

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 3.

УДК 517.44

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-174-184

Разложение решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в ряды полиномов Эрмита¹

А. И. Нижников, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко

Нижников Александр Иванович — Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru

Яремко Олег Эммануилович — Московский государственный технический университет «Станкин» (г. Москва).

e-mail: yaremki8@gmail.com

Яремко Наталья Николаевна — Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС» (г. Москва).

e-mail: yaremki@yandex.ru

Аннотация

Решение начально-краевых задач для уравнения теплопроводности представляется в виде разложения в ряд полиномов Эрмита. Для задачи Коши и ретроспективной задачи Коши найдены коэффициенты разложения решения в ряды по полиномам Эрмита. Исследована связь преобразования Лапласа и рядов по полиномам Эрмита. Найдена новая формула обращения интегрального преобразования Лапласа по значениям изображения на действительной полуоси. Функция оригинал строится как сумма квазистепенного ряда. Получена формула для изображения Лапласа в виде суммы квазистепенного ряда. Решена задача восстановления температурного поля неограниченного стержня по его моментам.

Ключевые слова: полином Эрмита, преобразование Фурье, преобразование Лапласа, задача Коши, ретроспективная задача, смешанная краевая задача.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Нижников, А. И., Яремко, О. Э., Яремко, Н. Н. Разложение решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в ряды полиномов Эрмита // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 3, с. 174–184.

¹Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSFS-2024-0007)

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 3.

UDC 517.44

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-174-184

Expansion of the initial-boundary value problem solution for the heat equation into Hermite polynomial series

A. I. Nizhnikov, O. E. Yaremko, N. N. Yaremko

Nizhnikov Alexander Ivanovich — Moscow State Pedagogical University (Moscow).*e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru***Yaremko Oleg Emmanuilovich** — Moscow State Technical University “Stankin” (Moscow).*e-mail: yaremk8@gmail.com***Yaremko Natalya Nikolaevna** — National Research Technological University “MISiS” (Moscow).*e-mail: yaremk@yandex.ru***Abstract**

The initial boundary value problems solution for the heat equation is represented as a decomposition into a series of Hermite polynomials. For the Cauchy problem and the Cauchy retrospective problem, the coefficients of the solution expansion into series by Hermite polynomials are found. The relationship between the Laplace transform and the Hermite polynomial series is investigated. A new formula for inverting the integral Laplace transform with respect to the values of the image on the real half-axis is found. The original function is constructed as the sum of a quasi-series. A formula is obtained for the Laplace representation as the sum of a quasi-minor series. The problem of reconstructing the temperature field of an unlimited rod based on its moments has been solved.

Keywords: Hermite polynomial, Fourier transform, Laplace transform, Cauchy problem, retrospective problem, initial-boundary value problem.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

Nizhnikov, A. I., Yaremko, O. E., Yaremko, N. N. 2025, “Expansion of the initial-boundary value problem solution for the heat equation into Hermite polynomial series”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 174–184.

1. Введение

Метод интегральных преобразований Фурье [14] основной в теории дифференциальных уравнений параболического типа. Вместе с тем в работах авторов [6, 10, 13] для уравнения теплопроводности был предложен подход основанный на разложении решения в ряд полиномов Эрмита [11]. Решение $u(\tau, x)$ задачи Коши [1] для неограниченного стержня с начальным распределением температурного поля $f(x)$ в работе авторов [16] было представлено в форме разложения в ряд полиномов Эрмита

$$u(\tau, x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4(\tau+\beta)}}}{2\sqrt{\pi(\tau+\beta)}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2\sqrt{\tau+\beta})^j} H_j \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau+\beta}} \right) \frac{\beta^{\frac{j}{2}}}{j!} f_j, \quad (1)$$

где

$$f_j = \int_{-\infty}^{\infty} H_j \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\beta}} \right) f(\xi) d\xi, \quad (2)$$

$\beta > 0$ - произвольное, $H_j \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\beta}} \right)$ -полином Эрмита [11].

