

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 3.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-136-173

Об одном распределении, связанном с рядами Фарея - II¹

М. А. Королёв

Королёв Максим Александрович — Математический институт им. В. А. Стеклова Российской Академии наук (г. Москва).

e-mail: hardy_ramanujan@mail.ru, korolevma@mi-ras.ru

Аннотация

В настоящей статье продолжены исследования некоторых арифметических свойств рядов Фарея с помощью метода, созданного Ф. Бока, К. Кобели и А. Захареску (2001). Пусть Φ_Q — классический ряд Фарея порядка Q . Задавшись фиксированными числами $D \geq 2$ и $0 \leq c_0 \leq D - 1$, пометим красным цветом все дроби в Φ_Q , знаменатели которых $\equiv c_0 \pmod{D}$. Рассмотрим далее промежутки в Φ_Q с окрашенными концами, внутри которых нет других окрашенных дробей, т. е. дробей a/q с условием $q \equiv c_0 \pmod{D}$. Какова предельная (при $Q \rightarrow +\infty$) доля $\nu(r; D, c_0)$ промежутков, внутри которых имеется в точности r неокрашенных дробей, в общем числе таких промежутков ($r = 0, 1, 2, 3, \dots$)?

По сути, выражение для такой доли может быть получено из общих результатов, принадлежащих К. Кобели, М. Выжийту и А. Захареску (2012). Однако такое выражение для $\nu(r; D, c_0)$ представляет собой сумму площадей некоторых многоугольников, определяемых посредством специального геометрического преобразования. В настоящей статье мы получаем явные выражения для таких долей $\nu(r; D, c_0)$ для случаев $D = 3$ и $c_0 = 1, 2$. Тем самым с учётом предыдущей работы автора (2023) случай разности $D = 3$ оказывается изученным полностью.

Ключевые слова: ряд Фарея, дроби Фарея, треугольник Фарея, арифметические свойства, распределение, BCZ-преобразование, преобразование Фарея.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:

Королёв, М. А. Об одном распределении, связанном с рядами Фарея - II // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 3, с. 136–173.

¹Работа выполнена в МЦМУ МИАН при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2025-303).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 3.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-136-173

A distribution related to Farey series - II

M. A. Korolev

Korolev Maxim Alexandrovich — Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: hardy_ramanujan@mail.ru, korolevma@mi-ras.ru

Abstract

We continue to study some arithmetical properties of Farey sequences by the method introduced by F. Boca, C. Cobeli and A. Zaharescu (2001). Let Φ_Q be the classical Farey sequence of order Q . Having the fixed integers $D \geq 2$ and $0 \leq c_0 \leq D - 1$, we colour to the red the fractions in Φ_Q with denominators $\equiv c_0 \pmod{D}$. Consider the gaps in Φ_Q with coloured endpoints, that do not contain the fractions a/q with $q \equiv c_0 \pmod{D}$ inside. The question is to find the limit proportions $\nu(r; D, c_0)$ (as $Q \rightarrow +\infty$) of such gaps with precisely r fractions inside in the whole set of the gaps under considering ($r = 0, 1, 2, 3, \dots$).

In fact, the expression for this proportion can be derived from the general result obtained by C. Cobeli, M. Văjăitu and A. Zaharescu (2012). However, such formula expresses $\nu(r; D, c_0)$ in the terms of areas of some polygons related to a special geometrical transform. In the present paper, we obtain explicit formulas for $\nu(r; D, c_0)$ for the cases $D = 3$ and $c_0 = 1, 2$. Thus this and previous author's papers cover the case $D = 3$.

Keywords: Farey series, Farey fractions, Farey triangle, arithmetical properties, distribution, BCZ-transform, Farey transform.

Bibliography: 29 titles.

For citation:

Korolev, M. A. 2025, "A distribution related to Farey series - II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 136–173.

1. Введение

В настоящей статье продолжены исследования арифметических свойств рядов Фарея, начатые в [1], [2].² Пусть Φ_Q - ряд Фарея порядка Q , т.е. множество упорядоченных по возрастанию несократимых дробей вида a/q , $0 \leq a \leq q \leq Q$.³ Пусть, далее, $r \geq 0$, $D \geq 2$, $0 \leq c_0 \leq D - 1$ - целые числа. Обозначим через $N(Q; r, D, c_0)$ множество всех кортежей из $(r + 2)$ последовательных дробей ряда Φ_Q вида

$$\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1} < \dots < \frac{a_r}{q_r} < \frac{a_{r+1}}{q_{r+1}}, \quad (1)$$

²Работа [2] представляет собой развёрнутый и модифицированный вариант статьи [1]. По этой причине всюду ниже мы ссылаемся на необходимые утверждения в форме, приведённой во второй статье.

³Библиография, посвящённая рядам Фарея, весьма обширна. История открытия дробей Фарея блестяще изложена в главе 2 книги [3]. Основные направления исследований рядов Фарея (до 2003 г.) отражены в обзоре [4]. Различные задачи, связанные с распределением дробей Фарея, знаменатели которых подчинены различным ограничениям, рассматриваются в [5]–[9]. Свойствам т.н. BCZ-преобразования (преобразования Фарея, см. ниже, § 2) и его обобщений посвящены работы [10]–[13]. Ряд новых задач, связанных с рядами Фарея, отражён в относительно недавних работах [14]–[21]. Наконец, различным обобщениям дробей Фарея посвящены работы [22], [23]. Этот список, конечно же, не претендует на полноту.

удовлетворяющих дополнительным условиям

$$q_0, q_{r+1} \equiv c_0 \pmod{D}, \quad q_i \not\equiv c_0 \pmod{D}, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (2)$$

Обозначим также через $N(Q; D, c_0)$ число дробей того же ряда, знаменатели которых сравнимы с c_0 по модулю D , и рассмотрим отношение

$$\nu(Q; r, D, c_0) = \frac{N(Q; r, D, c_0)}{N(Q; D, c_0)}.$$

Ф. Бока, К. Кобели и А. Захареску предложили в работе [24] новый метод исследования рядов Фарея, в основе которого лежат свойства т.н. BCZ-преобразования T , отображающего в себя «треугольник Фарея», т.е. область

$$\mathcal{T} = \{(x, y) : 0 < x, y \leq 1, x + y > 1\}.$$

Из результатов работ [25], [26] (также см. [28]) следует существование при любых фиксированных r , D и c_0 предела

$$\nu(r, D, c_0) = \lim_{Q \rightarrow +\infty} \nu(Q; r, D, c_0).$$

Метод Бока, Кобели и Захареску приводит к выражениям для предельных долей в виде сумм (вообще говоря, бесконечных) площадей некоторых выпуклых многоугольников, определяемых в терминах BCZ-преобразования. Получение явных формул для таких долей (в виде функций, зависящих от r, D, c_0) является в общем случае трудной задачей.

Для $D = 2$, $c_0 = 1$ и $1 \leq r \leq 4$ такие выражения (в качестве примера) были найдены в [25], [26]. Эти вычисления были доведены до конца в [2]. Там же был рассмотрен случай $D = 3$, $c_0 = 0$. Более того, в работе [2] для величин $\nu(Q; r, 2, 1)$, $r \geq 0$, и $\nu(Q; r, 3, 0)$, $r \geq 1$, были получены асимптотические формулы, справедливые в очень широком диапазоне изменения r , а именно для r с условием $r = o((Q/\ln Q)^{1/3})$.

Так как знаменатели соседних дробей Фарея взаимно просты и не могут одновременно делиться на 3, то доля $\nu(Q; r, 3, 0)$ при $r = 0$ тождественно равна нулю при любом Q . Таким образом, случай $D = 3$, $c_0 = 0$ полностью изучен.

