sinica. New Series*, vol. 8, No 2, pp. 204-224.
5. Rakhmonov, Z. Kh., 2021, “Estimates of short exponential sums with primes in major arcs”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, Is. 4, pp. 199-223, (in Russian).
6. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., 2017, “Short Cubic Exponential Sums over Primes”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, pp. 211–233.
7. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., 2016, “Estimation of short cubic exponential sums with prime numbers in minor arcs”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 59, no 7-8, pp. 273-277, (in Russian).
8. Rakhmonov, Z. Kh., & Sobirov A. A., Fozilova P. M., 2020, “Behavior of short cubic exponential sums with primes in a small neighborhood of the center of major arcs”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 63, no 5-6, pp. 279-288, (in Russian).
9. Rakhmonov, Z. Kh., & Sobirov A. A., Fozilova P. M., 2020, “Estimate of short cubic exponential sums with primes in major arcs”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 63, no 7-8, pp.405-415, (in Russian).
10. Hotamova R. L., & Sharifzoda M. S., 2021, “Behavior of short cubic exponential sums with primes in a small neighborhood of the center of major arcs”, *Doklady Natsional’noi akademii nauk Tadzhikistana*, vol. 64, no 1-2, pp. 5-10, (in Russian).

Получено: 22.04.2025

Принято в печать: 27.08.2025