ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-185-219

Равномерное распределение в единичном кубе взвешенных узлов квадратурной формулы

Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба

Рарова Елена Михайловна — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: rarova82@mail.ru

Добровольский Николай Николаевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула); Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Балаба Ирина Николаевна — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ibalaba@mail.ru

Аннотация

В работе даётся определение равномерного распределения в единичном s-мерном кубе последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток II типа с весовой функцией. Кроме того, даётся определение равномерного распределения в единичном s-мерном кубе G_s последовательности сеток M_n с весовой функцией.

Даётся доказательство аналога обобщённого критерия Г. Вейля об необходимых и достаточных условиях равномерного распределения в единичном s-мерном кубе G_s последовательности сеток M_n с весами.

Так как определение равномерного распределения последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток II типа с весовой функцией отличается от определения равномерного распределения последовательности сеток M_n с весовой функцией, то в работе доказывается второй аналог критерия Вейля о необходимых и достаточных условиях равномерного распределения в единичном s-мерном кубе G_s последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток II типа.

Доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*

$$R_N[f]=C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right)+\frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})=$$

$$=C(\vec{0})\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right)+\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$$

и при $N\to\infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда и только тогда, когда взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s–мерном кубе.

Ключевые слова: алгебраические решётки, алгебраические сетки, тригонометрические суммы алгебраических сеток с весами, весовые функции.

Библиография: 41 название.

Для цитирования:
Рарова, Е. М., Добровольский, Н. Н., Реброва, И. Ю., Балаба, И. Н. Равномерное распределение в единичном кубе взвешенных узлов квадратурной формулы // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26, вып. 3, С. 185–219.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-185-219

Uniform distribution in the unit cube of weighted nodes of the quadrature formula

E. M. Rarova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, I. N. Balaba

Rarova Elena Mikhailovna — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: rarova82@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula); Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Balaba Irina Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ibalaba@mail.ru

Abstract

The paper defines a uniform distribution in a unit s-dimensional cube of a sequence of nested generalized parallelepiped grids of type II with a weight function. In addition, a definition of a uniform distribution in a unit s-dimensional cube G_s of a sequence of M_n grids with a weight function is given.

A proof is given of an analogue of the generalized G. Weyl criterion on necessary and sufficient conditions for a uniform distribution in a unit s-dimensional cube G_s of a sequence of M_n grids with weights.

Since the definition of the uniform distribution of a sequence of nested generalized parallelepiped grids of type II with a weight function differs from the definition of the uniform distribution of a sequence of grids M_n with a weight function, the paper proves the second analogue of the Weyl criterion on the necessary and sufficient conditions for the uniform distribution in a unit s-dimensional cube G_s of a sequence of nested generalized parallelepiped grids of type II.

The following theorem is proved:

Теорема 2. *Let the Fourier series of $f(\vec{x})$ converge absolutely, $C(\vec{m})$ be its Fourier coefficients and $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ be the trigonometric sums of the weighted grid, then the following equality holds*

$$R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$

$$= C(\vec{0})\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$$

and as $N \to \infty$ the error $R_N[f]$ will tend to zero if and only if the weighted nodes of the quadrature formula are uniformly distributed in the unit s–dimensional cube.

Keywords: algebraic lattices, algebraic net, trigonometric sums of algebraic net with weights, weight functions..

Bibliography: 41 titles.

For citation:
Rarova, E. M., Dobrovol'skii, N. N., Rebrova, I. Yu., Balaba, I. N. 2025, "Uniform distribution in the unit cube of weighted nodes of the quadrature formula", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 185–219.

Посвящается Николаю Михайловичу Добровольскому
по случаю его семидесятипятилетия

1. Введение

В данной работе используются обозначения и определения из работ [29]–[33].

Рассматриваются единичные $s-$мерные кубы

$$\overline{G}_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu \leqslant 1,\, \nu = 1,2,\ldots,s\}, \quad G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu < 1,\, \nu = 1,2,\ldots,s\}.$$

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\}=(\{x_1\},\ldots,\{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$. Целой частью вектора называется вектор $[\vec{x}] = \vec{x} - \{\vec{x}\}$.

Через $p(\vec{x}) = \left[\vec{x} + \left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)\right]$ обозначим ближайший целый вектор в смысле нормы $\|\vec{x}\|_1 = \max(|x_1|,\ldots,|x_s|)$. Для нормы вектора отклонения от ближайшего целого $\delta(\vec{x})$, заданного равенством

$$\delta(\vec{x}) = p(\vec{x}) - \vec{x} = \left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right) - \left\{\vec{x} + \left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)\right\},$$

справедливо неравенство $\|\delta(\vec{x})\|_1 \leqslant \frac{1}{2}$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s = \vec{m}\cdot A\,|\vec{m} = (\,m_1,\ldots,m_s) \in \mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1\,1},\ldots,\lambda_{1\,s})$,…,$\vec{\lambda}_s = (\lambda_{s\,1},\ldots,\lambda_{s\,s})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x} \,|\, \forall \vec{y} \in \Lambda\ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Её матрица A^* задана соотношениями

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda^*_{1\,1} & \dots & \lambda^*_{1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^*_{s\,1} & \dots & \lambda^*_{s\,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}^*_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}^*_s \end{pmatrix}, \quad (\vec{\lambda}_\nu, \vec{\lambda}^*_\mu) = \delta_{\nu,\mu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu = \mu, \\ 0, & \text{если } \nu \neq \mu. \end{cases}.$$

Хорошо известно, что определители решётки и взаимно решётки связаны соотношением $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \dfrac{1}{q}\Lambda^*$ и $\det(t\Lambda)^* = (t^s \det \Lambda)^{-1}$.

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$. Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1;1)^s$.*

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s, \tag{1}$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x} \notin (-1;1)^s, \tag{2}$$

$$\left| \int_{-1}^{1} \dots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i (\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1 \dots \overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \tag{3}$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$. Простейшим примером весовой функции является функция $\rho_1(\vec{x}) = \rho_1(x_1) \cdot \ldots \cdot \rho_1(x_s)$, где

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Определение 3. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\Lambda), \{\vec{y}\} = \vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

В данной работе рассматриваются непрерывные периодические функции с периодом равным единице по каждой из переменных x_ν $(\nu = 1, 2, \dots, s)$, принадлежащие классу $E^\alpha_s(C)$, который состоит из периодических функций

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})},$$

для которых

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{C}{(\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^\alpha}, \quad (\alpha > 1)$$

и $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m.

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа на классе E_s^α справедлива оценка (см. [14], [24])

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f\in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leqslant CB\cdot c_1(\alpha)^s \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

$$\text{где}\quad c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x}_1\dots\overline{x}_s)^{-\alpha}.$$

Отметим важное обстоятельство — квадратурные формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$, вообще говоря, задают насыщаемый алгоритм численного интегрирования, если весовая функция конечного порядка и решетка не является целочисленной.

Этот алгоритм будет ненасыщаемый для целочисленных решеток, то есть для параллелепипедальных сеток, или для весовых функций бесконечного порядка. Определение ненасыщаемых алгоритмов дано в монографиях [1], [26].

Вопросы построения численных алгоритмов с правилом остановки рассмотрены в работах [9], [11], [36] — [28], [41].

Параллелепипедальные сетки и метод оптимальных коэффициентов изучаются в работах [19] — [24], [2], [3], [10] и других.

1.1. Число точек в обобщённых параллелепипедальных сетках II типа

Следуя Г. Вейлю (см. [4]) сформулируем без доказательства следующий принцип Гаусса.

Теорема 3. *Пусть область A имеет жорданов объем $V(A)$, $\tau > 0$ и $N_\tau(A)$ — количество точек фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ в области τA, тогда справедливы равенства*

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{N_\tau(A)}{\tau^s} = V(A), \quad N_\tau(A) = \tau^s V(A) + o(\tau^s). \tag{4}$$

Для прямоугольной области $A = [-t, t]^s$ принцип Гаусса легко уточнить для произвольной решётки Λ.

Лемма 1. *При $t\to\infty$ для количества $N_s(t|\Lambda)$ точек произвольной решётки Λ, лежащих в s-мерном кубе $G_s(t) = [-t, t]^s$, справедлива асимптотическая формула*

$$N_s(t|\Lambda) = \frac{2^s t^s}{\det\Lambda}\left(1 + \Theta\frac{\Delta(\Lambda)}{2t}\right)^s, \tag{5}$$

где $\Delta(\Lambda) = \max\limits_{k=1,\dots,s} \sum_{j=1}^s |\lambda_{j\,k}|$, $|\Theta| \leqslant 1$ и $t > \Delta(\Lambda)$.

Доказательство. Пусть $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1\,1}, \dots, \lambda_{1\,s}), \dots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s\,1}, \dots, \lambda_{s\,s})$ произвольный базис решётки Λ. Тогда

$$N_s(t|\Lambda) = \sum_{\vec{m}\in M(t|\Lambda)} 1, \tag{6}$$

где множество $M(t|\Lambda)$ целочисленных векторов $\vec{m}$ задается равенством

$$M(t|\Lambda) = \left\{ \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \middle| t \geqslant \sum_{j=1}^{s} \lambda_{j\,i} m_j \geqslant -t \qquad (1 \leqslant i \leqslant s) \right\}. \tag{7}$$

Для любого целого m и действительного $y \in \left[m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\right)$ выполняется равенство $m = \left[y + \frac{1}{2}\right] = y + \frac{1}{2} - \left\{y + \frac{1}{2}\right\}$, причём это равенство выполняется только для таких y. Отсюда следует, что

$$N_s(t|\Lambda) = \sum_{\vec{m} \in M(t|\Lambda)} 1 = \sum_{\vec{m} \in M(t|\Lambda)} \int\limits_{m_1 - \frac{1}{2}}^{m_1 + \frac{1}{2}} \ldots \int\limits_{m_s - \frac{1}{2}}^{m_s + \frac{1}{2}} dy_1 \ldots dy_s = \int\limits_{\Omega(t|\Lambda)} \ldots \int dy_1 \ldots dy_s, \tag{8}$$

где область интегрирования $\Omega(t|\Lambda)$ задается равенством

$$\Omega(t|\Lambda) = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^s \middle| t \geqslant \sum_{j=1}^{s} \lambda_{j\,i} \left[y_j + \frac{1}{2} \right] \geqslant -t \qquad (1 \leqslant i \leqslant s) \right\} =$$

$$= \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^s \middle| t \geqslant \sum_{j=1}^{s} \lambda_{j\,i} y_j + \sum_{j=1}^{s} \lambda_{j\,i} \left(\frac{1}{2} - \left\{ y_j + \frac{1}{2} \right\} \right) \geqslant -t \quad (1 \leqslant i \leqslant s) \right\}. \tag{9}$$

Положим

$$\Delta(\Lambda) = \max_{k=1,\ldots,s} \sum_{j=1}^{s} |\lambda_{j\,k}|. \tag{10}$$

Тогда справедливо вложение

$$\Omega(t|\Lambda) \subset \Omega_1(t|\Lambda),$$

$$\Omega_1(t|\Lambda) = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^s \middle| t + \frac{\Delta(\Lambda)}{2} \geqslant \sum_{j=1}^{s} \lambda_{j\,k} y_j \geqslant -t - \frac{\Delta(\Lambda)}{2} \quad (k = 1, \ldots, s) \right\}. \tag{11}$$

Делая замену переменных $x_k = \sum_{j=1}^{s} \lambda_{j\,k} y_j$ $(k = 1, \ldots, s)$ с Якобианом $|J| = \det \Lambda$, получим

$$N_s(t|\Lambda) \leqslant \int\limits_{\Omega_1(t|\Lambda)} \ldots \int dy_1 \ldots dy_s = (\det \Lambda)^{-1} \int\limits_{-t - \frac{\Delta(\Lambda)}{2}}^{t + \frac{\Delta(\Lambda)}{2}} \ldots \int\limits_{-t - \frac{\Delta(\Lambda)}{2}}^{t + \frac{\Delta(\Lambda)}{2}} dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= (\det \Lambda)^{-1} (2t + \Delta(\Lambda))^s. \tag{12}$$

Для получения нижней оценки, вернемся к равенству (8) и построим при $t > \Delta(\Lambda)$ область $\Omega_2(t|\Lambda) \subset \Omega(t|\Lambda)$. Прежде всего заметим, что, если

$$t \geqslant \sum_{j=1}^{s} \lambda_{j\,i} y_j + \frac{1}{2} \Delta(\Lambda),$$

то

$$t \geqslant \sum_{j=1}^{s} \lambda_{j\,\pi(1)} \left[y_j + \frac{1}{2} \right].$$