В настоящей работе исследуются доли $\nu(Q; r, 3, c_0)$ при $c_0 = 1, 2$. Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА. Пусть c_0 - любое из чисел 1, 2. Тогда при $Q \rightarrow +\infty$, $r \geq 0$, $r = o((Q/\ln Q)^{1/3})$ справедлива асимптотическая формула

$$\nu(Q; r, 3, c_0) = \nu(r, 3, c_0) + O\left(\frac{\ln Q}{Q}\right),$$

где постоянная в знаке O - абсолютная, а величины $\nu(r, 3, c_0)$ определяются равенствами

$$\nu(0; 3, c_0) = \frac{1}{3} = 0.33333\ 33333\ \dots,$$

$$\nu(1; 3, c_0) = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3 - \frac{1}{2} \right) = 0.14345\ 80504\ \dots,$$

$$\nu(2; 3, c_0) = \frac{8}{3} (\ln 3 - 1) = 0.26296\ 61031\ \dots,$$

$$\nu(3; 3, c_0) = \frac{626}{105} - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 2 \ln 3 = 0.13708\,14561\dots,$$

$$\nu(4; 3, c_0) = \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{23}{35} - \ln 3 \right) = 0.07739\,22912\dots,$$

$$\nu(5; 3, c_0) = \frac{4}{3} \ln 3 - \frac{193}{135} = 0.03518\,67552\dots,$$

$$\nu(r; 3, c_0) = \frac{8}{3(2r-5)(2r-3)(2r-1)}, \quad r \geq 6.$$

Так получается полное решение исходной задачи для $D = 2, 3$. Необходимо отметить, что случай следующего за тройкой простого числа $D = 5$ оказывается много сложнее и изучению пока не поддаётся.

2. Дробь Фарея, континуанты и множества $\mathcal{A}_r^\circ(D, c_0, c_1)$

Как уже отмечалось ранее, общая формула для вычисления долей $\nu(Q; r, D, c_0)$ получена в [25] (теоремы 1, 2; см. также [26]). Мы же будем пользоваться модифицированным вариантом этой формулы из работы [1], который представляется более удобным для наших целей. Нужно отметить, что в случае фиксированных r , D и c_0 выражения для предельных долей $\nu(r, D, c_0)$, которые получаются из леммы 23 статьи [1], внешне значительно отличаются от выражений, следующих из теорем 1, 2 работы [25]. Доказательству их эквивалентности посвящён §9 статьи [1].

Чтобы сформулировать соответствующий результат, напомним основные свойства BCZ-преобразования $T: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$, которое задаётся формулой

$$T(x, y) = \left(y, \left[\frac{1+x}{y} \right] y - x \right). \quad (3)$$

Преобразование T не является непрерывным, но оно биективно и сохраняет площади (см. [24, лемма 3]). Кроме того, если $a/q < a'/q' < a''/q''$ - тройка соседних дробей ряда Фарея Φ_Q , то из формулы (3) несложно заключить, что

$$T\left(\frac{q}{Q}, \frac{q'}{Q}\right) = \left(\frac{q'}{Q}, \frac{q''}{Q}\right).$$

Далее, для любого $k \geq 1$ через $\mathcal{T}(k)$ станем обозначать множество точек треугольника Фарея, координаты (x, y) которых удовлетворяют условию $[(1+x)/y] = k$. Как известно, замыкание $\mathcal{T}(k)$ при $k = 1$ представляет собой треугольник с вершинами $(0, 1)$, $(1, 1)$ и $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, а при $k \geq 2$ - четырёхугольник с вершинами

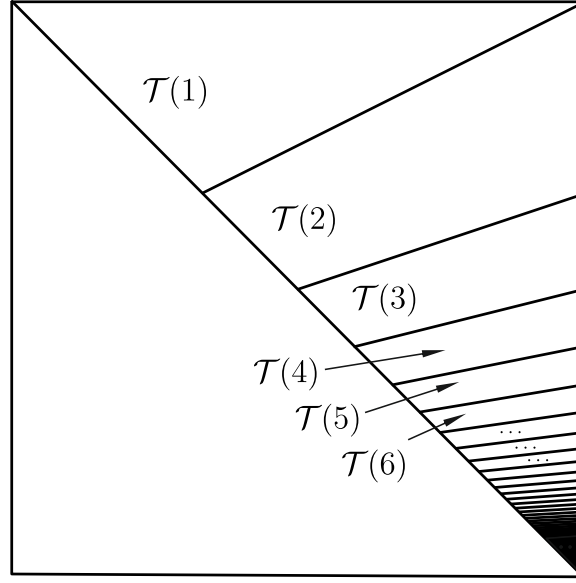
$$A = \left(\frac{k}{k+2}, \frac{2}{k+2} \right), \quad B = \left(1, \frac{2}{k} \right), \quad C = \left(1, \frac{2}{k+1} \right), \quad D = \left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{2}{k+1} \right)$$

(см. рис. 1 а, б). Далее, для заданного набора $\mathbf{k}_r = (k_1, \dots, k_r)$, состоящего из натуральных чисел, через $\mathcal{T}(\mathbf{k}_r)$ обозначим множество

$$\mathcal{T}(k_1) \cap T^{-1}\mathcal{T}(k_2) \cap T^{-2}\mathcal{T}(k_3) \cap \dots \cap T^{-(r-1)}\mathcal{T}(k_r).$$

Если это множество непусто, то его замыкание представляет собой выпуклый многоугольник⁴.

⁴Всюду далее, говоря об областях $\mathcal{T}(\mathbf{k}_r)$, слово «замыкание» будем опускать. Ввиду того, что замыкание каждого из таких множеств получается из него добавлением некоторых частей границы, а в формулах для долей $\nu(Q; r, D, c_0)$ фигурируют их площади, это не приведёт нас к недоразумениям.

Рис. 1а. Области $\mathcal{T}(k)$, $k \geq 1$.

Можно показать, что между парами q_0, q_1 соседних знаменателей ряда Фарея Φ_Q и примитивными точками треугольника $Q \cdot \mathcal{T}$ имеется взаимно-однозначное соответствие (см. [27, с. 562]). Так подсчёт числа кортежей (1), удовлетворяющих условиям (2), сводится к подсчёту суммарного количества примитивных точек во всех непустых областях $Q \cdot \mathcal{T}(\mathbf{k}_r)$, что отвечают наборам $\mathbf{k}_r = (k_1, \dots, k_r)$ из некоторого специального множества.

В свою очередь, подсчёт числа примитивных точек в некоторой «хорошей» области на координатной плоскости сводится в итоге к нахождению площади такой области. Для вычисления площади многоугольника $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ используется тот факт, что он задаётся системой линейных неравенств следующего вида:

$$0 < x, y \leq 1, \quad x + y > 1, \quad f_i(x; k_1, \dots, k_i) < y \leq g_i(x; k_1, \dots, k_i), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (4)$$

где

$$f_i(x; k_1, \dots, k_i) = \frac{1 + x \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i + 1)}{\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i + 1)}, \quad g_i(x; k_1, \dots, k_i) = \frac{1 + x \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i)}{\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i)}. \quad (5)$$

Рассуждения, проведённые в [2] с использованием метода работ [24]-[26], приводят к следующей формуле для доли $\nu(Q; r, D, c_0)$:

$$\nu(Q; r, D, c_0) = \frac{2}{D} \frac{\Delta}{\varphi(\Delta)} (\mathfrak{c}_r + O(R)), \quad (6)$$

где

$$\Delta = \text{Н.О.Д.}(c_0, D), \quad \mathfrak{c}_r = \sum_{\substack{0 \leq c_1 \leq D-1 \\ c_1 \neq c_0 \\ \text{Н.О.Д.}(c_1, \Delta)=1}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^{\circ}(D, c_0, c_1)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})|,$$

$$R = \frac{D^2}{Q} \left(1 + \frac{\ln Q}{D} \right) \Sigma_0 + (D^3 + Dr \ln Q + r(\ln Q)^2) \frac{\mathbf{1}_{\{r \leq 2D\}}}{Q^2} + \mathfrak{c}_r \frac{D\Delta}{\varphi(\Delta)} \frac{\ln Q}{Q}$$

$$\Sigma_0 = \sum_{\substack{0 \leq c_1 \leq D-1 \\ c_1 \neq c_0 \\ \text{н.о.д.}(c_1, \Delta)=1}} \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^\circ(D, c_0, c_1) \\ \|\mathbf{k}\| \leq 4r+1}} 1.$$

Здесь через $\mathcal{A}_r^\circ(D, c_0, c_1)$ обозначено множество всех наборов $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ натуральных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} c_1 \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) - c_0 \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i) \not\equiv c_0 \pmod{D}, & i = 1, 2, \dots, r-1, \\ c_1 \mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r) - c_0 \mathbb{K}_{r-1}(k_2, \dots, k_r) \equiv c_0 \pmod{D} \end{cases} \quad (7)$$

и таких, что область $\mathcal{T}(\mathbf{k})$ непуста. Символ $\|\mathbf{k}\|$ здесь и далее служит для обозначения наибольшей из компонент набора: $\|\mathbf{k}\| = \max \{k_1, \dots, k_r\}$. Величина $\mathbf{1}_A$ считается равной единице, если условие A выполнено, и равной нулю в противном случае. Постоянная в знаке O является абсолютной, причём формула (6) справедлива при любых r и D с условиями $1 \leq r \leq Q/3$, $D \geq 2$, $D = o(\sqrt{Q})$, и любом c_0 , $0 \leq c_0 \leq D-1$.