Обратная задача уравнения теплопроводности для бесконечного стержня состоит в том, чтобы найти неизвестное начальное распределение $f(x)$ теплового поля по известному температурному полю $u(\tau, x)$ [7]. Эта обратная задача уравнения теплопроводности приводит к решению интегрального уравнения Фредгольма первого типа [7]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp \left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau} \right) f(\xi) d\xi = u(\tau, x). \quad (3)$$

Авторы в работе [6] показали, что решение уравнения (2) можно получить разложением в ряд полиномов Эрмита. Справедлива формула

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\beta}}}{2\sqrt{\pi\beta}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2\sqrt{\beta})^j} H_j \left(\frac{x}{2\sqrt{\beta}} \right) \frac{(\tau + \beta)^{\frac{j}{2}}}{j!} u_j, \quad (4)$$

где

$$u_j = \int_{-\infty}^{\infty} H_j \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau + \beta}} \right) u(\tau, \xi) d\xi.$$

Задача настоящего исследования состоит получить формулы, аналогичные (1), (4) для начально-краевых задач. Приведем необходимые сведения из теории полиномов Эрмита [11]. Производящая функция для полиномов Эрмита [11] имеет вид

$$e^{2xz - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!}. \quad (5)$$

Из нее следует явная формула

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. *Предельный случай при $\beta \rightarrow 0$ в формуле (1) ранее не изучался. Воспользуемся разложением ядра Пуассона в ряд полиномов Эрмита*

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp \left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp \left(-\frac{x^2}{4\tau} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{H_j \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} \right)}{j!} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right)^j.$$

На основании формулы (2) получим представление решения задачи Коши для уравнения теплопроводности [8]

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp \left(-\frac{x^2}{4\tau} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{H_j \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} \right)}{j! (2\sqrt{\tau})^j} m_j(f), \quad (7)$$

где

$$m_j(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^j f(\xi) d\xi,$$

моменты порядка j функции $f(x)$.

В теории вероятностей интеграл Пуассона (2) называется рандомизированной плотностью распределения [9] для плотности распределения $f(x)$. Таким образом, формула (7) восстанавливает рандомизированную плотность распределения по моментам Гамбургера [4] плотности распределения $f(x)$. С физической точки зрения формула (6) восстанавливает распределение температурного поля по известным моментам начального распределения температурного поля [12,15].

2. Интегральное преобразование Лапласа и разложение по полиномам Эрмита

2.1. Разложение оригинала в преобразовании Лапласа в ряд полиномам Эрмита

Запишем формулу Меллина для обращения преобразования Лапласа [2]

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1 - i\omega}^{\sigma_1 + i\omega} e^{st} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt ds, \quad (8)$$

σ_1 -показатель роста оригинала $f(t)$. Получим новую формулу обращения преобразования Лапласа ассоциированную с полиномами Эрмита. Для этого перепишем формулу (8) в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1 - i\omega}^{\sigma_1 + i\omega} e^{-\beta\sqrt{s}} e^{st} \int_0^{\infty} e^{\beta\sqrt{s}} e^{-st} f(t) dt ds, \beta > 0.$$

Положим в формуле (5) $z^2 = st, \beta\sqrt{s} = 2xz$. Отсюда получим значения параметров

$$z = \sqrt{s}\sqrt{t}, x = \frac{\beta}{2\sqrt{t}}$$

Тогда получим

$$e^{\beta\sqrt{s}} e^{-st} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \left(\frac{\beta}{2\sqrt{t}} \right) \frac{(\sqrt{s})^n (\sqrt{t})^n}{n!} \quad (9)$$

Положим

$$f_n = \int_0^{\infty} H_n \left(\frac{\beta}{2\sqrt{t}} \right) (\sqrt{t})^n f(t) dt$$

Формула для оригинала принимает вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1 - i\omega}^{\sigma_1 + i\omega} e^{-\beta\sqrt{s}} e^{st} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{s})^n}{n!} f_n ds,$$

Осталось выполнить обратное преобразование Лапласа изображения $e^{-\beta\sqrt{s}}(\sqrt{s})^n$. Воспользуемся таблицей преобразований Лапласа [2]

$$L_s^{-1}[e^{-\beta\sqrt{s}}/\sqrt{s}](t) = \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4t}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \quad (10)$$

Дифференцируя $n+1$ раз по параметру β обе части равенства (10) получим

$$L_s^{-1}[e^{-\beta\sqrt{s}}(\sqrt{s})^n](t) = (-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}}{d\beta^{n+1}} \left(\frac{e^{-\frac{\beta^2}{4t}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \right).$$