Аналогично, из
$$\sum_{j=1}^{s}\lambda_{j\,i}y_j-\frac{1}{2}\Delta(\Lambda)\geqslant -t$$
следует
$$\sum_{j=1}^{s}\lambda_{j\,i}\left[y_j+\frac{1}{2}\right]\geqslant -t.$$
Указанные соотношения позволяют утверждать, что в качестве $\Omega_2(t|\Lambda)$ можно взять область, заданную равенством
$$\Omega_2(t|\Lambda)=\left\{\vec{y}\in\mathbb{R}^s\,\middle|\,t-\frac{1}{2}\Delta(\Lambda)\geqslant\sum_{j=1}^{s}\lambda_{j\,i}y_j\geqslant -t+\frac{1}{2}\Delta(\Lambda)\quad(1\leqslant i\leqslant s)\right\}. \qquad (13)$$
Снова делая замену переменных $x_k=\sum_{j=1}^{s}\lambda_{j\,k}y_j$ $(k=1,\ldots,s)$ с Якобианом $|J|=\det\Lambda$, получим
$$N_s(t|\Lambda)=\int\limits_{\Omega(t|\Lambda)}\!\!\ldots\!\int dy_1\ldots dy_s\geqslant\int\limits_{\Omega_2(t|\Lambda)}\!\!\ldots\!\int dy_1\ldots dy_s=$$
$$=(\det\Lambda)^{-1}\int\limits_{-t+\frac{\Delta(\Lambda)}{2}}^{t-\frac{\Delta(\Lambda)}{2}}\ldots\int\limits_{-t+\frac{\Delta(\Lambda)}{2}}^{t-\frac{\Delta(\Lambda)}{2}}dx_1\ldots dx_s=(\det\Lambda)^{-1}(2t-\Delta(\Lambda))^s. \qquad (14)$$
Из верхней и нижней оценок количества точек решётки следует утверждение леммы. □

Если через $N_1(t\Lambda)$ обозначить количество точек сетки $M_1(t\Lambda)=(t\Lambda)^*\cap[-1;1)^s$, то из доказанной леммы сразу следует, что
$$N_1(t\Lambda)=2^st^s\det\Lambda\left(1+\Theta\frac{\Delta(\Lambda^*)}{2t}\right)^s$$
при $t>\Delta(\Lambda^*)$.

1.2. Алгебраические сетки

В 1976 году вышла работа [39] К. К. Фролова, в которой впервые появились алгебраические сетки. Наиболее полно в авторском изложении метод Фролова представлен в его кандидатской диссертации [40]. Позднее в работах [12] — [17] Н. М. Добровольский предложил модификацию метода Фролова с использованием специальных весовых функций. Современное, полное изложение метода Фролова и его модификации по Н. М. Добровольскому дается в работах [5] — [8], [37].

Пусть $\vec{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен
$$P_{\vec{a}}(x)=\sum_{\nu=0}^{s-1}a_\nu x^\nu+x^s \qquad (15)$$
неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни Θ_ν $(\nu=1,\ldots,s)$ многочлена (15) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\ldots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Напомним, что

$$\lambda_1(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_1 = \max_{0\leqslant k\leqslant s-1} \left(|\Theta_1|^k + \ldots + |\Theta_s|^k\right),$$
$$\lambda_2(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_2 = \max_{\nu=1,\ldots,s} (1 + |\Theta_\nu| + \ldots + |\Theta_\nu^{s-1}|) = \|T^\top(\vec{a})\|_1,$$

где $T^\top$ — транспонированная матрица к матрице T.

Тогда параллелепипед

$$\Pi_s(T_1) = \left\{\vec{x}\,\middle|\, |t_{\nu 1}x_1 + \ldots + t_{\nu s}x_s| \leqslant \frac{1}{2} \quad (\nu = 1, \ldots, s)\right\} =$$
$$= \left\{\vec{x}\,\middle|\, \|\vec{x}\cdot T_1^\top\|_1 \leqslant \frac{1}{2}\right\},$$

задаваемый матрицей

$$T_1 = (t_{\nu\mu})_{1\leqslant\nu,\mu\leqslant s} = T_1(\vec{a}) = \frac{1}{2\|T(\vec{a})\|_1}\cdot T(\vec{a}), \qquad (17)$$

содержит $s-$мерный куб

$$K_s = \{\vec{x}\,|\,|x_\nu| \leqslant 1, \quad \nu = 1, \ldots, s\} = \{\vec{x}\,|\,\|\vec{x}\|_1 \leqslant 1\},$$

где $\|\vec{x}\|_1 = \max\limits_{\nu=1,\ldots,s} |x_\nu|$, поскольку $\|T(\vec{a})\cdot\vec{x}\|_1 \leqslant \|T(\vec{a})\|_1 \cdot \|\vec{x}\|_1$, то есть

$$\max_{\substack{|x_\nu|\leqslant 1\\ \nu=1,\ldots,s}} \left|\Theta_1^k x_1 + \ldots + \Theta_s^k x_s\right| \leqslant |\Theta_1|^k + \ldots + |\Theta_s|^k,\ (k = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t\cdot T(\vec{a})) = \left\{\vec{x} = \left(t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_1^{\nu-1}m_\nu, \ldots, t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_s^{\nu-1}m_\nu\right) = t\cdot\vec{m}\cdot T(\vec{a})\,\middle|\, \vec{m}\in\mathbb{Z}^s\right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t\cdot(\Theta_1^{\nu-1}, \ldots, \Theta_s^{\nu-1})$ $(\nu = 1, \ldots, s)$. Нетрудно видеть, что для натуральных t справедливо соотношение

$$\Lambda(t\cdot T(\vec{a})) \cap \mathbb{Z}^s = \{t(m, \ldots, m)|m\in\mathbb{Z}\}.$$

Так как координаты любой ненулевой точки $\vec{x}\in\Lambda(T(\vec{a}))$ — алгебраически сопряженные целые алгебраические числа, то произведение $x_1\ldots x_s$ — ненулевое целое рациональное число.

Кроме этого, если T — произвольная невырожденная матрица и $T^* = (T^{-1})^\top$, то решётки $\Lambda(T)$ и $\Lambda(T^*)$ — взаимные решётки: $\Lambda^*(T) = \Lambda(T^*)$.

Для алгебраических решёток и сама решётка, и её взаимная решётка не имеют ненулевых точек с нулевым произведением координат. Для обоснования этого достаточно показать, что координаты любой ненулевой точки взаимной решётки для алгебраической решётки образуют полный набор алгебраически сопряженных чисел из одного и того же алгебраического чисто вещественного поля степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Обозначим через $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)} = \mathbb{Q}(\Theta_\nu)$ — алгебраическое расширение степени s поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ ($\nu = 1, \ldots, s$). Так как все корни неприводимого многочлена $P_{\vec{a}}(x)$ — действительные числа, то мы имеем набор из s изоморфных чисто вещественных алгебраических полей степени s. Из предыдушего следует, что каждая строка матрицы $T(\vec{a})$ состоит из полного набора алгебраически сопряженных чисел, а все элементы ν-ого столбца матрицы принадлежат одному и тому же алгебраическому полю $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)}$ ($\nu = 1, \ldots, s$). Так как точки решётки $\Lambda(T(\vec{a}))$ — целочисленные линейные комбинации строк матрицы $T(\vec{a})$, то координаты каждой точки $\vec{x} \in \Lambda(T(\vec{a}))$ — полный набор алгебраически сопряженных чисел, а ν-ая координата для любой точки этой решётки принадлежат одному и тому же алгебраическому полю $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)}$ ($\nu = 1, \ldots, s$).

Покажем, что этим свойством обладает и взаимная решётка.

Как обычно,[1] $\sigma_j(\vec{\Theta}) = (-1)^j a_{s-j}$ — элементарные симметрические многочлены степени j от корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$ ($0 \leqslant j \leqslant s$).

Лемма 2. *Пусть* $S_j(\vec{\Theta}) = \sum\limits_{\nu=1}^{s} \Theta_\nu^j$, $j \geqslant 0$ *и симметрическая матрица* $Q(\vec{a})$ *задана равенством*

$$Q(\vec{a}) = \begin{pmatrix} S_0(\vec{\Theta}) & \ldots & S_{s-1}(\vec{\Theta}) \\ S_1(\vec{\Theta}) & \ldots & S_s(\vec{\Theta}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{s-1}(\vec{\Theta}) & \ldots & S_{2s-2}(\vec{\Theta}) \end{pmatrix},$$

тогда $Q(\vec{a})$ *— невырожденная симметрическая рациональная матрица и справедливо равенство* $Q(\vec{a}) = T(\vec{a}) \cdot T(\vec{a})^\top$.

Доказательство. См. [37]. $\square$

Замечание 1. *Так как все корни* Θ_ν ($\nu = 1, \ldots, s$) *многочлена (15) целые алгебраические числа, то матрица* $Q(\vec{a})$ *будет невырожденной симметрической целочисленной матрицей, так как симметрические степенные суммы корней целочисленно рекуррентно выражаются через элементарные симметрические функции корней по формулам Ньютона (см. [25], стр. 331), которые являются целыми числами.*

Обозначим через $U_{\nu\, j}(\vec{\Theta})$ элементы матрицы $Q(\vec{a})^{-1}$. Ясно, что из симметричности функций $S_j(\vec{\Theta})$ вытекает симметричность функций $U_{\nu\, j}(\vec{\Theta})$.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$T^*(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\,k}(\vec{\Theta})\Theta_1^{k-1} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\,k}(\vec{\Theta})\Theta_s^{k-1} \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\,k}(\vec{\Theta})\Theta_1^{k-1} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\,k}(\vec{\Theta})\Theta_s^{k-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\,k}(\vec{\Theta})\Theta_1^{k-1} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\,k}(\vec{\Theta})\Theta_s^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. См. [37]. $\square$

[1] здесь пользуемся естественным соглашение, что $a_s = 1$.

Лемма 4. *Произвольная точка $\vec{x}$ решетки $\Lambda(T^*(\vec{a}))$ имеет вид:*

$$\vec{x}=\left(\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{s}U_{\nu\,k}(\vec{\Theta})m_\nu\right)\Theta_1^{k-1},\ldots,\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{s}U_{\nu\,k}(\vec{\Theta})m_\nu\right)\Theta_s^{k-1}\right),$$

где $m_1,\ldots,m_s$ — произвольные целые числа.

Доказательство. См. [37]. □

Лемма 5. *Пусть $t(\vec{\Theta})$ — наименьший общий знаменатель для рациональных чисел $S_0(\vec{\Theta})$,…,$S_{s-1}(\vec{\Theta})$, точка $\vec{x}$ решётки $\Lambda(T^*(\vec{a}))$ будет целочисленной тогда, и только тогда, когда $\vec{x}$ имеет вид: $\vec{x}=t(\vec{\Theta})\cdot(m,\ldots,m)$ и m — целое число.*

Других точек $\vec{x}$ решётки $\Lambda(T^*(\vec{a}))$, у которых хотя бы одна координата рациональная, не существует.

Доказательство. См. [37]. □

Замечание 2. *В силу замечания* 1 величина $t(\vec{\Theta})=1$, поэтому целочисленные точки решётки $\Lambda(T^*(\vec{a}))$ все имеют вид $\vec{x}=(m,\ldots,m)$ и m — целое число.

Замечание 3. *Справедливо равенство*

$$(1,\ldots,1)=\left(\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{s}U_{\nu\,k}(\vec{\Theta})S_{\nu-1}(\Theta)\right)\Theta_1^{k-1},\ldots,\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{s}U_{\nu\,k}(\vec{\Theta})S_{\nu-1}(\Theta)\right)\Theta_s^{k-1}\right).$$

Действительно, из определения обратной матрицы имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{s}U_{\nu\,k}(\vec{\Theta})S_{\nu-1}(\Theta)=\delta_{k1}=\begin{cases}1, & \text{при } k=1,\\ 0, & \text{при } k\neq 1\end{cases},$$

где δ_{k1} — дельта Кронекера. Отсюда следует данное равенство.

Таким образом, $\vec{1}\in\Lambda(T^*(\vec{a}))$.