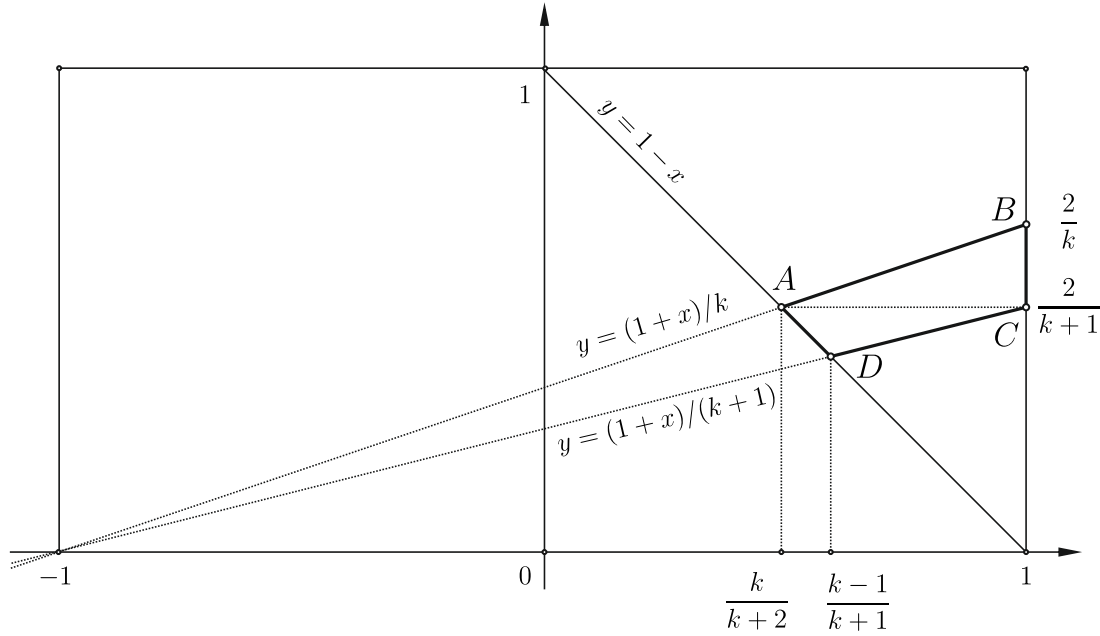


Рис. 16. Схематическое изображение области $\mathcal{T}(k)$ при $k \geq 2$.

В частном случае, когда разность прогрессии D фиксирована (не зависит от Q), оценка величины R в (6) принимает более простой вид:

$$R \ll_D (\mathfrak{c}_r + \Sigma_0) \frac{\ln Q}{Q}. \quad (8)$$

В статье [2] было дано явное описание множеств $\mathcal{A}_r^\circ(3; 0, c_1)$, $r \geq 1$, $c_1 = 1, 2$. Именно оно позволило получить асимптотические формулы для долей $\nu(Q; r, 3, 0)$. В настоящей работе приводится явное описание каждого из множеств $\mathcal{A}_r^\circ(3; c_0, c_1)$, $c_0 = 1, 2$, $0 \leq c_1 \leq 2$, $c_1 \neq c_0$, а также вычисление площадей многоугольников $\mathcal{T}(\mathbf{k})$, отвечающих всем наборам $\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^\circ(3; c_0, c_1)$.

На первом шаге к такому описанию преобразуем формулу (6) к виду, удобному для дальнейшего.

ЛЕММА 1. В каждом из случаев $c_0 = 1$, $c_0 = 2$ при любых r и D , $1 \leq r \leq Q/3$, $D \geq 2$, $D = o(\sqrt{Q})$ справедливо равенство

$$\nu(Q; r, D, c_0) = \frac{2}{3} \mathfrak{c}_r + O(R), \quad \text{причём} \quad \mathfrak{c}_r = \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^\circ(3,1,0)} + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^\circ(3,1,2)} \right) |\mathcal{T}(\mathbf{k})|,$$

для величины R справедлива оценка (8), а постоянная в знаке O - абсолютная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого из случаев $c_0 = 1$, $c_0 = 2$ имеем $\Delta = \text{Н.О.Д.}(c_0, 3) = 1$, так что формула (6) принимает вид

$$\nu(Q; r, D, c_0) = \frac{2}{3} \mathfrak{c}_r + O(R).$$

Далее, в случае $c_0 = 1$ имеем равенство

$$\mathfrak{c}_r = \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^\circ(3,1,0)} + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^\circ(3,1,2)} \right) |\mathcal{T}(\mathbf{k})|,$$

а в случае $c_0 = 2$ - равенство

$$\mathfrak{c}_r = \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^\circ(3,2,0)} + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^\circ(3,2,1)} \right) |\mathcal{T}(\mathbf{k})|.$$

Покажем теперь, что при любом $r \geq 1$ множества $\mathcal{A}_r^\circ(3,1,2)$ и $\mathcal{A}_r^\circ(3,2,1)$ состоят из одних и тех же наборов, и то же верно в отношении множеств $\mathcal{A}_r^\circ(3,1,0)$ и $\mathcal{A}_r^\circ(3,2,0)$.

В случае $D = 3$, $c_0 = 1$, $c_1 = 2$ условия (7) принадлежности набора $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ к $\mathcal{A}_r^\circ(3,1,2)$ имеют вид

$$\begin{cases} 2\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) - \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i) \not\equiv 1 \pmod{3}, & i = 1, 2, \dots, r-1, \\ 2\mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r) - \mathbb{K}_{r-1}(k_2, \dots, k_r) \equiv 1 \pmod{3}, \end{cases}$$

или, что то же, вид

$$\begin{cases} \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) + \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i) \not\equiv 2 \pmod{3}, & i = 1, 2, \dots, r-1, \\ \mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r) + \mathbb{K}_{r-1}(k_2, \dots, k_r) \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \quad (9)$$

Далее, условия принадлежности набора ко множеству $\mathcal{A}_r^\circ(3,2,1)$ имеют вид

$$\begin{cases} \mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) - 2\mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i) \not\equiv 2 \pmod{3}, & i = 1, 2, \dots, r-1, \\ \mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r) - 2\mathbb{K}_{r-1}(k_2, \dots, k_r) \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

и, очевидно, равносильны (9).

Несложно также проверить, что условия принадлежности набора $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ ко множествам $\mathcal{A}_r^\circ(3,1,0)$ и $\mathcal{A}_r^\circ(3,2,0)$ приводятся к одной и той же форме, а именно

$$\begin{cases} \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i) \not\equiv 2 \pmod{3}, & i = 1, 2, \dots, r-1, \\ \mathbb{K}_{r-1}(k_2, \dots, k_r) \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \quad (10)$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $r = 1$ условие (10) имеет вид $\mathbb{K}_0 \equiv 2 \pmod{3}$ и ввиду равенства $\mathbb{K}_0 = 1$ не может быть выполнено. Это означает, что множества $\mathcal{A}_1^\circ(3,1,0)$ и $\mathcal{A}_1^\circ(3,2,0)$ пусты. В случае $r \geq 2$ первое из условий (10) достаточно проверить лишь для $i \geq 2$, так как при $i = 1$ оно выполнено автоматически.