Для вычисления производной в правой части воспользуемся формулой (10). В результате получим

$$L_s^{-1}[e^{-\beta\sqrt{s}}(\sqrt{s})^n](t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\beta^2}{4t}} \frac{1}{(2\sqrt{t})^{n+1}} H_{n+1} \left(\frac{\beta}{2\sqrt{t}} \right), \lambda \in R$$

Таким образом, для оригинала Лапласа $f(t)$ получили разложение в ряд полиномов Эрмита [3]

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\beta^2}{4t}} \frac{1}{(2\sqrt{t})^{n+1}} H_{n+1} \left(\frac{\beta}{2\sqrt{t}} \right) \frac{f_n}{n!} \quad (11)$$

где

$$f_n = \int_0^{\infty} H_n \left(\frac{\beta}{2\sqrt{t}} \right) (\sqrt{t})^n f(t) dt \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 1. *Изображение Лапласа $\Phi(s)$ функции $f(t)$ можно представить в виде суммы ряда квазистепенного ряда*

$$\Phi(s) = e^{-\beta\sqrt{s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{s})^n}{n!} f_n,$$

коэффициенты которого определяются по формулам (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения изображения Лапласа следует формула

$$\Phi(s) = e^{-\beta\sqrt{s}} \int_0^{\infty} e^{\beta\sqrt{s}} e^{-st} f(t) dt$$

Применим формулу (7). В результате получим

$$\Phi(s) = e^{-\beta\sqrt{s}} \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} H_n \left(\frac{\beta}{2\sqrt{t}} \right) \frac{(\sqrt{s})^n (\sqrt{t})^n}{n!} f(t) dt$$

Допуская возможность почленного интегрирования функционального ряда, доказательство закончим.

2.2. Новая формула обращения преобразования Лапласа

Пусть $\Phi(s)$ изображение, $f(t)$ оригинал [2]. Функцию оригинал можно восстановить по известному изображению $\Phi(\lambda)$, $\lambda \in R$ на действительной оси или на некотором промежутке. Известные решения проблемы восстановления оригинала [5] основаны на теории ортогональных полиномов Лаггера [3]. Мы предлагаем применять разложения с полиномами Эрмита. Будем считать далее, что изображение Лапласа допускает разложение ряд по полиномам Эрмита (9). Таким образом, изображение Лапласа можно представить в виде

$$\Phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi \lambda}} e^{-\frac{\beta^2}{4\lambda}} \frac{1}{(2\sqrt{\lambda})^{n+1}} H_{n+1} \left(\frac{\beta}{2\sqrt{\lambda}} \right) \frac{\varphi_n}{n!}, \quad (13)$$

где

$$\varphi_n = \int_0^{\infty} H_n \left(\frac{\beta}{2\sqrt{\xi}} \right) (\sqrt{\xi})^n \Phi(\xi) d\xi.$$

Заметим, что каждое из слагаемых ряда (13) можно аналитически продолжить до функции аналитической в правой полуплоскости $Res > 0$. Предположим далее, что ряд (13) равномерно сходится на каждом из отрезков $[\sigma_1 - i\omega, \sigma_1 + i\omega]$ можно также продолжить аналитическим образом в полуплоскость $Res > 0$. Тогда обе части формулы (13) допускают аналитическое продолжение в правую полуплоскость $Res > 0$. Таким образом,

$$\Phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\beta^2}{4s}} \frac{1}{(2\sqrt{s})^{n+1}} H_{n+1} \left(\frac{\beta}{2\sqrt{s}} \right) \frac{\varphi_n}{n!}, \quad Res > 0. \quad (14)$$

Перейдем в формуле (14) к оригиналам. Применим формулу из таблицы преобразований Лапласа [2]

$$L_s^{-1}[e^{-\beta^2/(4s)}/\sqrt{\pi s}](t) = \frac{\cos(\beta\sqrt{t})}{\pi\sqrt{t}}. \quad (15)$$

Из формулы (6) следует тождество

$$(-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}}{d\beta^{n+1}} \left(\frac{e^{-\frac{\beta^2}{4s}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{s}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\beta^2}{4s}} \frac{1}{(2\sqrt{s})^{n+1}} H_{n+1} \left(\frac{\beta}{2\sqrt{s}} \right).$$