Квадратурные формулы с алгебраическими сетками и весовыми функциями имеют следующий вид:

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(\vec{x})d\vec{x}=(\det\Lambda)^{-1}\sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda)}\rho_{\vec{x}}f(\vec{x})-R_{N'(\Lambda)}[f],$$

где $\Lambda=t\cdot\Lambda(T)$, $M'(\Lambda)=M'(t\cdot\Lambda(T))$, $\det\Lambda=\det(t\cdot\Lambda(T))=t^s\det(\Lambda(T))$. Нетрудно видеть, что погрешность $R_{N'(\Lambda)}[f]$ выражается через ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ следующим образом:

$$R_{N'(t\cdot\Lambda(T))}[f]=C(\vec{0})\left((\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1}\sum_{\vec{x}\in M'(t\cdot\Lambda(T))}\left(\sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x},\,\vec{y}\in M_1(t\cdot\Lambda(T))}\rho(\vec{y})\right)-1\right)+$$
$$+\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})\,(\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1}\sum_{\vec{x}\in M'(t\cdot\Lambda(T))}\left(\sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x},\,\vec{y}\in M_1(t\cdot\Lambda(T))}\rho(\vec{y})\right)e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Из леммы 5 вытекает очень важное свойство точек алгебраической сетки. Обозначим через $\Pi(\vec{\varepsilon})$ сдвинутые единичные s-мерные кубы $\Pi(\vec{\varepsilon})=\prod_{\nu=1}^{s}[-\varepsilon_\nu;1-\varepsilon_\nu)$, $\varepsilon_\nu=0,1$

$(\nu = 1, \ldots, s)$. Ясно, что $[-1;1)^s = \bigcup\limits_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=0}^{1} \Pi(\vec{\varepsilon})$ и в силу замечания 3 справедливо равенство $\left((t \cdot \Lambda(T))^* \cap \Pi(\vec{1})\right) + \vec{1} = (t \cdot \Lambda(T))^* \cap \Pi(\vec{0})$. Квадратурную формулу с алгебраической сеткой и весовой функцией можно переписать в следующем виде:

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=0}^{1} \sum_{\vec{x} \in (t\cdot\Lambda(T))^* \cap \Pi(\vec{\varepsilon})} \rho(\vec{x}) f(\{\vec{x}\}) - R_{N'(t\cdot\Lambda(T))}[f],$$

а для погрешности будет справедлива формула

$$R_{N'(t\cdot\Lambda(T))}[f] = C(\vec{0}) \left((\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=0}^{1} \sum_{\vec{x} \in (t\cdot\Lambda(T))^* \cap \Pi(\vec{\varepsilon})} \rho(\vec{x}) - 1 \right) +$$

$$+ \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) \, (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=0}^{1} \sum_{\vec{x} \in (t\cdot\Lambda(T))^* \cap \Pi(\vec{\varepsilon})} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i (\vec{m},\vec{x})}.$$

1.3. Тригонометрические суммы сетки с весами

Совокупность $M \subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)) \quad (k = 1 \ldots N)$ называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

Для произвольных целых $m_1,\ldots, m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots, m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots, m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + \ldots + m_s \xi_s(k)]}, \tag{18}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Будем также рассматривать *нормированные тригонометрические суммы сетки с весами*

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots, m_s) = \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots, m_s).$$

Положим $\rho(M) = \sum\limits_{j=1}^{N} |\rho_j|$, тогда для всех нормированных тригонометрических сумм сетки с весами справедлива тривиальная оценка

$$|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \frac{1}{N} \rho(M). \tag{19}$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто тригонометрическая сумма сетки и писать $S_M(\vec{m})$ и нормированная тригонометрическая сумма сетки $S^*_M(\vec{m})$.

Пусть q — натуральное число больше 1 и $q_1 = \left[\frac{q-1}{2}\right]$, $q_2 = \left[\frac{q}{2}\right]$, тогда множество $\{-q_1, \ldots, q_2\}$ является полной системой вычетов по модулю q.

Пусть матрица $T = T(\vec{a})$ и $t > 0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t) = M'(t \cdot \Lambda(T))$ из $N'(t \cdot \Lambda(T))$ узлов $\vec{x}_k$ $(k = 1, \ldots, N'(t \cdot \Lambda(T)))$ с весами

$$\rho_k = \rho_{\vec{x}_k} = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\{\vec{y}\} = \vec{x}_k, \, \vec{y} \in M_1(t\cdot\Lambda(T))} \rho(\vec{y})$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1}\sum_{\vec{x}\in M(t)}\left(\sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x},\,\vec{y}\in M_1(t\cdot\Lambda(T))}\rho(\vec{y})\right)e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Заметим, что определение тригонометрической суммы алгебраической сетки с весами несколько отличается от общего случая, но это не вызывает недоразумений в дальнейшем. В силу замечаний сделанных выше, тригонометрическую сумму с весами алгебраической сетки можно переписать следующим образом:

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=0}^{1}\ \sum_{\vec{x}\in(t\cdot\Lambda(T))^*\cap\Pi(\vec{\varepsilon})}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Лемма 6. *Для любого действительного σ выполняется неравенство*

$$\left|\int_{-1}^{1}(1-|x|)e^{2\pi i\sigma x}dx\right| \leqslant (\overline{\sigma})^{-2}, \tag{20}$$

где $\overline{\sigma} = \max(1, |\sigma|)$.

Доказательство. См. [37]. □

Из этой леммы вытекает, что функция $\rho_1(x)$ является весовой функцией порядка 2.

Лемма 7. *Пусть функция $\rho_r(x)$ определена равенствами*

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x|\geqslant 1,\\ 1-(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\sum\limits_{\nu=0}^{r-1}C_{r-1}^{\nu}\dfrac{(-1)^{\nu}}{r+\nu}x^{r+\nu}, & \text{при } 0\leqslant x<1,\\ 1-(-1)^r(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\sum\limits_{\nu=0}^{r-1}C_{r-1}^{\nu}\dfrac{1}{r+\nu}x^{r+\nu}, & \text{при } -1<x<0 \end{cases}. \tag{21}$$

Тогда для любого действительного числа σ и интеграла

$$I_r(\sigma) = \int_{-1}^{1}\rho_r(x)e^{2\pi i\sigma x}dx$$

выполняется оценка

$$|I_r(\sigma)| \leqslant \frac{B(r)}{\overline{\sigma}^{r+1}} \tag{22}$$

и функция $\rho_r(x)$ — весовая функция порядка $r+1$ с константой $B(r)$, где

$$B(r) = \frac{(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}}{\pi(2\pi)^r}\sup_{|\sigma|>1}\left|\left(P_{r-1}(1)e^{2\pi i\sigma} - P_{r-1}(0)\right) - \int_0^1 P_{r-1,r}(x)e^{2\pi i\sigma x}dx\right|,$$

и при $0\leqslant\nu\leqslant r-1$ имеем:

$$\left(((1-x)x)^{r-1}\right)^{(\nu)} = ((1-x)x)^{r-1-\nu}P_{\nu}(x),$$

где

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_{\nu+1}(x) = \nu(1-2x)P_\nu(x) + x(1-x)P'_\nu(x) \quad (\nu = 0, \ldots, r-2),$$
$$P_{r-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu C_{r-1}^\nu \prod_{k=0}^{r-2}(r-1+\nu-k)x^\nu,$$

и при $r \leqslant \nu \leqslant 2r-2$ имеем:

$$\left(((1-x)x)^{r-1}\right)^{(\nu)} = P_{r-1,\nu}(x), \quad P_{r-1,r}(x) = P'_{r-1}(x),$$
$$P_{r-1,\nu}(x) = \sum_{\mu=\nu+1-r}^{r-1}(-1)^\mu C_{r-1}^\mu \prod_{k=0}^{\nu-1}(r-1+\mu-k)x^{r-1+\mu-\nu} =$$
$$= P'_{r-1,\nu-1}(x) = P_{r-1}^{(\nu-r+1)}(x),$$
$$P_{r-1,2r-2}(x) = (-1)^{r-1}(2r-2)!.$$

Доказательство. См. [37]. □

Заметим, что в работе [37] установлено, что весовая функция $\rho_r(x)$ порядка $r+1$ является неотрицательной функцией. В этой работе мы будем все весовые функции, не оговаривая это специально, предполагать неотрицательными.

Лемма 8. *Пусть функции $f_1(\vec{x})$ и $f_2(\vec{x})$ определены для всех $\vec{x} \in M$. Тогда для тригонометрической суммы сетки M с весами $\rho(\vec{x})$ справедливо равенство*

$$\sum_{\vec{x}\in M}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(f_1(\vec{x})+f_2(\vec{x}),\vec{m})} = \sum_{\vec{x}\in M}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(f_1(\vec{x}),\vec{m})} + 2\pi\theta\sum_{\vec{x}\in M}\rho(\vec{x})|(f_2(\vec{x}),\vec{m})|,$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

Доказательство. Так как, очевидно,

$$\left|e^{2\pi i(f_2(\vec{x}),\vec{m})} - 1\right| = 2|\sin\pi(f_2(\vec{x}),\vec{m})|,$$

то

$$\left|\sum_{\vec{x}\in M}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(f_1(\vec{x})+f_2(\vec{x}),\vec{m})} - \sum_{\vec{x}\in M}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(f_1(\vec{x}),\vec{m})}\right| = \left|\sum_{\vec{x}\in M}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(f_1(\vec{x}),\vec{m})}\left(e^{2\pi i(f_2(\vec{x}),\vec{m})} - 1\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\vec{x}\in M}\rho(\vec{x})\left|e^{2\pi i(f_2(\vec{x}),\vec{m})} - 1\right| \leqslant 2\pi\sum_{\vec{x}\in M}\rho(\vec{x})|(f_2(\vec{x}),\vec{m})|$$

и, следовательно,

$$\sum_{\vec{x}\in M}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(f_1(\vec{x})+f_2(\vec{x}),\vec{m})} = \sum_{\vec{x}\in M}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(f_1(\vec{x}),\vec{m})} + 2\pi\theta\sum_{\vec{x}\in M}\rho(\vec{x})|(f_2(\vec{x}),\vec{m})|,$$

где $|\theta| \leqslant 1$. □

Теорема 4. *Для алгебраической решётки $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ и произвольной весовой функции $\rho(\vec{x})$ справедливо равенство*[2]

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + {\sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}}' \int_{-1}^{1}\ldots\int_{-1}^{1}\rho(\vec{y})e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m}-\vec{x})}d\vec{y}, \tag{23}$$

[2]Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

где

$$\delta(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{m} = \vec{0}; \\ 0, & \text{при } \vec{m} \neq \vec{0},\ \vec{m} \in \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Доказательство. См. [32]. □

С помощью леммы 6 доказываются следующие теоремы.

Теорема 5. *При $t \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right). \tag{24}$$

Доказательство. См. [32]. □

Теорема 6. *При $t \to \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^2 \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right). \tag{25}$$

Доказательство. См. [32]. □

1.4. Основные цели работы

В работе [11] была сформулирована без доказательств следующая обобщённая теорема Н. М. Коробова, которая является обобщением теоремы 35 из монографии [23] (см. стр. 205).

Теорема 7. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*

$$R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$
$$= C(\vec{0})\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \tag{26}$$

и при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда и только тогда, когда взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s–мерном кубе.

Цель данной работы — доказать теорему 7, предварительно дав определение равномерного распределения в единичном кубе взвешенных узлов квадратурной формулы, сформулировав и доказав обобщённый критерий Г. Вейля.

2. Равномерное распределение в единичном кубе взвешенных узлов квадратурной формулы

Как указано в монографии [23] на странице 210: "В теории равномерного распределения рассматриваются различные характеристики степени равномерности распределения точек ...". Мы рассмотрим новую характеристику — отклонение сетки с весами.

Пусть $\vec{\gamma} \in \overline{G}_s$ и $\chi_{\vec{\gamma}}(\vec{x})$ — характеристическая функция s-мерного прямоугольного параллелепипеда $\Pi(\vec{\gamma}) = \prod_{\nu=1}^{s}[0;\gamma_\nu)$. Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \chi_{\vec{\gamma}}(\vec{x}) d\vec{x} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} \chi_{\vec{\gamma}}(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[\chi_{\vec{\gamma}}] \tag{27}$$

с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$.

Определение 4. *Величину $D(\Lambda, \rho(\vec{x}), \vec{\gamma})$ заданную равенством*

$$D(\Lambda, \rho(\vec{x}), \vec{\gamma}) = |R_{N'(\Lambda)}[\chi_{\vec{\gamma}}]| \tag{28}$$

назовём локальным отклонением обобщенной параллелепипедальной сетки II типа $M'(\Lambda)$ с весовой функцией $\rho(\vec{x})$ в точке $\vec{\gamma}$.