3. Простейшие свойства множеств $\mathcal{T}(\mathbf{k})$

В этом разделе собраны вспомогательные утверждения, связанные с простейшими свойствами областей $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$. В дальнейшем, при доказательстве основных лемм 13 и 14, при проверке непустоты таких множеств будет неоднократно использоваться следующее простое соображение. Пусть $r \geq 3$ и пусть $2 \leq j \leq r-1$. Поскольку

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(k_1, \dots, k_r) &= \mathcal{T}(k_1) \cap T^{-1}\mathcal{T}(k_2) \cap \dots \cap T^{-(j-2)}\mathcal{T}(k_{j-1}) \cap \\ &\quad \cap T^{-(j-1)}\{\mathcal{T}(k_j) \cap T^{-1}\mathcal{T}(k_{j+1}) \dots \cap T^{-(r-j-1)}\mathcal{T}(k_{r-j})\} = \\ &= \mathcal{T}(k_1, \dots, k_{j-1}) \cap T^{-(j-1)}\mathcal{T}(k_j, \dots, k_r), \end{aligned}$$

то необходимым условием непустоты исходной области $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ будет непустота каждой из областей

$$\mathcal{T}(k_1, \dots, k_{j-1}), \quad \mathcal{T}(k_j, \dots, k_r).$$

Последовательное применение этого приёма приводит к проверке непустоты множеств, которые отвечают наборам малой длины: $r = 2, 3$. Полное описание непустых областей для таких значений r даётся следующими двумя утверждениями, доказательства которых содержатся в [2] (леммы 10, 12).

ЛЕММА 2. Область $\mathcal{T}(k, t)$ пуста тогда, и только тогда, когда пара (k, t) удовлетворяет одному из следующих условий:

- (a) $t = 1, k = 1$; (b) $t = 2, k \geq 5$;
- (c) $t = 3, 4, k \geq 3$; (d) $t \geq 5, k \geq 2$.

ЛЕММА 3. Область $\mathcal{T}(k, t, n)$ пуста тогда, и только тогда, когда тройка (k, t, n) удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:

- (1) если пара (k, t) или (t, n) удовлетворяет условиям леммы 2;
- (2a) $t = 1, k = 2, 1 \leq n \leq 5$; (2b) $t = 1, k = 3, n \neq 4, 5, 6, 7, 8$;
- (2c) $t = 1, k = 4, n \neq 3, 4, 5$; (2d) $t = 1, k = 5, n \neq 3, 4$;
- (2e) $t = 1, 6 \leq k \leq 8, n \geq 4$; (2f) $t = 1, k \geq 9, n \geq 3$;
- (3a) $t = 2, k = 1, n \neq 2, 3, 4$; (3b) $t = 2, k = 2, n \geq 4$;
- (3c) $t = 2, k = 3, n \geq 3$; (3d) $t = 2, k = 4, n \geq 2$;
- (4a) $t = 3, k = 1, n \geq 3$; (4b) $t = 3, k = 2, n \geq 3$;
- (5a) $t = 4, k = 1, n \geq 3$; (5b) $t = 4, k = 2, n \geq 2$;
- (6) $t \geq 5, k = 1, n \geq 2$.

В некоторых случаях поиск непустых множеств $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ можно сократить с помощью следующих утверждений, которые представляют собой, соответственно, следствие 1 леммы 11 и п. а леммы 2 из [2].

ЛЕММА 4. Для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_r$ справедливо равенство:

$$|\mathcal{T}(k_r, \dots, k_1)| = |\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)|.$$

ЛЕММА 5. Если область $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ непуста, то $\mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r) \geq 1$.

Следующее утверждение показывает, что если в наборе $(k_1, \dots, k_r)$ имеется хотя бы одна достаточно большая компонента k_j , то такой набор имеет специальный вид.

ЛЕММА 6. Пусть $r \geq 1$, $\max\{k_1, \dots, k_r\} = k_j \geq 4r + 2$, и пусть область $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ непуста. Тогда набор $(k_1, \dots, k_r)$ имеет следующий вид:

$$k_i = 1 \quad \text{при} \quad |i - j| = 1, \quad k_i = 2 \quad \text{при} \quad |i - j| \geq 2. \quad (11)$$

Доказательство см. в [27] (п. (i) леммы 3.4; также см. второй абзац на стр. 570)⁵.

При нахождении сумм бесконечных рядов, которые возникают при подсчёте предельных долей $\nu(r; 3, c_0)$, $c_0 = 1, 2$, оказывается полезной

ЛЕММА 7. Справедливы следующие равенства:

- (a) $|\mathcal{T}(k, 1)| = |\mathcal{T}(k)|$ при $k \geq 5$; (b) $|\mathcal{T}(k, 1, 2)| = |\mathcal{T}(k)|$ при $k \geq 9$;
- (c) $|\mathcal{T}(2, 1, k)| = |\mathcal{T}(k)|$ при $k \geq 9$; (d) $|\mathcal{T}(2, 1, k, 1)| = |\mathcal{T}(k)|$ при $k \geq 9$;
- (e) $|\mathcal{T}(2, 1, k, 1, 2)| = |\mathcal{T}(k)|$ при $k \geq 9$; (f) $|\mathcal{T}(1, k, 1)| = |\mathcal{T}(k)|$ при $k \geq 6$.

Это есть лемма 12 из [2].

Наконец, при построении множеств $\mathcal{A}_r^\circ(3, c_0, c_1)$ нам потребуется несколько утверждений о пустоте (непустоте) ряда областей $\mathcal{T}(\mathbf{k}_r)$, которые отвечают наборам $\mathbf{k}_r = (k_1, \dots, k_r)$ специального вида. Их доказательства в целом сходны и следуют одному шаблону: имея явный вид неравенств, задающих область $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_{r-1})$, и используя явный вид функций $f(x) = f_r(x; \mathbf{k}_r)$, $g(x) = g_r(x; \mathbf{k}_r)$ (см. формулы (5)), можно определить те значения параметра k_r , при которых пересечение $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_{r-1})$ с областью, определённой неравенствами $f(x) < y \leq g(x)$, будет пусто (непусто).

ЛЕММА 8. Область $\mathcal{T}(k, 1, 2, 4)$ непуста лишь при $6 \leq k \leq 8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4, области $\mathcal{T}(k, 1, 2, 4)$ и $\mathcal{T}(4, 2, 1, k)$ одновременно пусты или непусты. В силу п. 2а леммы 3, необходимое условие непустоты последней - непустота $\mathcal{T}(2, 1, k)$ - влечёт неравенство $k \geq 6$.

Далее, прямым вычислением проверяется, что область $\mathcal{T}(4, 2, 1)$ задаётся системой неравенств

$$\frac{2}{3} < x \leq 1, \quad \frac{1+x}{5} < y \leq \frac{1+2x}{7} \quad (12)$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad B = \left(1, \frac{3}{7}\right), \quad C = \left(1, \frac{2}{5}\right).$$

При переходе к области $\mathcal{T}(4, 2, 1, k)$ к системе (12) добавляются неравенства $f(x) < y \leq g(x)$, где

$$f(x) = f_4(x; 4, 2, 1, k) = \frac{1+x \mathbb{K}_3(2, 1, k+1)}{\mathbb{K}_4(4, 2, 1, k+1)} = \frac{1+x(k-1)}{3k-4},$$

$$g(x) = g_4(x; 4, 2, 1, k) = \frac{1+x \mathbb{K}_3(2, 1, k)}{\mathbb{K}_4(4, 2, 1, k)} = \frac{1+x(k-2)}{3k-7}.$$

Решением неравенства $g(x) \leq (1+x)/5$ служит луч $x \leq x_k$, где

$$x_k = \frac{3k-12}{2k-3}.$$

⁵В статье [27] вместо $\mathcal{T}(k)$ используется обозначение $\mathcal{T}_k$.

При любом $k \geq 9$ этот луч содержит отрезок $2/3 \leq x \leq 1$, который служит проекцией $\triangle ABC$ на горизонтальную ось. Таким образом, при $k \geq 9$ треугольник ABC лежит над прямой $y = g(x)$, так что область $\mathcal{T}(4, 2, 1, k)$ оказывается пустой. Непустота $\mathcal{T}(4, 2, 1, k)$ при $6 \leq k \leq 8$ проверяется непосредственно (см. рис. 2).