Из последнего соотношения на основании формулы (15) следует равенство

$$(-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}}{d\beta^{n+1}} \left(\frac{\cos(\beta\sqrt{t})}{\pi\sqrt{t}} \right) = L_s^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\beta^2}{4s}} \frac{1}{(2\sqrt{s})^{n+1}} H_{n+1} \left(\frac{\beta}{2\sqrt{s}} \right) \right).$$

Таким образом, на основании представления изображения Лапласа в виде (14) мы получим оригинал $f(t)$:

$$f(t) = \frac{\sin \beta\sqrt{t}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2n}}{(2n)!} t^n + \frac{\sqrt{t} \cos \beta\sqrt{t}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2n+1}}{(2n+1)!} t^n, \quad (16)$$

где

$$\varphi_n = \int_0^{\infty} H_n \left(\frac{\beta}{2\sqrt{\xi}} \right) (\sqrt{\xi})^n \Phi(\xi) d\xi.$$

Формула (16) восстанавливает функцию оригинал по значениям его изображения на действительной полуоси.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Класс функций изображений $\Phi(\lambda)$, для которого справедлива формула обращения (16) будет описан в последующих статьях.

3. Новая формула для решения смешанной краевой задачи на действительной полуоси для уравнения теплопроводности

3.1. Смешанная краевая задача

Задача определения температурного поля в полуограниченном стержне приводит к уравнению [15]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < \infty, 0 < t < T \quad (17)$$

при нулевом начальном условии

$$u(x, 0) = 0, 0 < x < \infty \quad (18)$$

и краевом условии

$$u(0, t) = f(t), 0 < t < T. \quad (19)$$

В изображениях Лапласа задача принимает вид

$$sU = \frac{d^2 U}{dx^2}, 0 < x < \infty, U(s, x) = \Phi(s).$$

Для изображения Лапласа решения получим выражение

$$U(s, x) = e^{-\sqrt{s}x} \Phi(s).$$

Из теоремы 1 следует, что

$$U(s, x) = e^{-(x+\beta)\sqrt{s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{s})^n}{n!} f_n,$$

где

$$f_n = \int_0^{\infty} H_n \left(\frac{\beta}{2\sqrt{t}} \right) (\sqrt{t})^n f(t) dt.$$

Таким образом, для оригинала Лапласа $u(x, t)$ получим разложение в ряд полиномов Эрмита

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+\beta)^2}{4t}} \frac{1}{(2\sqrt{t})^{n+1}} H_{n+1} \left(\frac{x+\beta}{2\sqrt{t}} \right) \frac{f_n}{n!} \quad (20)$$

где

$$f_n = \int_0^{\infty} H_n \left(\frac{\beta}{2\sqrt{t}} \right) (\sqrt{t})^n f(t) dt \quad (21)$$

3.2. Обратная смешанная краевая задача

Обратная смешанная краевая задача состоит в определении закона распределения температурного поля $u(0, t)$ на границе $x = 0$ по известному температурному полю $u(l, t)$ во внутренней точке $x = l$. Как известно [7], эта задача не корректна. Тем не менее решение обратной задачи существует и единственно, хотя при этом не выполняется свойство устойчивости. Найти формулу для решения обратной краевой задачи будет нашей целью. Как показано в п. 3.1 справедлива формула

$$U(s, l) = e^{-\sqrt{s}l} \Phi(s).$$

Тогда получим

$$\Phi(s) = e^{\sqrt{s}l} U(s, l).$$

Из теоремы 1 следует равенство

$$\Phi(s) = e^{-(\beta-l)\sqrt{s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{s})^n}{n!} u_n, l < \beta,$$

где

$$u_n = \int_0^{\infty} H_n \left(\frac{\beta}{2\sqrt{t}} \right) (\sqrt{t})^n u(l, t) dt$$

Возвращаясь к оригиналам Лапласа получаем для $f(t)$ разложение в ряд полиномов Эрмита

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\beta-l)^2}{4t}} \frac{1}{(2\sqrt{t})^{n+1}} H_{n+1} \left(\frac{\beta-l}{2\sqrt{t}} \right) \frac{u_n}{n!} \quad (22)$$