Определение 5. *Величину $D(\Lambda, \rho(\vec{x}))$ заданную равенством*

$$D(\Lambda, \rho(\vec{x})) = \sup_{\vec{\gamma} \in \overline{G}_s} |R_{N'(\Lambda)}[\chi_{\vec{\gamma}}]| \tag{29}$$

назовём отклонением обобщенной параллелепипедальной сетки II типа $M'(\Lambda)$ с весовой функцией $\rho(\vec{x})$.

Рассмотрим возрастающую последовательность натуральных чисел $1 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ такую, что $t_\nu | t_{\nu+1}$ для любого $\nu \geqslant 1$. Таким образом, имеем $\lim\limits_{\nu \to \infty} t_\nu = \infty$. Ясно, что для любой решётки Λ получаем последовательность вложенных решёток:

$$\Lambda \supset t_1\Lambda \supset t_2\Lambda \supset \ldots \supset t_n\Lambda \supset \ldots,$$
$$\Lambda^* \subset (t_1\Lambda)^* \subset (t_2\Lambda)^* \subset \ldots \subset (t_n\Lambda)^* \subset \ldots.$$

Отсюда следует, что мы имеем и последовательность вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток II типа $M'(t_n\Lambda)$:

$$M'(\Lambda) \subset M'(t_1\Lambda) \subset M'(t_2\Lambda) \subset \ldots \subset M'(t_n\Lambda) \subset \ldots.$$

Определение 6. *Последовательность вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток II типа $M'(t_n\Lambda)$ равномерно распределена в единичном s-мерном кубе G_s с весовой функцией $\rho(\vec{x})$, если*

$$\lim_{\nu \to \infty} D(t_\nu\Lambda, \rho(\vec{x})) = 0. \tag{30}$$

Определения 4, 5 и 6 можно перенести и на случай произвольных сеток с весами. Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \chi_{\vec{\gamma}}(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{x} \in M} \rho_{\vec{x}} \chi_{\vec{\gamma}}(\vec{x}) - R_N[\chi_{\vec{\gamma}}] \tag{31}$$

с произвольной сеткой M из N точек и весовой функцией $\rho(\vec{x})$.

Определение 7. *Величину $D(M, \rho(\vec{x}), \vec{\gamma})$ заданную равенством*

$$D(M, \rho(\vec{x}), \vec{\gamma}) = |R_N[\chi_{\vec{\gamma}}]| \tag{32}$$

назовём локальным отклонением сетки M с весовой функцией $\rho(\vec{x})$ в точке $\vec{\gamma}$.

Определение 8. *Величину $D(M,\rho(\vec{x}))$ заданную равенством*

$$D(M,\rho(\vec{x})) = \sup_{\vec{\gamma}\in\overline{G}_s} |R_N[\chi_{\vec{\gamma}}]| \tag{33}$$

назовём отклонением сетки M с весовой функцией $\rho(\vec{x})$.

Рассмотрим последовательность сеток M_n с возрастающей последовательность числа точек $N_1 < N_2 < \ldots < N_n < \ldots$.

Определение 9. *Последовательность сеток M_n равномерно распределена в единичном s-мерном кубе G_s с весовой функцией $\rho(\vec{x})$, если*

$$\lim_{\nu\to\infty} D(M_\nu,\rho(\vec{x})) = 0. \tag{34}$$

3. Аналог обобщённого критерия Г. Вейля

Для доказательства аналога обобщённого критерия Г. Вейля нам потребуется лемма из монографии [23] (см. стр. 165 — 166). Мы будем использовать немного другие обозначения чем в этой монографии, так как нам предстоит доказывать многомерный аналог критерия Г. Вейля.

Пусть $0 < \gamma_\nu < 1$ и $0 < \varepsilon < \min(\gamma_\nu, 1-\gamma_\nu)$ $(\nu = 1,\ldots,s)$. Определим непрерывные на $[0;1]$ функции $\psi_{1,\nu}(x)$ и $\psi_{2,\nu}(x)$ $(\nu = 1,\ldots,s)$ с помощью равенств

$$\psi_{1,\nu}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}x, & \text{если } 0 \leqslant x < \varepsilon,\\ 1, & \text{если } \varepsilon \leqslant x < \gamma_\nu - \varepsilon,\\ \frac{1}{\varepsilon}(\gamma_\nu - x), & \text{если } \gamma_\nu - \varepsilon \leqslant x < \gamma_\nu,\\ 0, & \text{если } \gamma_\nu \leqslant x < 1; \end{cases}$$

$$\psi_{2,\nu}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x < \gamma_\nu,\\ \frac{1}{\varepsilon}(\gamma_\nu + \varepsilon - x), & \text{если } \gamma_\nu \leqslant x < \gamma_\nu + \varepsilon,\\ 0, & \text{если } \gamma_\nu + \varepsilon \leqslant x < 1 - \varepsilon,\\ \frac{1}{\varepsilon}(x + \varepsilon - 1), & \text{если } 1 - \varepsilon \leqslant x < 1, \end{cases} \tag{35}$$

которые периодически с периодом 1 продолжаются до непрерывных функций на всей числовой оси.

Лемма 9. *Справедливы неравенства*

$$0 < \gamma_1\ldots\gamma_s - \prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu - \varepsilon) < s\varepsilon, \tag{36}$$

$$0 < \prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu + \varepsilon) - \gamma_1\ldots\gamma_s < s\varepsilon. \tag{37}$$

Доказательство. Действительно, левое неравенство (36) очевидно.

Далее, последовательно имеем:

$$\gamma_1\ldots\gamma_s - \prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu - \varepsilon) = \gamma_1\left(\gamma_2\ldots\gamma_s - \prod_{\nu=2}^{s}(\gamma_\nu - \varepsilon)\right) + \varepsilon\prod_{\nu=2}^{s}(\gamma_\nu - \varepsilon) <$$

$$< \gamma_2\ldots\gamma_s - \prod_{\nu=2}^{s}(\gamma_\nu - \varepsilon) + \varepsilon < \ldots < s\varepsilon.$$

Аналогично, левое неравенство (37) очевидно.

Далее, последовательно имеем:

$$\prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu+\varepsilon)-\gamma_1\ldots\gamma_s=\gamma_1\left(\prod_{\nu=2}^{s}(\gamma_\nu+\varepsilon)-\gamma_2\ldots\gamma_s\right)+\varepsilon\prod_{\nu=2}^{s}(\gamma_\nu+\varepsilon)<$$
$$<\prod_{\nu=2}^{s}(\gamma_\nu+\varepsilon)-\gamma_2\ldots\gamma_s+\varepsilon<\ldots<s\varepsilon.$$

□

Лемма 10. *Пусть $\psi_{\gamma_\nu}(x)$ — характеристическая функция интервала $[0;\gamma_\nu)$. Обозначим через $C_{1,\nu}(m)$ и $C_{2,\nu}(m)$ коэффициенты Фурье функций $\psi_{1,\nu}(x)$ и $\psi_{2,\nu}(x)$ $(\nu=1,\ldots,s)$. Тогда выполняются соотношения*

$$\psi_{1,\nu}(x)\leqslant\psi_{\gamma_\nu}(x)\leqslant\psi_{2,\nu}(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1),$$
$$C_{1,\nu}(0)=\gamma_\nu-\varepsilon,\quad C_{2,\nu}(0)=\gamma_\nu+\varepsilon,$$
$$\max(|C_{1,\nu}(m)|,|C_{2,\nu}(m)|)\leqslant\min\left(\frac{1}{\pi|m|},\frac{1}{\pi^2m^2\varepsilon}\right)$$
$$(m=\pm1,\pm2,\ldots). \tag{38}$$

Доказательство. См. [23], стр. 165–166. □.

Теорема 8. *(Первый аналог критерия Вейля). Необходимым и достаточным условием равномерного распределения в единичном s-мерном кубе G_s последовательности сеток M_n с весами является выполнение равенства*

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{N_\nu}S_{M\nu,\vec{\rho}}(\vec{m})=\lim_{\nu\to\infty}(N_\nu)^{-1}\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}=0 \tag{39}$$

при любом целом векторе $\vec{m}\neq\vec{0}$ и равенства

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{N_\nu}S_{M\nu,\vec{\rho}}(\vec{0})=\lim_{\nu\to\infty}(N_\nu)^{-1}\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho(\vec{x})=1. \tag{40}$$

Доказательство. Пусть $0<\gamma_\nu<1$ $(\nu=1,\ldots,s)$, $\psi_{\gamma_\nu}(x)$ — характеристическая функция интервала $[0;\gamma_\nu)$ и функции $\psi_{1,\nu}(x)$, и $\psi_{2,\nu}(x)$ $(\nu=1,\ldots,s)$ определены согласно равенствам (35). Тогда, очевидно, для локального отклонения сетки M_ν с весовой функцией $\rho(\vec{x})$ в точке $\vec{\gamma}$ в силу неотрицательности весовой функции справедливы соотношения

$$D(M_\nu,\rho(\vec{x}),\vec{\gamma})=N_\nu^{-1}\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho_{\vec{x}}\chi_{\vec{\gamma}}(\vec{x})-\gamma_1\ldots\gamma_s,$$

$$N_\nu^{-1}\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho_{\vec{x}}\prod_{\nu=1}^{s}\psi_{1,\nu}(x_\nu)-\gamma_1\ldots\gamma_s\leqslant D(M_\nu,\rho(\vec{x}),\vec{\gamma})\leqslant N_\nu^{-1}\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho_{\vec{x}}\prod_{\nu=1}^{s}\psi_{2,\nu}(x_\nu)-\gamma_1\ldots\gamma_s. \tag{41}$$

Предположим, что условия (39) и (40) выполняются. Выберем $N>N_0(\varepsilon)$ так, чтобы при $n=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ для любого $N_\nu>N$ выполнялись оценки

$$\max_{1\leqslant\max(|m_1|,\ldots,|m_s|)\leqslant n^3}\left|\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}\right|\leqslant\frac{\pi^s}{(\pi+2+6\ln n)^s}\varepsilon N_\nu \tag{42}$$

$$\left|\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho(\vec{x})-N_\nu\right|\leqslant\frac{\pi}{4(1+2\ln n)}\varepsilon N_\nu. \tag{43}$$

Тогда, пользуясь разложением функций $\psi_{1,\nu}(x)$ в ряды Фурье, получим

$$\prod_{\nu=1}^{s}\psi_{1,\nu}(x_\nu)=\prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu-\varepsilon)+{\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}'\prod_{\nu=1}^{s}C_{1,\nu}(m_\nu)e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

$$\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho_{\vec{x}}\prod_{\nu=1}^{s}\psi_{1,\nu}(x_\nu)-N_\nu\gamma_1\ldots\gamma_s=\prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu-\varepsilon)\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho_{\vec{x}}-N_\nu\gamma_1\ldots\gamma_s+$$
$$+{\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}'\prod_{\nu=1}^{s}C_{1,\nu}(m_\nu)\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho_{\vec{x}}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})};$$

$$\left|\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho_{\vec{x}}\prod_{\nu=1}^{s}\psi_{1,\nu}(x_\nu)-N_\nu\gamma_1\ldots\gamma_s\right|=\left|\prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu-\varepsilon)\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho_{\vec{x}}-N_\nu\gamma_1\ldots\gamma_s+\right.$$
$$\left.+{\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}'\prod_{\nu=1}^{s}C_{1,\nu}(m_\nu)\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho_{\vec{x}}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}\right|=\left|N_\nu\prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu-\varepsilon)-N_\nu\gamma_1\ldots\gamma_s+\right.$$
$$\left.+\prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu-\varepsilon)\left(\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho_{\vec{x}}-N_\nu\right)+{\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}'\prod_{\nu=1}^{s}C_{1,\nu}(m_\nu)\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho_{\vec{x}}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}\right|\leqslant$$
$$\leqslant s\varepsilon N_\nu+\frac{\pi}{4(1+2\ln n)}\varepsilon N_\nu+{\sum_{m_1,\ldots,m_s=-n^3}^{n^3}}'\prod_{\nu=1}^{s}|C_{1,\nu}(m_\nu)|\left|\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho_{\vec{x}}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}\right|+$$
$$+{\sum_{\max(|m_1|,\ldots,|m_s|)>n^3}}'\prod_{\nu=1}^{s}|C_{1,\nu}(m_\nu)|\left|\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho_{\vec{x}}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}\right|\leqslant s\varepsilon N_\nu+\frac{\pi}{4(1+2\ln n)}\varepsilon N_\nu+$$
$$+\frac{\pi^s}{(\pi+2+6\ln n)^s}\varepsilon N_\nu{\sum_{m_1,\ldots,m_s=-n^3}^{n^3}}'\prod_{\nu=1}^{s}|C_{1,\nu}(m_\nu)|+\rho(M_\nu){\sum_{\max(|m_1|,\ldots,|m_s|)>n^3}}'\prod_{\nu=1}^{s}|C_{1,\nu}(m_\nu)|.$$