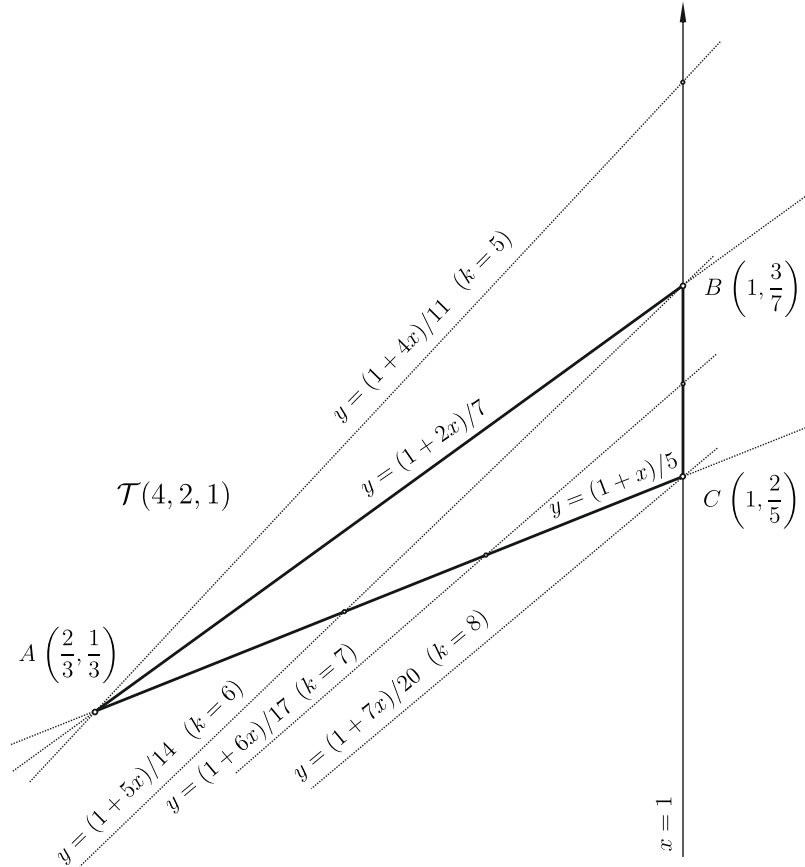


Рис. 2. Схематическое изображение области $\mathcal{T}(4, 2, 1)$ и прямых $y = f(x)$, отвечающих $5 \leq k \leq 8$.

ЛЕММА 9. Пусть $n \geq 2$. Тогда:

(а) область $\mathcal{T}(3, 2^n)$ задаётся системой неравенств

$$\frac{2n-1}{2n+1} < x \leq 1, \quad \frac{1+x}{4} < y \leq \frac{1+(n+1)x}{2n+3} \quad (13)$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{2n-1}{2n+1}, \frac{n}{2n+1} \right), \quad B = \left(1, \frac{n+2}{2n+3} \right), \quad C = \left(1, \frac{1}{2} \right);$$

(б) область $\mathcal{T}(3, 2^n, k)$ пуста при $k \geq 3$ и непуста при $1 \leq k \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение (а) индукцией по n и одновременно установим справедливость утверждения (б). При $n = 2$ утверждение (а) проверяется прямым вычислением. Пусть оно справедливо для всех n , $2 \leq n \leq m$. Докажем, что (б) выполняется для $n = m$, и что (а) верно и для $n = m + 1$.

Действительно, при переходе от $\mathcal{T}(3, 2^m)$ к $\mathcal{T}(3, 2^m, k)$ к системе (13) добавляются неравенства $f(x) < y \leq g(x)$, где

$$f(x) = f_{m+2}(x; 3, 2^m, k) = \frac{1 + x \mathbb{K}_{m+1}(2^m, 1, k+1)}{\mathbb{K}_{m+2}(3, 2^m, k+1)} = \frac{1 + x(km + k + 1)}{2km + 3k + 2},$$

$$g(x) = g_{m+2}(x; 3, 2^m, k) = \frac{1 + x \mathbb{K}_{m+1}(2^m, 1, k)}{\mathbb{K}_{m+2}(3, 2^m, k)} = \frac{1 + x(km + k - m)}{2km + 3k - 2m - 1}$$

(здесь и далее мы пользуемся явными формулами для континуантов, которые получены в леммах 19, 20 работы [2]). Несложно проверить, что неравенство $f(x) < g(x)$ выполнено при $x > -(2m + 3)$ и, в частности, для всех x с условием $0 \leq x \leq 1$. Далее, неравенство $g(x) < (1 + x)/4$ имеет решением луч $x \leq x_k$, где

$$x_k = \frac{(2m + 1)(k - 1) + 2 + 2(k - 3)}{(2m + 1)(k - 1) + 2}.$$

В частности, при $k \geq 3$ для всех x , $0 \leq x \leq 1$, имеем: $f(x) < g(x) < (1 + x)/4$. Следовательно, область $\mathcal{T}(3, 2^m, k)$ при таких k пуста.

Подстановка значений $k = 1, 2$ приводит, соответственно, к парам

$$f(x) = \frac{1 + (m + 2)x}{2m + 5}, \quad g(x) = \frac{1 + x}{2}, \quad \text{и} \quad f(x) = \frac{1 + (2m + 3)x}{4m + 8}, \quad g(x) = \frac{1 + (m + 2)x}{2m + 5}.$$

Несложно проверить, что $\triangle ABC$ целиком лежит под прямой $y = (1 + x)/2$ и целиком лежит над прямой $y = (1 + (2m + 3)x)/(4m + 8)$. Вместе с тем, прямая

$$y = \frac{1 + (m + 2)x}{2m + 5}$$

пересекает отрезки AB и AC в точках

$$A_1 = \left(\frac{2m + 1}{2m + 3}, \frac{m + 1}{2m + 3} \right), \quad B_1 = \left(1, \frac{m + 3}{2m + 5} \right)$$

и таким образом делит $\triangle ABC$ на две части. Из этих частей верхняя отвечает значению $k = 1$, а нижняя - значению $k = 2$. Поэтому обе области $\mathcal{T}(3, 2^m, 1)$, $\mathcal{T}(3, 2^{m+1})$ непусты и задаются, соответственно, системами неравенств

$$\begin{cases} \frac{2m - 1}{2m + 1} < x \leq \frac{2m + 1}{2m + 3}, & \frac{1 + x}{4} < y \leq \frac{1 + (m + 1)x}{2m + 3}, \\ \frac{2m + 1}{2m + 3} < x \leq 1, & \frac{1 + (m + 2)x}{2m + 5} < y \leq \frac{1 + (m + 1)x}{2m + 3} \end{cases} \quad (14)$$

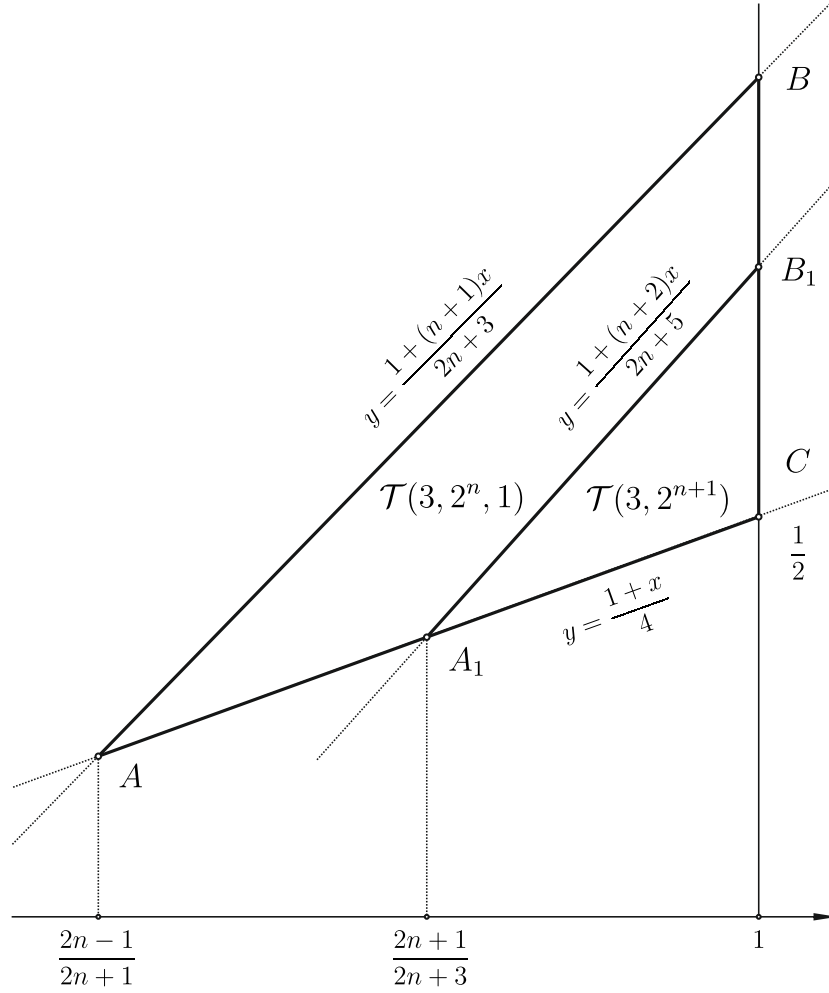
и

$$\frac{2m + 1}{2m + 3} < x \leq 1, \quad \frac{1 + (m + 2)x}{2m + 5} < y \leq \frac{1 + (m + 2)x}{2m + 5}$$

(см. рис. 3). Этим завершается доказательство леммы.