где

$$u_n = \int_0^{\infty} H_n \left(\frac{\beta}{2\sqrt{t}} \right) (\sqrt{t})^n u(l, t) dt \quad (23)$$

4. Задача Коши для уравнения теплопроводности на действительной полуоси

4.1. Задача Коши

Рассмотрим задачу определения температурного поля полуограниченного стержня и

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < \infty, 0 < t < T \quad (24)$$

по начальному распределению поля

$$u(x, 0) = f(x), 0 < x < \infty \quad (25)$$

и однородному краевому условию

$$u(0, t) = 0, 0 < t < T. \quad (26)$$

Продолжим нечетным образом решение смешанной краевой задачи (24)-(26). Тогда продолжения имеют вид

$$\tilde{u}(x, t) = u(x, t)H(x) - u(-x, t)H(-x), \tilde{f}(x) = f(x)H(x) - f(-x)H(-x),$$

где $H(x)$ - функция Хевисайда [2]. Обратно,

$$u(x, t) = \frac{\tilde{u}(x, t) - \tilde{u}(-x, t)}{2}, f(x) = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)}{2}.$$

Из формул (1)-(2) следует

$$\tilde{u}(t, x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t+\beta)}}}{2\sqrt{\pi(t+\beta)}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2\sqrt{t+\beta})^j} H_j \left(\frac{x}{2\sqrt{t+\beta}} \right) \frac{\beta^{\frac{j}{2}}}{j!} \tilde{f}_j, \quad (27)$$

где

$$\tilde{f}_j = \int_{-\infty}^{\infty} H_j \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\beta}} \right) \tilde{f}(\xi) d\xi, \quad (28)$$

Многочлен $H_n(x)$ чётен при чётном n и нечётен при нечётном n , поэтому из формул (27)-(28) следует формула для решения задачи (24)-(26)

$$u(t, x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t+\beta)}}}{2\sqrt{\pi(t+\beta)}} \sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{1}{(2\sqrt{t+\beta})^j} H_j \left(\frac{x}{2\sqrt{t+\beta}} \right) \frac{\beta^{\frac{j}{2}}}{j!} f_j, \quad (29)$$

где

$$f_j = \int_0^{\infty} H_j \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\beta}} \right) f(\xi) d\xi, j = 1, 3, 5, \dots \quad (30)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Для краевых условий Неймана справедливы формулы аналогичные (29)-(30) с тем отличием, что суммирование берется по четным номерам.

4.2. Ретроспективная задача Коши на действительной полуоси

Ретроспективная задача на действительной полуоси с однородным краевым условием Коши состоит в определении начального закона распределения температурного поля $u(x, 0)$ по известному температурному полю $u(x, \tau)$ в момент $t = \tau$. Ретроспективная задача не корректна [7]. Тем не менее ее решение существует и единственно, хотя при этом не выполняется свойство устойчивости. Приведем формулу для решения обратной задачи Коши

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\beta}}}{2\sqrt{\pi\beta}} \sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{1}{(2\sqrt{\beta})^j} H_j \left(\frac{x}{2\sqrt{\beta}} \right) \frac{(\tau + \beta)^{\frac{j}{2}}}{j!} u_j, \quad (31)$$

где

$$u_j = \int_{-\infty}^{\infty} H_j \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau + \beta}} \right) u(\tau, \xi) d\xi, j = 1, 3, 5, \dots$$

5. Обсуждение

В статье представлен метод разложения в ряд полиномов Эрмита как альтернатива методу интегральных преобразований Фурье. Преимущества предлагаемого метода хорошо прослеживаются на примере задачи Коши. Чтобы решить задачу Коши надо разложить функцию, определяющую начальное распределение температурного поля, в ряд полиномов Эрмита, а затем выполнить замену $\beta \rightarrow \beta + t$. Решение ретроспективной задачи Коши или решение обратной смешанной краевой задачи проводится по той же схеме: разложить данные задачи в ряд полиномов Эрмита, а затем выполнить замену $\beta \rightarrow \beta - \tau$. Представленные в работе формулы перспективны в плане создания эффективных вычислительных алгоритмов. Исследование предполагается распространить на дифференциальные уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u$$