Заметим, что в силу неотрицательности весовой функции справедливы неравенства

$$\left|\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho_{\vec{x}}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}\right|\leqslant\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho_{\vec{x}}=\rho(M_\nu),\quad|\rho(M_\nu)-N_\nu|\leqslant\frac{\pi}{4(1+2\ln n)}\varepsilon N_\nu$$

и, следовательно,

$$\rho(M_\nu)\leqslant N_\nu+\frac{\pi}{4(1+2\ln n)}\varepsilon N_\nu.$$

В силу леммы 10 имеем:

$${\sum_{m_1,\ldots,m_s=-n^3}^{n^3}}'\prod_{\nu=1}^{s}|C_{1,\nu}(m_\nu)|\leqslant\prod_{\nu=1}^{s}\left(\gamma_\nu-\varepsilon+2\sum_{m=1}^{n^3}\frac{1}{\pi m}\right)-\prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu-\varepsilon)\leqslant$$
$$\leqslant\prod_{\nu=1}^{s}\left(\gamma_\nu-\varepsilon+2\frac{1+3\ln n}{\pi}\right)-\prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu-\varepsilon)<\frac{(\pi+2+6\ln n)^s}{\pi^s},$$

$$\sum_{\max(|m_1|,\ldots,|m_s|)>n^3}{}' \prod_{\nu=1}^{s} |C_{1,\nu}(m_\nu)| \leqslant \prod_{\nu=1}^{s} \left(\gamma_\nu - \varepsilon + 2\sum_{m=1}^{n^3} \frac{1}{\pi m} + 2\sum_{m=n^3+1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 m^2 \varepsilon} \right) -$$

$$- \prod_{\nu=1}^{s} \left(\gamma_\nu - \varepsilon + 2\sum_{m=1}^{n^3} \frac{1}{\pi m} \right) \leqslant \left(\frac{\pi + 2 + 6\ln n}{\pi} + \frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right)^s - \left(\frac{\pi + 2 + 6\ln n}{\pi} \right)^s =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} C_s^k \left(\frac{\pi + 2 + 6\ln n}{\pi} \right)^{s-k} \left(\frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right)^k = \sum_{k=0}^{s-1} C_s^{k+1} \left(\frac{\pi + 2 + 6\ln n}{\pi} \right)^{s-1-k} \left(\frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right)^{k+1} \leqslant$$

$$\leqslant s \left(\frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right) \left(\frac{\pi + 2 + 6\ln n}{\pi} + \frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right)^{s-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \sum_{\vec{x} \in M_\nu} \rho_{\vec{x}} \prod_{\nu=1}^{s} \psi_{1,\nu}(x_\nu) - N_\nu \gamma_1 \ldots \gamma_s \right| \leqslant s\varepsilon N_\nu + \frac{\pi}{4(1 + 2\ln n)} \varepsilon N_\nu +$$

$$+ \frac{\pi^s}{(\pi + 2 + 6\ln n)^s} \varepsilon N_\nu \cdot \frac{(\pi + 2 + 6\ln n)^s}{\pi^s} + \rho(M_\nu) \cdot s \left(\frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right) \left(\frac{\pi + 2 + 6\ln n}{\pi} + \frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right)^{s-1} \leqslant$$

$$\leqslant N_\nu \varepsilon \left(s + \frac{\pi}{4(1 + 2\ln n)} + 1 + \left(1 + \frac{\pi}{4(1 + 2\ln n)} \varepsilon \right) \cdot s \left(\frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon^2} \right) \left(\frac{\pi + 2 + 6\ln n}{\pi} + \frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right)^{s-1} \right).$$

Так как $1 < n\varepsilon < 1 + \varepsilon < 2$, $\varepsilon < \frac{1}{2}$, $n \geqslant 3$, то

$$s + \frac{\pi}{4(1 + 2\ln n)} + 1 + \left(1 + \frac{\pi}{4(1 + 2\ln n)} \varepsilon \right) \cdot s \left(\frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon^2} \right) \left(\frac{\pi + 2 + 6\ln n}{\pi} + \frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right)^{s-1} <$$

$$< s + \frac{4}{3} + \frac{7s}{24n} \left(\frac{5}{3} + 2\ln n + \frac{1}{40} \right)^{s-1} < s + 2 + \frac{2^s s}{6n} (1 + \ln n)^{s-1} \leqslant s + 2 + \frac{2^s s^s}{6e^{s-1}}.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \sum_{\vec{x} \in M_\nu} \rho_{\vec{x}} \prod_{\nu=1}^{s} \psi_{1,\nu}(x_\nu) - N_\nu \gamma_1 \ldots \gamma_s \right| \leqslant N_\nu \varepsilon \left(s + 2 + \frac{2^s s^s}{6e^{s-1}} \right).$$

Аналогично, получим

$$\left| \sum_{\vec{x} \in M_\nu} \rho_{\vec{x}} \prod_{\nu=1}^{s} \psi_{2,\nu}(x_\nu) - N_\nu \gamma_1 \ldots \gamma_s \right| = \left| \prod_{\nu=1}^{s} (\gamma_\nu + \varepsilon) \sum_{\vec{x} \in M_\nu} \rho_{\vec{x}} - N_\nu \gamma_1 \ldots \gamma_s + \right.$$

$$\left. + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \prod_{\nu=1}^{s} C_{2,\nu}(m_\nu) \sum_{\vec{x} \in M_\nu} \rho_{\vec{x}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \right| = \left| N_\nu \prod_{\nu=1}^{s} (\gamma_\nu + \varepsilon) - N_\nu \gamma_1 \ldots \gamma_s + \right.$$

$$\left. + \prod_{\nu=1}^{s} (\gamma_\nu + \varepsilon) \left(\sum_{\vec{x} \in M_\nu} \rho_{\vec{x}} - N_\nu \right) + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \prod_{\nu=1}^{s} C_{2,\nu}(m_\nu) \sum_{\vec{x} \in M_\nu} \rho_{\vec{x}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \right| \leqslant$$

$$\leqslant s\varepsilon N_\nu + \frac{\pi}{4(1+2\ln n)}\varepsilon N_\nu + \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-n^3}^{n^3} \prod_{\nu=1}^{s} |C_{2,\nu}(m_\nu)| \left| \sum_{\vec{x}\in M_\nu} \rho_{\vec{x}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \right| +$$

$$+ \sideset{}{'}\sum_{\max(|m_1|,\ldots,|m_s|)>n^3} \prod_{\nu=1}^{s} |C_{2,\nu}(m_\nu)| \left| \sum_{\vec{x}\in M_\nu} \rho_{\vec{x}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \right| \leqslant s\varepsilon N_\nu + \frac{\pi}{4(1+2\ln n)}\varepsilon N_\nu +$$

$$+ \frac{\pi^s}{(\pi+2+6\ln n)^s}\varepsilon N_\nu \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-n^3}^{n^3} \prod_{\nu=1}^{s} |C_{2,\nu}(m_\nu)| + \rho(M_\nu) \sideset{}{'}\sum_{\max(|m_1|,\ldots,|m_s|)>n^3} \prod_{\nu=1}^{s} |C_{2,\nu}(m_\nu)|.$$

В силу леммы 10 имеем:

$$\sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-n^3}^{n^3} \prod_{\nu=1}^{s} |C_{2,\nu}(m_\nu)| \leqslant \prod_{\nu=1}^{s} \left(\gamma_\nu + \varepsilon + 2\sum_{m=1}^{n^3} \frac{1}{\pi m} \right) - \prod_{\nu=1}^{s} (\gamma_\nu + \varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{\nu=1}^{s} \left(\gamma_\nu + \varepsilon + 2\frac{1+3\ln n}{\pi} \right) - \prod_{\nu=1}^{s} (\gamma_\nu + \varepsilon) < \frac{(\pi+2+6\ln n)^s}{\pi^s},$$

$$\sideset{}{'}\sum_{\max(|m_1|,\ldots,|m_s|)>n^3} \prod_{\nu=1}^{s} |C_{2,\nu}(m_\nu)| \leqslant \prod_{\nu=1}^{s} \left(\gamma_\nu + \varepsilon + 2\sum_{m=1}^{n^3} \frac{1}{\pi m} + 2\sum_{m=n^3+1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 m^2 \varepsilon} \right) -$$

$$- \prod_{\nu=1}^{s} \left(\gamma_\nu + \varepsilon + 2\sum_{m=1}^{n^3} \frac{1}{\pi m} \right) \leqslant \left(\frac{\pi+2+6\ln n}{\pi} + \frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right)^s - \left(\frac{\pi+2+6\ln n}{\pi} \right)^s =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} C_s^k \left(\frac{\pi+2+6\ln n}{\pi} \right)^{s-k} \left(\frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right)^k = \sum_{k=0}^{s-1} C_s^{k+1} \left(\frac{\pi+2+6\ln n}{\pi} \right)^{s-1-k} \left(\frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right)^{k+1} \leqslant$$

$$\leqslant s \left(\frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right) \left(\frac{\pi+2+6\ln n}{\pi} + \frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right)^{s-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \sum_{\vec{x}\in M_\nu} \rho_{\vec{x}} \prod_{\nu=1}^{s} \psi_{2,\nu}(x_\nu) - N_\nu \gamma_1 \ldots \gamma_s \right| \leqslant s\varepsilon N_\nu + \frac{\pi}{4(1+2\ln n)}\varepsilon N_\nu +$$

$$+ \frac{\pi^s}{(\pi+2+6\ln n)^s}\varepsilon N_\nu \cdot \frac{(\pi+2+6\ln n)^s}{\pi^s} + \rho(M_\nu) \cdot s \left(\frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right) \left(\frac{\pi+2+6\ln n}{\pi} + \frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right)^{s-1} \leqslant$$

$$\leqslant N_\nu \varepsilon \left(s + \frac{\pi}{4(1+2\ln n)} + 1 + \left(1 + \frac{\pi}{4(1+2\ln n)}\varepsilon \right) \cdot s \left(\frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon^2} \right) \left(\frac{\pi+2+6\ln n}{\pi} + \frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right)^{s-1} \right).$$

Так как $1 < n\varepsilon < 1+\varepsilon < 2$, $\varepsilon < \frac{1}{2}$, $n \geqslant 3$, то

$$s + \frac{\pi}{4(1+2\ln n)} + 1 + \left(1 + \frac{\pi}{4(1+2\ln n)}\varepsilon \right) \cdot s \left(\frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon^2} \right) \left(\frac{\pi+2+6\ln n}{\pi} + \frac{2}{\pi^2 n^3 \varepsilon} \right)^{s-1} <$$

$$< s + \frac{4}{3} + \frac{7s}{24n} \left(\frac{5}{3} + 2\ln n + \frac{1}{40} \right)^{s-1} < s + 2 + \frac{2^s s}{6n}(1+\ln n)^{s-1} \leqslant s + 2 + \frac{2^s s^s}{6e^{s-1}}.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \sum_{\vec{x}\in M_\nu} \rho_{\vec{x}} \prod_{\nu=1}^{s} \psi_{2,\nu}(x_\nu) - N_\nu \gamma_1 \ldots \gamma_s \right| \leqslant N_\nu \varepsilon \left(s + 2 + \frac{2^s s^s}{6e^{s-1}} \right).$$

Но тогда из (41) следует, что

$$|D(M_\nu, \rho(\vec{x}), \vec{\gamma})| \leqslant N_\nu \varepsilon \left(s + 2 + \frac{2^s s^s}{6e^{s-1}} \right)$$

и, в силу произвольной малости ε, получаем

$$\lim_{\nu\to\infty} D(M_\nu, \rho(\vec{x})) = 0,$$

чем доказана достаточность условий (39) и (40).