ЛЕММА 10. Пусть $n \geq 1$. Область $\mathcal{T}(k, 1, 2^n)$ непуста тогда, и только тогда, когда $k \geq 4n + 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 4, области $\mathcal{T}(k, 1, 2^n)$ и $\mathcal{T}(2^n, 1, k)$ одновременно пусты или непусты. Поскольку при $n = 1$ искомое утверждение следует из п. 2а леммы 3, то далее считаем $n \geq 2$.

Рис. 3. Схематическое изображение областей $\mathcal{T}(3, 2^n, 1)$ и $\mathcal{T}(3, 2^{n+1})$.

Поскольку $\mathbb{K}_{n+2}(2^n, 1, k) = k - n - 1 \leq 0$ при $1 \leq k \leq n + 1$, то в силу леммы 5 область $\mathcal{T}(2^n, 1, k)$ при таких k пуста. Поэтому далее предполагаем, что $k \geq n + 2$.

С помощью рассуждений, аналогичных доказательству леммы 9, можно показать, что область $\mathcal{T}(2^n, 1)$ задаётся системой неравенств

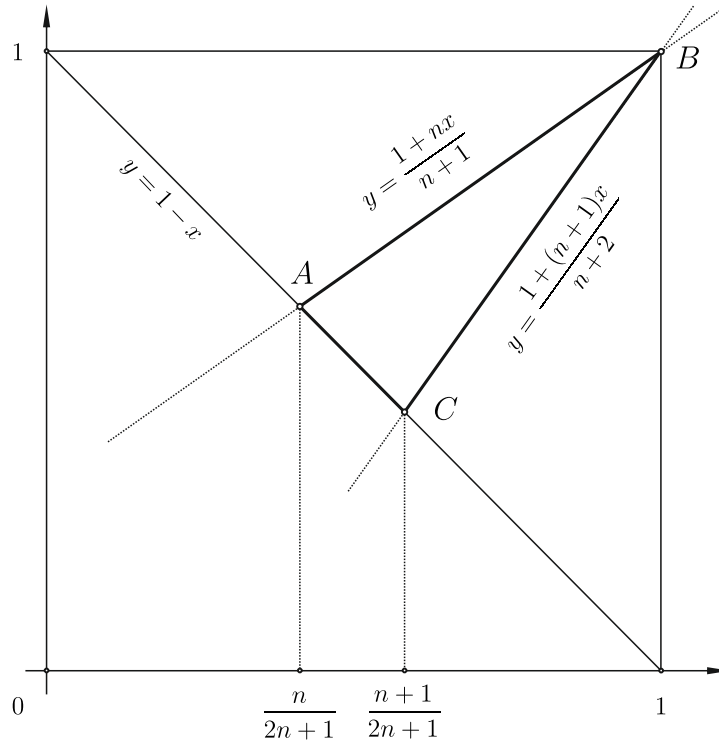
$$\begin{cases} \frac{n}{2n+1} < x \leq \frac{n+1}{2n+3}, & 1-x < y \leq \frac{1+nx}{n+1}, \\ \frac{n+1}{2n+3} < x \leq 1, & \frac{1+(n+1)x}{n+2} < y \leq \frac{1+nx}{n+1} \end{cases} \quad (15)$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{n}{2n+1}, \frac{n+1}{2n+1} \right), \quad B = (1, 1), \quad C = \left(\frac{n+1}{2n+3}, \frac{n+2}{2n+3} \right)$$

(см. рис. 4а).

При переходе к области $\mathcal{T}(2^n, 1, k)$ к системе (15) добавляются неравенства $F_k(x) < y \leq$

Рис. 4а. Схематическое изображение области $\mathcal{T}(2^n, 1)$.

$\leq G_k(x)$, где

$$F_k(x) = f_{n+2}(x; 2^n, 1, k) = \frac{1 + x \mathbb{K}_{n+1}(2^{n-1}, 1, k+1)}{\mathbb{K}_{n+2}(2^n, 1, k+1)} = \frac{1 + x(k-n+1)}{k-n},$$

$$G_k(x) = g_{n+2}(x; 2^n, 1, k) = \frac{1 + x \mathbb{K}_{n+1}(2^{n-1}, 1, k)}{\mathbb{K}_{n+2}(2^n, 1, k)} = \frac{1 + x(k-n)}{k-n-1}.$$

Однако при всех k , $n+2 \leq k \leq 4n+1$ прямая $y = F_k(x)$ лежит над $\triangle ABC$. Действительно, решением неравенства $(1 + nx)/(n+1) \leq F_k(x)$ служит луч $x \geq x_k$, где

$$x_k = \frac{k - 2n - 1}{k + 1}.$$

Он содержит в себе проекцию $\triangle ABC$ на горизонтальную ось, т.е. отрезок

$$\frac{n}{2n+1} \leq x \leq 1,$$

при выполнении условия $x_k \leq n/(2n+1)$. Но это имеет место при $k \leq 4n+1$. Следовательно, область $\mathcal{T}(2^n, 1, k)$ пуста при $n+2 \leq k \leq 4n+1$.

Несложно видеть, что

$$1 < 1 + \frac{2}{k-n} = F_k(1) < G_k(1) = 1 + \frac{2}{k-n-1}.$$

Далее, абсциссы точек пересечения прямых $y = F_k(x)$, $y = G_k(x)$ с прямой $y = 1 - x$ равны, соответственно,

$$X_k = \frac{k-n-1}{2(k-n)+1}, \quad X_{k-1} = \frac{k-n-2}{2(k-n)-1}$$

и удовлетворяют при любом $k \geq 4n + 2$ неравенствам

$$\frac{n}{2n+1} < X_{k-1} < X_k < 1,$$

так что обе прямые пересекают $\triangle ABC$ (см. рис. 46). Наконец, нетрудно проверить, что неравенство $F_k(x) \leq G_k(x)$ выполнено при всех $x \geq -1$. Следовательно, каждая из областей $\mathcal{T}(2^n, 1, k)$ при $k \geq 4n + 2$ непуста. Лемма доказана.

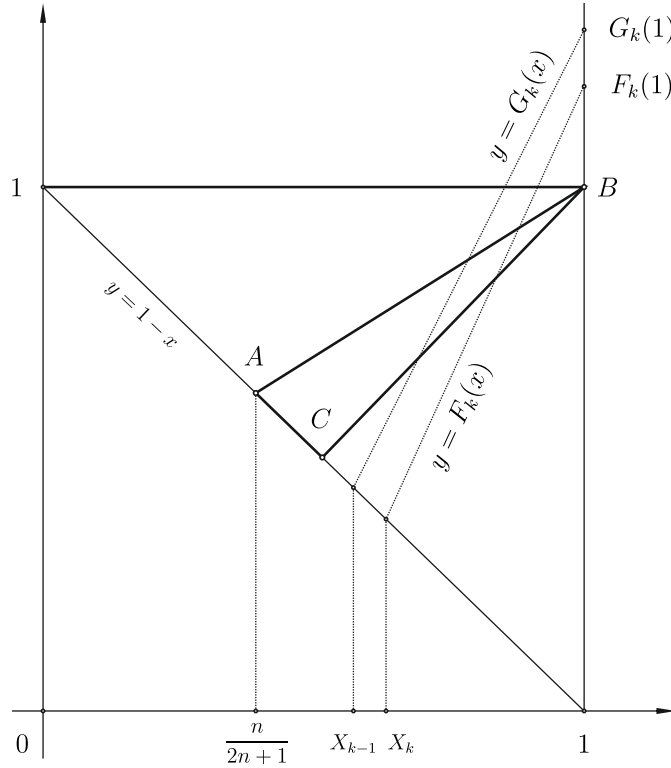


Рис. 46. Схематическое изображение области $\mathcal{T}(2^n, 1)$ и прямых $y = F_k(x)$, $y = G_k(x)$.