где $p(z)$ — многочлен, для которого выполнено условие $\operatorname{Re} p(\lambda) \geq 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин А.А. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974.-288 с.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974. — 544 с.
3. Казьмин Ю. А. О разложениях в ряды по полиномам Аппеля. Матем. заметки, №5, вып.5, 1969, 509–520.
4. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 552 с
5. Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М., 1974. 224 с.
6. Нижников А.И., Яремко О.Э., Яремко Н.Н. Полиномы Аппеля, ассоциированные с преобразованиями Фурье, и их применение для дифференциальных уравнений. Чебышевский сборник. 2024;25(3):213-225.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979.
8. Тихонов А.Н. , Васильева А.Б., Свешников А.Г. Курс высшей математики и математической физики. Дифференциальные уравнения. — Физматлит, 2005.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения, т.2, М.: Мир. 1984.
10. Яремко Н. Н., Селютин В. Д., Журавлева Е. Г. Новые формулы обращения для интегральных преобразований Лапласа, Вейерштрасса и Меллина. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2018, № 1, 24–35.
11. Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R. Hermite Polynomials. Cambridge, Cambridge University Press, 1999.

12. Jeffreys H. and Jeffreys B. *Methods of Mathematical Physics*, 3rd ed., Cambridge Univ. Press, 1956.
13. Sitnik S. M., Yaremko O., Yaremko N. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems, *Springer Nature Switzerland*, 2020, pp.447-466.
14. Sneddon I.N. *Fourier Transforms*. New York. McGraw-Hill. 1951. 542 p.
15. Thambynayagam, R. K. M. The Diffusion Handbook: Applied Solutions for Engineers. / McGraw-Hill Professional. 2011.
16. Yaremko, N. , Yaremko, O. On a new formulas for a direct and inverse Cauchy problems of heat equation. DOI:10.48550/arXiv.1311.4442.

REFERENCES

1. Vladimirov, V. S., Mikhailov, V. P., Vasharin A. A., et al., Collection of Problems on Mathematical Physics Equations [in Russian], Nauka, Moscow, 1974.
2. Ditkin, V. A. and Prudnikov, A. P. Integral Transforms and Operational Calculus. Pergamon press inc, 1965.
3. Yu. A. Kaz'min, On Appell polynomials, Math. Notes, Val.6, No. 2, 1969, 556–562
4. Krein, M.G. and Nudelman, A.A. The Markov moment problem and extremal problems. Translation of Mathematical Monographs AMS, vol. 50 1977.
5. Krylov, N.S. Skoblya - A Handbook of Methods of Approximate Fourier Transformation and Inversion of the Laplace Transformation - Mir - 1977.
6. Nizhnikov A.I., Yaremko O.E., Yaremko N.N. Appel polynomials associated with Fourier transforms and their applications to differential equations. Chebyshevskii Sbornik. 2024, 25(3), pp. 213-225. (In Russ.)
7. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Methods for solutions of ill-posed problems. N Y: Wiley, 1977, 258 p.
8. Tikhonov, A. N. Vasil'eva, A. B., Sveshnikov A. G. Differential Equations. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer-Verlag 1985.
9. Feller, W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 2, J. Willey and Sons, New York, 1971, 766 p.
10. Yaremko N. N., Selyutin V. D., Zhuravleva E. G. New conversion formulas for integral transformations of Laplace, Weierstrass and Mellin. News of higher educational institutions. The Volga region. Physical and Mathematical Sciences. [in Russian], 2018, No. 1, 24-35.
11. Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R. Hermite Polynomials. Cambridge, Cambridge University Press, 1999.
12. Jeffreys H. and Jeffreys B. *Methods of Mathematical Physics*, 3rd ed., Cambridge Univ. Press, 1956.
13. Sitnik S. M., Yaremko O., Yaremko N. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems, *Springer Nature Switzerland*, 2020, pp.447-466.

14. Sneddon I.N. *Fourier Transforms*. New York. McGraw-Hill. 1951.542 p.
15. Thambynayagam, R. K. M. The Diffusion Handbook: Applied Solutions for Engineers. McGraw-Hill Professional. 2011.
16. Yaremko, N. , Yaremko, O. On a new formulas for a direct and inverse Cauchy problems of heat equation. DOI:10.48550/arXiv.1311.4442.

Получено: 02.02.2025

Принято в печать: 27.08.2025