Докажем теперь необходимость этого условия. Действительно, пусть последовательность сеток M_n с весами равномерно распределена в единичном s-мерном кубе G_s, тогда

$$\lim_{\nu\to\infty} D(M_\nu, \rho(\vec{x})) = 0.$$

Так как справедливо равенство

$$\frac{1}{N_\nu} S_{M_\nu,\vec{\rho}}(\vec{0}) = (N_\nu)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M_\nu} \rho(\vec{x}) = 1 + R_{N_\nu}[\chi_{\vec{1}}],$$

то

$$\left| 1 - (N_\nu)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M_\nu} \rho(\vec{x}) \right| \leqslant D(M_\nu, \rho(\vec{x}))$$

и необходимость условия (40) доказана.

Зададим целый вектор $\vec{m} \neq \vec{0}$ и выберем натуральное $q > \max(|m_1|, \ldots, |m_s|) = \|\vec{m}\|_1$. Обозначим через $M_{\nu,\vec{k}}$ множество тех точек $\vec{x}$ сетки M_ν, для которых

$$\frac{k_j}{q} \leqslant x_j < \frac{k_j+1}{q} \quad (j = 1, \ldots, s). \tag{44}$$

Через $T_{\vec{k}}(\vec{m})$ обозначим сумму с весами

$$T_{\vec{k}}(\vec{m}) = \sum_{\vec{x}\in M_{\nu,\vec{k}}} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Тогда, очевидно,

$$S_{M\nu,\vec{\rho}}(\vec{m}) = \sum_{\vec{x}\in M_\nu} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} = \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} T_{\vec{k}}(\vec{m}) = \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} \sum_{\vec{x}\in M_{\nu,\vec{k}}} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Из (44) следует, что при $\vec{x} \in M_{\nu,\vec{k}}$

$$\vec{x} = \frac{\vec{k}}{q} + \frac{\vec{\theta}(\vec{x})}{q}, \quad 0 \leqslant \theta_\nu(\vec{x}) < 1 \quad (\nu = 1, \ldots, s).$$

Пользуясь леммой 8, получим

$$T_{\vec{k}}(\vec{m}) = \sum_{\vec{x}\in M_{\nu,\vec{k}}} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} + 2\pi\theta(\vec{k}) \sum_{\vec{x}\in M_{\nu,\vec{k}}} \rho(\vec{x}) \left(\vec{m}, \frac{\vec{\theta}(\vec{x})}{q}\right) =$$

$$= e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} T_{\vec{k}}(\vec{0}) + 2\pi\theta'(\vec{k}) \frac{s\|\vec{m}\|_1}{q} T_{\vec{k}}(\vec{0}),$$

где $|\theta(\vec{k})|, |\theta'(\vec{k})| \leqslant 1$. Но тогда

$$|S_{M\nu,\vec{\rho}}(\vec{m})| = \left|\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} T_{\vec{k}}(\vec{0}) + 2\pi\frac{s\|\vec{m}\|_1}{q}\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1}\theta'(\vec{k})T_{\vec{k}}(\vec{0})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} T_{\vec{k}}(\vec{0})\right| + 2\pi\frac{s\|\vec{m}\|_1}{q}\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} T_{\vec{k}}(\vec{0}) = \left|\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} T_{\vec{k}}(\vec{0})\right| +$$

$$+ S_{M\nu,\vec{\rho}}(\vec{0}) 2\pi\frac{s\|\vec{m}\|_1}{q}. \tag{45}$$

С помощью характеристических функций можно выразить $T_{\vec{k}}(\vec{0})$ следующим образом:

$$T_{\vec{k}}(\vec{0}) = \sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho(\vec{x})\prod_{j=1}^{s}\left(\psi_{\frac{k_j+1}{q}}(x_j) - \psi_{\frac{k_j}{q}}(x_j)\right) = \sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho(\vec{x})\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=0}^{1}(-1)^{s-\varepsilon_1-\ldots-\varepsilon_s}\prod_{j=1}^{s}\psi_{\frac{k_j+\varepsilon_j}{q}}(x_j) =$$

$$= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=0}^{1}(-1)^{s-\varepsilon_1-\ldots-\varepsilon_s}\left(\sum_{\vec{x}\in M_\nu}\rho(\vec{x})\chi_{\frac{\vec{k}+\vec{\varepsilon}}{q}}(\vec{x}) - N_\nu\prod_{j=1}^{s}\frac{x_j+\varepsilon_j}{q}\right) +$$

$$+ N_\nu\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=0}^{1}(-1)^{s-\varepsilon_1-\ldots-\varepsilon_s}\prod_{j=1}^{s}\frac{x_j+\varepsilon_j}{q} =$$

$$= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=0}^{1}(-1)^{s-\varepsilon_1-\ldots-\varepsilon_s}N_\nu R_{N_\nu}[\chi_{\frac{\vec{k}+\vec{\varepsilon}}{q}}] + \frac{N_\nu}{q^s} = \frac{N_\nu}{q^s} + o(N_\nu),$$

так как последовательность сеток M_n с весами равномерно распределена в единичном s-мерном кубе G_s.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $N_0(\varepsilon)$ так, что для любого $N_\nu > N_0(\varepsilon)$ при $q = \left[\frac{4\pi s\|\vec{m}\|_1}{\varepsilon}\right] + 1$ выполнялась оценка

$$\left|T_{\vec{k}}(\vec{0}) - \frac{N_\nu}{q^s}\right| \leqslant \frac{1}{3q^s}\varepsilon N_\nu.$$

Отсюда следует, что

$$|S_{M\nu,\vec{\rho}}(\vec{0}) - N_\nu| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon N_\nu$$

Замечая, что $1 \leqslant \|\vec{m}\|_1 < q$ и, следовательно,

$$\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} = 0,$$

получим

$$\left|\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} T_{\vec{k}}(\vec{0})\right| = \left|\frac{N_\nu}{q^s}\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} + \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1}\left(T_{\vec{k}}(\vec{0}) - \frac{N_\nu}{q^s}\right)e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1}\left|T_{\vec{k}}(\vec{0}) - \frac{N_\nu}{q^s}\right| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon N_\nu.$$

Но тогда, так как $q > \frac{4\pi s\|\vec{m}\|_1}{\varepsilon}$, из (45) получаем равенство (39):

$$|S_{M\nu,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon N_\nu + \left(N_\nu + \frac{1}{3}\varepsilon N_\nu\right) 2\pi \frac{s\|\vec{m}\|_1}{q} < \varepsilon N_\nu \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon\right)\right),$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{N_\nu} S_{M\nu,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 0,$$

чем теорема доказана полностью. □

Теорема 9. *(Второй аналог критерия Вейля). Необходимым и достаточным условием равномерного распределения в единичном s-мерном кубе G_s последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток II типа $M'(t_n\Lambda)$ с весовой функцией $\rho(\vec{x})$ является выполнение равенства*

$$\lim_{\nu\to\infty} S_{M(t_\nu),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \lim_{\nu\to\infty} (\det(t_\nu \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} = 0 \qquad (46)$$

при любом целом векторе $\vec{m} \neq \vec{0}$ и равенства

$$\lim_{\nu\to\infty} S_{M(t_\nu),\vec{\rho}}(\vec{0}) = \lim_{\nu\to\infty} (\det(t_\nu \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))} \rho_{\vec{x}} = 1. \qquad (47)$$

.

Доказательство. Пусть $0 < \gamma_\nu < 1$ ($\nu = 1, \ldots, s$), $\psi_{\gamma_\nu}(x)$ — характеристическая функция интервала $[0; \gamma_\nu)$ и функции $\psi_{1,\nu}(x)$, и $\psi_{2,\nu}(x)$ ($\nu = 1, \ldots, s$) определены согласно равенствам (35). Тогда, очевидно, для локального отклонения обобщенной параллелепипедальной сетки II типа $M(t_\nu)$ с весовой функцией $\rho(\vec{x})$ в точке $\vec{\gamma}$ в силу неотрицательности весовой функции справедливы соотношения

$$D(M(t_\nu), \rho(\vec{x}), \vec{\gamma}) = (\det(t_\nu \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))} \rho_{\vec{x}} \chi_{\vec{\gamma}}(\vec{x}) - \gamma_1 \ldots \gamma_s,$$

$$(\det(t_\nu \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))} \rho_{\vec{x}} \prod_{\nu=1}^{s} \psi_{1,\nu}(x_\nu) - \gamma_1 \ldots \gamma_s \leqslant$$

$$\leqslant D(M(t_\nu), \rho(\vec{x}), \vec{\gamma}) \leqslant (\det(t_\nu \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))} \rho_{\vec{x}} \prod_{\nu=1}^{s} \psi_{2,\nu}(x_\nu) - \gamma_1 \ldots \gamma_s. \qquad (48)$$

Предположим, что условия (46) и (47) выполняются. Выберем $t > t_0(\varepsilon)$ так, чтобы при $n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ для любого $t_\nu > t$ выполнялись оценки

$$\max_{1\leqslant\max(|m_1|,\ldots,|m_s|)\leqslant n^3} \left| \sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))} \rho_{\vec{x}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \right| \leqslant \frac{\pi^s}{(\pi + 2 + 6\ln n)^s} \varepsilon \det(t_\nu \cdot \Lambda(T)) \qquad (49)$$

$$\left| \sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))} \rho_{\vec{x}} - \det(t_\nu \cdot \Lambda(T)) \right| \leqslant \frac{\pi}{4(1 + 2\ln n)} \varepsilon \det(t_\nu \cdot \Lambda(T)). \qquad (50)$$

Тогда, пользуясь разложением функций $\psi_{1,\nu}(x)$ в ряды Фурье, получим

$$\prod_{\nu=1}^{s}\psi_{1,\nu}(x_\nu)=\prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu-\varepsilon)+\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'\prod_{\nu=1}^{s}C_{1,\nu}(m_\nu)e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

$$\sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}\rho_{\vec{x}}\prod_{\nu=1}^{s}\psi_{1,\nu}(x_\nu)-\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))\gamma_1\ldots\gamma_s=$$
$$=\prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu-\varepsilon)\sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}\rho_{\vec{x}}-\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))\gamma_1\ldots\gamma_s+$$
$$+\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'\prod_{\nu=1}^{s}C_{1,\nu}(m_\nu)\sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}\rho_{\vec{x}}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})};$$

$$\left|\sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}\rho_{\vec{x}}\prod_{\nu=1}^{s}\psi_{1,\nu}(x_\nu)-\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))\gamma_1\ldots\gamma_s\right|=$$
$$=\left|\prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu-\varepsilon)-\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))\gamma_1\ldots\gamma_s+\right.$$

$$\left.+\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'\prod_{\nu=1}^{s}C_{1,\nu}(m_\nu)\sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}\rho_{\vec{x}}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}\right|=\left|\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))\prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu-\varepsilon)-\right.$$
$$-\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))\gamma_1\ldots\gamma_s+\prod_{\nu=1}^{s}(\gamma_\nu-\varepsilon)\left(\sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}\rho_{\vec{x}}-\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))\right)+$$
$$\left.+\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'\prod_{\nu=1}^{s}C_{1,\nu}(m_\nu\sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}\rho_{\vec{x}}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}\right|\leqslant$$
$$\leqslant s\varepsilon\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))+\frac{\pi}{4(1+2\ln n)}\varepsilon\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))+$$
$$+\sum_{m_1,\ldots,m_s=-n^3}^{n^3}{}'\prod_{\nu=1}^{s}|C_{1,\nu}(m_\nu)|\left|\sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}\rho_{\vec{x}}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}\right|+$$
$$+\sum_{\max(|m_1|,\ldots,|m_s|)>n^3}{}'\prod_{\nu=1}^{s}|C_{1,\nu}(m_\nu)|\left|\sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}\rho_{\vec{x}}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}\right|\leqslant$$
$$\leqslant s\varepsilon\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))+\frac{\pi}{4(1+2\ln n)}\varepsilon\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))+$$
$$+\frac{\pi^s}{(\pi+2+6\ln n)^s}\varepsilon\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))\sum_{m_1,\ldots,m_s=-n^3}^{n^3}{}'\prod_{\nu=1}^{s}|C_{1,\nu}(m_\nu)|+$$
$$+\rho(M'(t_\nu\cdot\Lambda(T)))\sum_{\max(|m_1|,\ldots,|m_s|)>n^3}{}'\prod_{\nu=1}^{s}|C_{1,\nu}(m_\nu)|.$$