ЛЕММА 11. Область $\mathcal{T}(3, 2, 1, k)$ непуста лишь при $7 \leq k \leq 12$. При этом объединение непустых областей $\mathcal{T}(3, 2, 1, k)$ имеет площадь, равную $1/35$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственное вычисление показывает, что $\mathcal{T}(3, 2, 1)$ - четырёхугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right), \quad B = \left(1, \frac{3}{5}\right), \quad C = \left(1, \frac{4}{7}\right), \quad D = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right),$$

заданный неравенствами

$$\begin{cases} \frac{4}{7} < x \leq \frac{3}{5}, & 1 - x < y \leq \frac{1+2x}{5}, \\ \frac{3}{5} < x \leq 1, & \frac{1+3x}{7} < y \leq \frac{1+2x}{5} \end{cases} \quad (16)$$

(см. рис. 5), площадь которого равна $1/35$. При переходе к области $\mathcal{T}(3, 2, 1, k)$ к системе (16) добавятся дополнительные неравенства $f(x) < y \leq g(x)$, где

$$f(x) = f(x; 3, 2, 1, k) = \frac{1 + x \mathbb{K}_3(2, 1, k+1)}{\mathbb{K}_4(3, 2, 1, k+1)} = \frac{1 + x(k-1)}{2k-3},$$

$$g(x) = g(x; 3, 2, 1, k) = \frac{1 + x \mathbb{K}_3(2, 1, k)}{\mathbb{K}_4(3, 2, 1, k)} = \frac{1 + x(k-2)}{2k-5}.$$

Решением неравенства $g(x) \leq (1+3x)/7$ будет луч $x \leq (2k-12)/(k+1)$, который при $k \geq 13$ содержит отрезок $0 \leq x \leq 1$. Следовательно, при $k \geq 13$ четырёхугольник $\mathcal{T}(3, 2, 1)$ лежит целиком над прямой $y = g(x)$, так что области $\mathcal{T}(3, 2, 1, k)$ при $k \geq 13$ пусты.

Далее, решением неравенства $f(x) \geq (1+2x)/5$ будет луч $x \geq (2k-8)/(k+1)$, который при $k \leq 6$ содержит отрезок $4/7 \leq x \leq 1$. Следовательно, при $k \leq 6$ четырёхугольник $\mathcal{T}(3, 2, 1)$ лежит целиком под прямой $y = f(x)$, что влечёт пустоту областей $\mathcal{T}(3, 2, 1, k)$, $1 \leq k \leq 6$.

Непустота областей $\mathcal{T}(3, 2, 1, k)$, $7 \leq k \leq 12$, проверяется непосредственно (см. рис. 5).

ЗАМЕЧАНИЕ. Явный вид неравенств, задающих области $\mathcal{T}(3, 2, 1, k)$, $7 \leq k \leq 12$, а также площади этих областей приведены в Приложении 1.

ЛЕММА 12. Пусть $n \geq 2$. Тогда область $\mathcal{T}(3, 2^n, 1, k)$ непуста лишь при $4n+2 \leq k \leq 4n+8$. При этом объединение непустых областей $\mathcal{T}(3, 2^n, 1, k)$ имеет площадь, равную

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$$

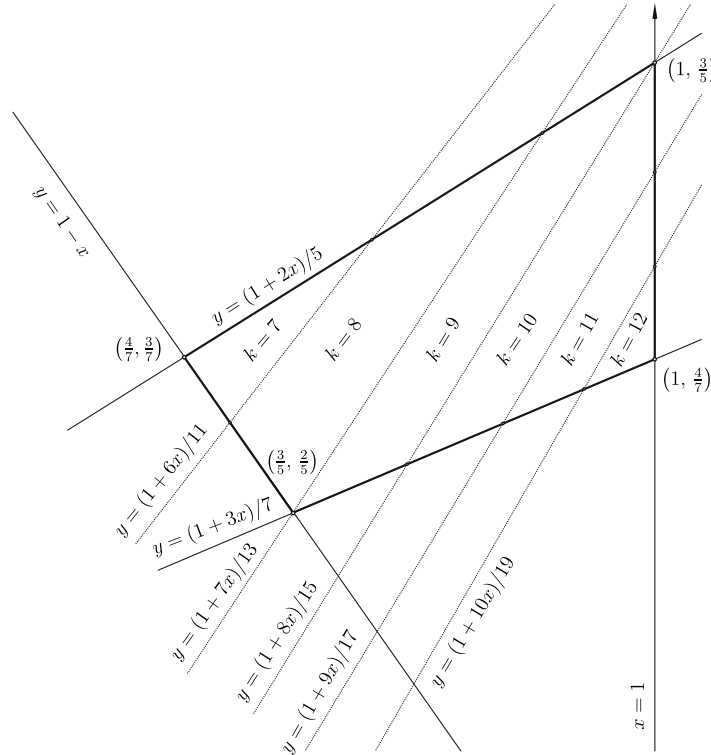


Рис. 5. Схематическое изображение области $\mathcal{T}(3, 2, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathbb{K}_{n+3}(3, 2^n, 1, k) = 2k - 2n - 3 < 0$ при $k \leq n+1$, области $\mathcal{T}(3, 2^n, 1, k)$ для таких k пусты. Будем далее предполагать, что $k \geq n+2$.

Из п. а леммы 9 и формул (14) следует, что область $\mathcal{T}(3, 2^n, 1)$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{2n-1}{2n+1} < x \leq \frac{2n+1}{2n+3}, & \frac{1+x}{4} < y \leq \frac{1+(n+1)x}{2n+3}, \\ \frac{2n+1}{2n+3} < x \leq 1, & \frac{1+(n+2)x}{2n+5} < y \leq \frac{1+(n+1)x}{2n+3} \end{cases} \quad (17)$$

и представляет из себя четырёхугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{2n-1}{2n+1}, \frac{n}{2n+1} \right), \quad B = \left(1, \frac{n+2}{2n+3} \right), \quad C = \left(1, \frac{n+3}{2n+5} \right), \quad D = \left(\frac{2n+1}{2n+3}, \frac{n+1}{2n+3} \right).$$

При переходе к области $\mathcal{T}(3, 2^n, 1, k)$ к системе (17) добавляются неравенства $F_k(x) < y \leq G_k(x)$, где

$$F_k(x) = f_{n+3}(x; 3, 2^n, 1, k) = \frac{1+x \mathbb{K}_{n+2}(2^n, 1, k+1)}{\mathbb{K}_{n+3}(3, 2^n, 1, k+1)} = \frac{1+x(k-n)}{2(k-n)-1},$$

$$G_k(x) = g_{n+3}(x; 3, 2^n, 1, k) = \frac{1+x \mathbb{K}_{n+2}(2^n, 1, k)}{\mathbb{K}_{n+3}(3, 2^n, 1, k)} = \frac{1+x(k-n-1)}{2(k-n)+1}.$$

Решением неравенства

$$\frac{1+(n+1)x}{2n+3} \leq F_k(x)$$

служит луч $x \geq x_k$, где

$$x_k = \frac{2(k-2n-2)}{k+1}.$$

Несложно проверить, что при $k \leq 4n+1$ величина x_k не превосходит абсциссы вершины A , т.е.

$$\frac{2(k-2n-2)}{k+1} \leq \frac{2n-1}{2n+1}.$$

Следовательно, при таких k луч $x \geq x_k$ содержит в себе отрезок

$$\frac{2n-1}{2n+1} \leq x \leq 1 \quad (18)$$

– проекцию $ABCD$ на горизонтальную ось. Поэтому четырёхугольник $ABCD$ целиком лежит под прямой $y = F_k(x)$ и область $\mathcal{T}(3, 2^n, 1, k)$ пуста.