Заметим, что в силу неотрицательности весовой функции справедливы неравенства

$$\left|\sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}\rho_{\vec{x}}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}\right|\leqslant\sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}\rho_{\vec{x}}=\rho(M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))),$$

$$|\rho(M'(t_\nu\cdot\Lambda(T)))-\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))|\leqslant\frac{\pi}{4(1+2\ln n)}\varepsilon\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))$$

и, следовательно,

$$\rho(M'(t_\nu\cdot\Lambda(T)))\leqslant\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))+\frac{\pi}{4(1+2\ln n)}\varepsilon\det(t_\nu\cdot\Lambda(T)).$$

На странице 202 показано, что

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-n^3}^{n^3}{}'\prod_{\nu=1}^{s}|C_{1,\nu}(m_\nu)|<\frac{(\pi+2+6\ln n)^s}{\pi^s},$$

$$\sum_{\max(|m_1|,\ldots,|m_s|)>n^3}{}'\prod_{\nu=1}^{s}|C_{1,\nu}(m_\nu)|\leqslant s\left(\frac{2}{\pi^2n^3\varepsilon}\right)\left(\frac{\pi+2+6\ln n}{\pi}+\frac{2}{\pi^2n^3\varepsilon}\right)^{s-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}\rho_{\vec{x}}\prod_{\nu=1}^{s}\psi_{1,\nu}(x_\nu)-\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))\gamma_1\ldots\gamma_s\right|\leqslant\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))\varepsilon\left(s+2+\frac{2^s s^s}{6e^{s-1}}\right).$$

Аналогично, получим

$$\left|\sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}\rho_{\vec{x}}\prod_{\nu=1}^{s}\psi_{2,\nu}(x_\nu)-\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))\gamma_1\ldots\gamma_s\right|\leqslant\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))\varepsilon\left(s+2+\frac{2^s s^s}{6e^{s-1}}\right).$$

Но тогда из (48) следует, что

$$|D(M(t_\nu),\rho(\vec{x}),\vec{\gamma})|\leqslant\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))\varepsilon\left(s+2+\frac{2^s s^s}{6e^{s-1}}\right)$$

и, в силу произвольной малости ε, получаем

$$\lim_{\nu\to\infty}D(M(t_\nu),\rho(\vec{x}))=0,$$

чем доказана достаточность условий (46) и (47).

Докажем теперь необходимость этого условия. Действительно, пусть последовательность сеток M_n с весами равномерно распределена в единичном s-мерном кубе G_s, тогда

$$\lim_{\nu\to\infty}D(M(t_\nu),\rho(\vec{x}))=0.$$

Так как справедливо равенство

$$S_{M(t_\nu),\vec{\rho}}(\vec{0})=(\det(t_\nu\cdot\Lambda(T)))^{-1}\sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}\rho_{\vec{x}}=1+R_{N'(M(t_\nu))}[\chi_{\vec{1}}],$$

то

$$\left|1-(\det(t_\nu\cdot\Lambda(T)))^{-1}\sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}\rho_{\vec{x}}\right|\leqslant D(M(t_\nu),\rho(\vec{x}))$$

и необходимость условия (47) доказана.

Зададим целый вектор $\vec{m} \neq \vec{0}$ и выберем натуральное $q > \max(|m_1|, \ldots, |m_s|) = \|\vec{m}\|_1$. Обозначим через $M(t_\nu)_{\vec{k}}$ множество тех точек $\vec{x}$ сетки $M(t_\nu)$, для которых

$$\frac{k_j}{q} \leqslant x_j < \frac{k_j+1}{q} \quad (j = 1, \ldots, s). \tag{51}$$

Через $T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{m})$ обозначим сумму с весами

$$T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{m}) = \sum_{\vec{x} \in M(t_\nu)_{\vec{k}}} \rho_{\vec{x}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Тогда, очевидно,

$$S_{M(t_\nu),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t_\nu \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(t_\nu \cdot \Lambda(T))} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} =$$

$$= (\det(t_\nu \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{m}) = (\det(t_\nu \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} \sum_{\vec{x} \in M_{\nu,\vec{k}}} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Из (51) следует, что при $\vec{x} \in M(t_\nu)_{\vec{k}}$

$$\vec{x} = \frac{\vec{k}}{q} + \frac{\vec{\theta}(\vec{x})}{q}, \quad 0 \leqslant \theta_\nu(\vec{x}) < 1 \quad (\nu = 1, \ldots, s).$$

Пользуясь леммой 8, получим

$$T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{m}) = \sum_{\vec{x} \in M(t_\nu)_{\vec{k}}} \rho_{\vec{x}} e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} + 2\pi\theta(\vec{k}) \sum_{\vec{x} \in M(t_\nu)_{\vec{k}}} \rho_{\vec{x}} \left(\vec{m}, \frac{\vec{\theta}(\vec{x})}{q}\right) =$$

$$= e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{0}) + 2\pi\theta'(\vec{k}) \frac{s\|\vec{m}\|_1}{q} T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{0}),$$

где $|\theta(\vec{k})|, |\theta'(\vec{k})| \leqslant 1$. Но тогда

$$|S_{M(t_\nu),\vec{\rho}}(\vec{m})| = (\det(t_\nu \cdot \Lambda(T)))^{-1} \left| \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{0}) + 2\pi \frac{s\|\vec{m}\|_1}{q} \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} \theta'(\vec{k}) T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{0}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant (\det(t_\nu \cdot \Lambda(T)))^{-1} \left| \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{0}) \right| + 2\pi \frac{s\|\vec{m}\|_1}{q} (\det(t_\nu \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{0}) =$$

$$= (\det(t_\nu \cdot \Lambda(T)))^{-1} \left| \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{0}) \right| + S_{M(t_\nu),\vec{\rho}}(\vec{0}) 2\pi \frac{s\|\vec{m}\|_1}{q}. \tag{52}$$

С помощью характеристических функций можно выразить $T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{0})$ следующим образом:

$$T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{0}) = \sum_{\vec{x}\in M(t_\nu)_{\vec{k}}} \rho_{\vec{x}} \prod_{j=1}^{s} \left(\psi_{\frac{k_j+1}{q}}(x_j) - \psi_{\frac{k_j}{q}}(x_j)\right) =$$

$$= \sum_{\vec{x}\in M(t_\nu)_{\vec{k}}} \rho_{\vec{x}} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=0}^{1} (-1)^{s-\varepsilon_1-\ldots-\varepsilon_s} \prod_{j=1}^{s} \psi_{\frac{k_j+\varepsilon_j}{q}}(x_j) =$$

$$= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=0}^{1} (-1)^{s-\varepsilon_1-\ldots-\varepsilon_s} \left(\sum_{\vec{x}\in M(t_\nu)_{\vec{k}}} \rho_{\vec{x}} \chi_{\frac{\vec{k}+\vec{\varepsilon}}{q}}(\vec{x}) - \det(t_\nu\cdot\Lambda(T)) \prod_{j=1}^{s} \frac{x_j+\varepsilon_j}{q} \right) +$$

$$+ \det(t_\nu\cdot\Lambda(T)) \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=0}^{1} (-1)^{s-\varepsilon_1-\ldots-\varepsilon_s} \prod_{j=1}^{s} \frac{x_j+\varepsilon_j}{q} =$$

$$= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=0}^{1} (-1)^{s-\varepsilon_1-\ldots-\varepsilon_s} \det(t_\nu\cdot\Lambda(T)) R_{N'(M(t_\nu))}[\chi_{\frac{\vec{k}+\vec{\varepsilon}}{q}}] + \frac{\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))}{q^s} =$$

$$= \frac{\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))}{q^s} + o(\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))),$$

так как последовательность сеток $M(t_\nu)$ с весами равномерно распределена в единичном s-мерном кубе G_s.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $t > t_0(\varepsilon)$ так, чтобы при $n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ для любого $t_\nu > t$ при $q = \left[\frac{4\pi s\|\vec{m}\|_1}{\varepsilon}\right] + 1$ выполнялась оценка

$$\left| T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{0}) - \frac{\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))}{q^s} \right| \leqslant \frac{1}{3q^s}\varepsilon\cdot\det(t_\nu\cdot\Lambda(T)).$$

Отсюда следует, что

$$|S_{M(t_\nu),\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Замечая, что $1 \leqslant \|\vec{m}\|_1 < q$ и, следовательно,

$$\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} = 0,$$

получим

$$\left| \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{0}) \right| =$$

$$= \left| \frac{\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))}{q^s} \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} + \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} \left(T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{0}) - \frac{\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))}{q^s} \right) e^{2\pi i\left(\vec{m},\frac{\vec{k}}{q}\right)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{q-1} \left| T_{t_\nu,\vec{k}}(\vec{0}) - \frac{\det(t_\nu\cdot\Lambda(T))}{q^s} \right| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon\det(t_\nu\cdot\Lambda(T)).$$

Но тогда, так как $q > \frac{4\pi s\|\vec{m}\|_1}{\varepsilon}$, из (52) получаем равенство (46):

$$|S_{M(t_\nu),\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon + \left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon\right) 2\pi\frac{s\|\vec{m}\|_1}{q} < \varepsilon\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon\right)\right),$$

$$\lim_{\nu\to\infty} S_{M\nu,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 0,$$

чем теорема доказана полностью. □

Следствие 1. *Для любой алгебраической решётки $\Lambda(T(\vec{a}))$ последовательность вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток II типа $M'(t_n\Lambda(T(\vec{a})))$ равномерно распределена в единичном s-мерном кубе G_s с весовой функцией $\rho(\vec{x})$.*

Доказательство. Действительно, из теорем 5 и 6 следует, что все условия теоремы 9 выполнены и, следовательно, утверждение теоремы выполнено для весовой функции $\rho_1(x)$.

В работах [34] и [35] доказаны аналоги этих теорем для весовых функций произвольного порядка $r+1$ и бесконечно дифференцируемых весовых функций. Поэтому утверждение теоремы верно для любых гладких весовых функций.

□

4. Доказательство обобщённой теоремы Н. М. Коробова

Приступим к доказательству теоремы 7, которая является аналогом теоремы 35 из монографии [23] (см. стр. 205).

Так как
$$C(0,\ldots,0)=\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x},$$
то, пользуясь разложением $f(\vec{x})$ в ряд Фурье, получим
$$R_N[f]=(N)^{-1}\sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda)}\rho_{\vec{x}}f(\vec{x})-\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x}=$$
$$=N^{-1}\sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda)}\rho_{\vec{x}}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}-C(\vec{0}).$$
Отсюда после выделения слагаемого с $\vec{m}=\vec{0}$ и перемены порядка суммирования следует равенство
$$R_N[f]=\frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'C(\vec{m})\sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda)}\rho_{\vec{x}}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}+C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}\sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda)}\rho_{\vec{x}}-1\right),$$
которое в силу определения сумм $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ совпадает с первым утверждением теоремы.

Перейдём к доказательству второго утверждения. Пусть узлы квадратурной формулы с весами равномерно распределены в единичном s-мерном кубе. Тогда, согласно (39) и (40)
$$S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})=\sum_{\vec{x}\in M}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}=o(N)\quad \vec{m}\neq\vec{0}, \tag{53}$$
$$S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})=N+o(N). \tag{54}$$
Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и выберем $m_0=m_0(\varepsilon)$ и $N_0=N_0(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялись оценки
$$\Sigma_1=\sum_{\max(m_\nu)>m_0}|C(\vec{m}||S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|<\frac{\varepsilon}{3}N,$$
$$\Sigma_2=\sum_{\max(m_\nu)\leqslant m_0}{}'|C(\vec{m}||S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|<\frac{\varepsilon}{3}N,$$
$$\Sigma_3=|C(\vec{0})||S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-N|<\frac{\varepsilon}{3}N,$$
$$(N>N_0).$$

(Первую из этих оценок получаем, используя абсолютную сходимость ряда Фурье и тривиальную оценку $|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \rho(M)$; вторая и третья оценки выполняются в силу (53) и (54).) Пользуясь равенством (26), получим

$$|R_N[f]| \leqslant |C(\vec{0})| \left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \frac{1}{N} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(\vec{m})||S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \frac{1}{N}(\Sigma_3 + \Sigma_2 + \Sigma_1) < \varepsilon,$$

и, следовательно, $\lim_{N\to\infty} R_N[f] = 0$.

Пусть теперь известно, что при $N \to \infty$ погрешность квадратурной формулы стремится к нулю. Выберем произвольные целые $m_1,\ldots,m_s$, не все равные нулю, и рассмотрим функцию

$$f(\vec{x}) = e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Так как все коэффициенты Фурье этой функции кроме $C(\vec{m})$ равны нулю, а $C(\vec{m}) = 1$, то согласно (26)

$$R_N[f] = \frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}).$$

Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = \lim_{N\to\infty} R_N[f] = 0$$

и равенство (39) выполнено.

Рассмотрев функцию $f(\vec{x}) = 1$, получим, что все коэффициенты Фурье этой функции кроме $C(\vec{0})$ равны нулю, а $C(\vec{0}) = 1$, поэтому согласно (26)

$$R_N[f] = \frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1 + \lim_{N\to\infty} R_N[f] = 1$$

и равенство (40) выполнено.

Так как все условия первого аналога критерия Вейля выполнены, то взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s–мерном кубе, чем теорема доказана полностью. □

5. Заключение

Нетрудно понять, что повторяя почти дословно рассуждения из предыдущего раздела и используя второй аналог критерия Вейля можно доказать следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье, последовательность вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток II типа $M'(t_n\Lambda)$ и $S_{M(t_\nu),\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда для квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = (\det(t_\nu \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(t_\nu\cdot\Lambda(T))} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}[f],$$

справедливо равенство

$$R_{N'(t_\nu\cdot\Lambda(T))}[f] = C(\vec{0})\left(S_{M(t_\nu),\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S_{M(t_\nu),\vec{\rho}}(\vec{m}) \qquad (55)$$

и при $\nu \to \infty$ *погрешность* $R_{N'(t_\nu \cdot \Lambda(T))}[f]$ *будет стремиться к нулю тогда и только тогда, когда равномерного распределения в единичном* s*-мерном кубе* G_s *последовательности вложенных обобщенных параллелепипедальных сеток II типа* $M'(t_n\Lambda)$ *с весовой функцией* $\rho(\vec{x})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко, К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

2. Бахвалов, Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.

3. Бочарова, (Добровольская) Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2007 Т. 8, вып. 1(21). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 4 — 109.

4. *Вейль, Г.* Алгебраическая теория чисел М.: И*Л, 1947.

5. Герцог, А. С., Ребров, Е. Д., Триколич, Е. В. О методе К. К. Фролова в теории квадратурных формул // Чебышевский сб. — Т. X. Вып. 2(30). — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2009. — С. 10–54.

6. Герцог, А. С. Численное вычисление четырехкратных интегралов по методу Фролова с использованием алгебраических сеток биквадратичного поля Дирихле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып. 3. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. — С. 22–30.

7. Герцог, А. С. Параметризация четырехмерной сетки биквадратичного поля Дирихле // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. №23(188). Вып. 5. Белгород: Изд-во БелГУ, 2011. С. 41–53.

8. Герцог, А. С. ПОИВС ТМК: Биквадратичные поля и квадратурные формулы // Материалы международной научно-практической конференции «Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии», посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2011. С. 242–247.

9. Добровольская, Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения».- Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90 – 98.

10. Добровольская, Л. П., Добровольский М. Н. , Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012 Т. 13. Вып. 4(44). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 4 – 107.

11. Добровольская, Л. П., Добровольский, Н. М., Симонов, А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник.- 2008.- Т. 9.- вып. 1(25).- Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 – 223.

12. Добровольский, Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6089–84.

13. Добровольский, Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6090–84.

14. Добровольский, Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6091–84.

15. Добровольский, Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.

16. Добровольский, Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1985.

17. Добровольский, Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 67–70.

18. Добровольский, Н. Н. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник. 2018. Т. 26, вып. 3, С. 109–134.

19. Коробов, Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19 — 25.

20. Коробов, Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207 – 1210.

21. Коробов, Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 1009–1012.

22. Коробов, Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе // М.: Физматгиз, 1963.

23. Коробов, Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения // М.: Наука.- 1989.

24. Коробов, Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) // М.: МЦНМО, 2004.

25. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры // М: Физматгиз.- 1963.- 432 с.

26. Локуциевский, О. В., Гавриков, М. Б. Начала численного анализа // М.: ТОО Янус.- 1995.

27. Огородничук, Н. К, Ребров, Е. Д. Об алгоритме численного интегрирования с правилом остановки // Материалы 7 международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». 2010. Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 153 – 158.

28. Огородничук, Н. К, Ребров, Е. Д. ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилом остановки // Международной научно-практической конференции «Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина». Тула. Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2011. С. 153 — 158.

29. Рарова, Е. М. Разложение тригонометрической суммы сетки с весами в ряд по точкам решетки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 37–49.

30. Рарова, Е. М. Тригонометрические суммы сетки с весами для целочисленной решётки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 34–39.

31. Рарова, Е. М. Тригонометрические суммы алгебраических сеток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 356–359.

32. Рарова, Е. М. О взвешенном числе точек алгебраической сетки // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 200–219.

33. Рарова, Е. М. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 399—405.

34. Рарова, Е. М., Добровольский, Н. Н., Реброва, И. Ю. Асимптотическая оценка для тригонометрических сумм алгебраических сеток // Чебышевский сборник.- 2020.- т. 21.- вып. 3.- с. 232—240.

35. Рарова, Е. М., Добровольский, Н. Н., Реброва, И. Ю., Добровольский, Н. М. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток с бесконечно дифференцируемыми весами // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 166–178.

36. Ребров, Е. Д. Алгоритм Добровольской и численное интегрирование с правилом остановки // Чебышевский сборник 2009 Т. 10, вып. 1(29). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 65–77.

37. Ребров, Е. Д. Квадратурные формулы с модифицированными алгебраическими сетками // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 3(43). С. 53–90.

38. Реброва, И. Ю., Добровольский, Н. М., Добровольский, Н. Н., Балаба, И. Н., Есаян, А. Р., Басалов, Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. - Ч. I. - 232 с.

39. Фролов, К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818–821.

40. Фролов, К. К. Квадратурные формулы на классах функций. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

41. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov Algorithms fot computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology" , Odessa, August 20—26, 2012. p. 22 — 24.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Babenko, K.I. 1986, *Osnovy chislennogo analiza* [Fundamentals of Numerical Analysis], Nauka, Moscow, Russia.

2. Bakhvalov, N.S. 1959, “On approximate computation of multiple integrals”, *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 3–18.

3. Bocharova (Dobrovol’skaya), L.P. 2007, “Algorithms for finding the optimal coefficients”, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 8, no. 1(21), pp. 4–109.

4. Gertsog, A.S., Rebrov, E.D., Trikolich, E.V. 2009, "On K.K. Frolov's method in the theory of quadrature formulas", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 10, no. 2(30), pp. 10–54.

5. Gertsog, A.S. 2011, "Numerical computation of quadruple integrals by Frolov's method using algebraic nets of biquadratic Dirichlet field $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$", *Proceedings of Tula State University. Natural Sciences*, no. 3, pp. 22–30.

6. Gertsog, A.S. 2011, "Parametrization of four-dimensional net of biquadratic Dirichlet field", *Scientific Bulletin of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics*, no. 23(188), no. 5, pp. 41–53.

7. Gertsog, A.S. 2011, "TMK SICS: Biquadratic fields and quadrature formulas", in: *Multiscale Modeling of Structures and Nanotechnologies*, Tula, pp. 242–247.

8. Dobrovol'skaya, L.P., Dobrovol'skii, N.M., Dobrovol'skii, N.N., Ogorodnichuk, N.K., Rebrov, E.D. and Rebrova, I.YU. 2012, "Some questions of the number-theoretic method in the approximate analysis", *Proceedings of the X International Conference "Algebra and Number Theory: Modern Problems and Applications"Scientific Notes of Orel State University*, no. 6, part 2, pp. 90–98.

9. Dobrovol'skaya, L.P., Dobrovol'skii, M.N., Dobrovol'skii, N.M. and Dobrovol'skii, N.N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

10. Dobrovol'skaya, L.P., Dobrovol'skii, N.M. and Simonov, A.S. 2008, "On the error of approximate integration over modified grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.

11. Dobrovol'skii, N.M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", *Dep. v VINITI*, no. 6089–84.

12. Dobrovol'skii, N.M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", *Dep. v VINITI*, no. 6090–84.

13. Dobrovol'skii, N.M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$", *Dep. v VINITI*, no. 6091–84.

14. Dobrovol'skii, N.M. 1984, "Number-theoretic meshes and their applications", Ph.D. Thesis, Tula, Russia.

15. Dobrovol'skii, N.M. 1985, "Number-theoretic meshes and their applications", Abstract of Ph.D. dissertation, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

16. Dobrovol'skii, N.M. 1985, "Number-theoretic meshes and their applications", *Theory of Numbers and Its Applications: Abstracts of the All-Union Conference*, Tbilisi, USSR, pp. 67–70.

17. Dobrovol'skii, N.N. 2018, "On two asymptotic formulas in the theory of hyperbolic Zeta function of lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 109–134.

18. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 19–25.

19. Korobov, N.M. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.

20. Korobov, N.M. 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.

21. Korobov, N.M. 1963, *Teoreticiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Number-Theoretic Methods in Approximate Analysis], Fizmatgiz, Moscow, Russia.

22. Korobov, N.M. 2004, *Teoreticiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Number-Theoretic Methods in Approximate Analysis], 2nd ed., MTSNMO, Moscow, Russia.

23. Kurosh, A.G. 1963, *Kurs vysshei algebry* [Course of Higher Algebra], Fizmatgiz, Moscow, Russia.

24. Lokutsievskij, O.V. and Gavrikov, M.B. 1995, *Nachala chislennogo analiza* [Fundamentals of Numerical Analysis], TOO "Yanus Moscow, Russia.

25. Ogorodnichuk, N.K. and Rebrov, E.D. 2010, “On the algorithm of numerical integration with stopping rule”, in: *Algebra and Number Theory: Modern Problems and Applications*, Tula, pp. 153–158.

26. Ogorodnichuk, N.K. and Rebrov, E.D. 2011, “TMK SICS: Integration algorithms with stopping rule”, in: *Multiscale Modeling of Structures and Nanotechnologies*, Tula, pp. 153–158.

27. Rarova, E.M. 2014, “Decomposition of the trigonometric sum of a grid with weights in a series by lattice points”, *Proceedings of Tula State University. Natural Sciences*, vol. 1, part 1, pp. 37–49.

28. Rarova, E.M. 2014, “Trigonometric grid sums with weights for integer lattice”, *Proceedings of Tula State University. Natural Sciences*, no. 3, pp. 34–39.

29. Rarova, E.M. 2015, “Trigonometric sums of algebraic nets”, in: *Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications*, Tula, pp. 356–359.

30. Rarova, E.M. 2018, “Weighted number of points of algebraic net”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 200–219.

31. Rarova, E.M. 2019, “Trigonometric sums of nets of algebraic lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 399–405.

32. Rarova, E.M., Dobrovol’skii, N.N. and Rebrova, I.Yu. 2020, “Asymptotic estimation for trigonometric sums of algebraic grids”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 232–240.

33. Rarova, E.M., Dobrovol’skii, N.N., Rebrova, I.Yu. and Dobrovol’skii, N.M. 2021, “Trigonometric sums of grids of algebraic lattices with infinitely differentiable weights”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 166–178.

34. Rebrov, E.D. 2009, “Dobrovolskaya’s algorithm and numerical integration with stopping rule”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 10, no. 1(29), pp. 65–77.

35. Rebrov, E.D. 2012, “Quadrature formulas with modified algebraic grids”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 3(43), pp. 53–90.

36. Rebrova, I.Yu., Dobrovolskii, N.M., Dobrovolskii, N.N., Balaba, I.N., Yesayan, A.R. and Basalov, Yu.A. 2016, *Number-Theoretic Method in Approximate Analysis and Its Implementation in TMK SICS: Monograph*, Part I, Tula State Pedagogical University, Tula, Russia.

37. Frolov, K.K. 1976, “Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions”, *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 231, no. 4, pp. 818–821.

38. Frolov, K.K. 1979, “Quadrature formulas on classes of functions”, Ph.D. Thesis, Computing Center of Academy of Sciences of USSR, Moscow, USSR.

39. Dobrovolskiy, N.M., Dobrovolskaya, L.P., Dobrovolskiy, N.N., Ogorodnichuk, N.K. and Rebrov, E.D. 2012, “Algorithms for computing optimal coefficients”, *Book of Abstracts of the International Scientific Conference "Computer Algebra and Information Technology"*, Odessa, pp. 22–24.

Получено: 18.03.2025
Принято в печать: 27.08.2025