Аналогично проверяется, что решением неравенства

$$G_k(x) \leq \frac{1+(n+2)x}{2n+5}$$

служит луч $x \leq X_k$, где

$$X_k = \frac{2(k-2n+4)}{k+1}.$$

Но при всех $k \geq 4n+9$ выполняется неравенство $X_k \geq 1$, так что этот луч содержит в себе отрезок (18). Поэтому $ABCD$ целиком лежит над прямой $y = G_k(x)$ и область $\mathcal{T}(3, 2^n, 1, k)$ оказывается пустой.

Непустота каждой из областей $\mathcal{T}(3, 2^n, 1, k)$, $4n+2 \leq k \leq 4n+8$ проверяется прямым вычислением (см. рис. 6). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Явный вид неравенств, задающих области $\mathcal{T}(3, 2^n, 1, k)$, $4n+2 \leq k \leq 4n+8$, а также площади этих областей приведены в Приложении 2.

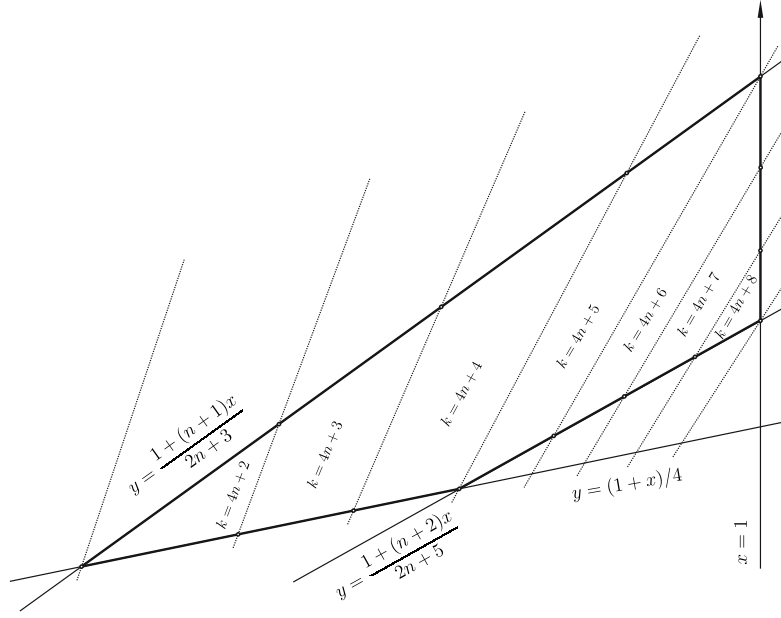


Рис. 6. Схематическое изображение области $\mathcal{T}(3, 2^n, 1)$ и её подобластей $\mathcal{T}(3, 2^n, 1, k)$, $4n + 2 \leq k \leq 4n + 8$, при $n \geq 2$.

4. Итеративное построение множеств $\mathcal{A}_r^\circ(3, 1, 2)$

Наряду со множествами $\mathcal{A}_r^\circ(D, c_0, c_1)$ удобно ввести множества $\mathcal{A}_r^*(D, c_0, c_1)$, определение которых отличается лишь тем, что последнее сравнение в (7) заменяется его отрицанием:

$$c_1 \mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r) - c_0 \mathbb{K}_{r-1}(k_2, \dots, k_r) \not\equiv c_0 \pmod{D}.$$

Соответственно, условия принадлежности набора множеству $\mathcal{A}_r^*(3, 1, 2)$ можно записать в форме

$$\mathbb{K}_i(k_1, \dots, k_i) + \mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i) \not\equiv 2 \pmod{3}, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (19)$$

СЛУЧАЙ $r = 1$. Условие (9) принимает вид

$$k_1 + 1 \equiv 2 \pmod{3}, \quad \text{т.е.} \quad k_1 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Значит, $\mathcal{A}_1^\circ(3, 1, 2)$ состоит из всех наборов (k_1) , где $k_1 \geq 1$, $k_1 \equiv 1 \pmod{3}$. Соответственно, $\mathcal{A}_1^*(3, 1, 2)$ образовано наборами (k_1) , $k_1 \geq 2$, $k_1 \not\equiv 1 \pmod{3}$.

СЛУЧАЙ $r = 2$. Условие (9) имеет вид

$$\begin{cases} k_1 \not\equiv 1 \pmod{3}, \\ k_2(k_1 + 1) \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

Если $k_1 \equiv 0 \pmod{3}$, то необходимо $k_2 \equiv 0 \pmod{3}$ и, таким образом, $k_1 \geq 3$, $k_2 \geq 3$. Согласно п. с леммы 2, все такие области пусты. Пусть $k_1 \equiv 2 \pmod{3}$. Тогда k_2 может принимать любые значения. Отберём лишь те, что отвечают непустым областям $\mathcal{T}(k_1, k_2)$.

Если $k_1 \neq 2$, то $k_1 \geq 5$. Согласно п. d леммы 2 и лемме 4, в этом случае единственным непустым множеством оказывается $\mathcal{T}(k_1, 1)$. Если же $k_1 = 2$, то в силу п. d леммы 2 множества

$\mathcal{T}(k_1, k_2) = \mathcal{T}(2, k_2)$ непусты лишь при $1 \leq k_2 \leq 4$. Следовательно, $\mathcal{A}_2^\circ(3, 1, 2)$ состоит из наборов

$$(k_1, 1), \quad \text{где } k_1 \equiv 2 \pmod{3}, \quad k_1 \geq 2; \\ (2, 2), (2, 3), (2, 4). \quad (20)$$

Далее, условия (19) имеют вид

$$\begin{cases} k_1 \not\equiv 1 \pmod{3}, \\ k_2(k_1 + 1) \not\equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \quad \text{или, что то же,} \quad \begin{cases} k_1 \equiv 0 \pmod{3}, \\ k_2 \not\equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

Из п.п. с, d леммы 2 и леммы 4 заключаем, что в случае $k_1 = 3$ такая область непуста лишь при $k_2 = 1, 2$, а в случае $k_1 \equiv 0 \pmod{3}$, $k_1 \geq 6$ - лишь при $k_1 = 1$. Итак, $\mathcal{A}_2^*(3, 1, 2)$ состоит из наборов

$$(k_1, 1), \quad \text{где } k_1 \equiv 0 \pmod{3}, \quad k_1 \geq 3; \\ (3, 2). \quad (21)$$

СЛУЧАЙ $r = 3$. Всякий набор $(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{A}_3^\circ(3, 1, 2)$ необходимо удовлетворяет условию $(k_1, k_2) \in \mathcal{A}_2^*(3, 1, 2)$. Согласно (21), для него либо $k_1 \equiv 0 \pmod{3}$, $k_1 \geq 3$, $k_2 = 1$, либо $k_1 = 3$, $k_2 = 2$.

В первом случае условие (9), отвечающее $i = r = 3$, принимает вид

$$(k_1 k_3 - k_1 - k_3) + (k_1 - 1) \equiv 2 \pmod{3}, \quad \text{т.е.} \quad k_1(k_3 - 1) \equiv 0 \pmod{3}$$

и, как несложно заметить, удовлетворяется автоматически при любом $k_3 \geq 1$. Пользуясь п.п. 2b, 2e, 2f леммы 3 заключаем, что непустым областям отвечают лишь наборы

$$(k_1, 1, 2), \quad k_1 \equiv 0 \pmod{3}, \quad k_1 \geq 6; \\ (3, 1, 4), (3, 1, 5), (3, 1, 5), (3, 1, 7), (3, 1, 8); \\ (6, 1, 3). \quad (22)$$

Во втором случае условие (9) для набора $(k_1, k_2, k_3) = (3, 2, k_3)$ принимает вид

$$(5k_3 - 3) + (2k_3 - 1) \equiv 2 \pmod{3}, \quad \text{т.е.} \quad 7k_3 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Пустота областей $\mathcal{T}(3, 2, k_3)$ для $k_3 \geq 3$ следует из п. 3с леммы 3. Таким образом, $\mathcal{A}_3^\circ(3, 1, 2)$ состоит из наборов (22).

Далее, если $(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{A}_3^*(3, 1, 2)$, то необходимо $(k_1, k_2) \in \mathcal{A}_2^*(3, 1, 2)$, т.е., как показано выше, либо $k_1 \equiv 0 \pmod{3}$, $k_1 \geq 3$, $k_2 = 1$, либо $k_1 = 3$, $k_2 = 2$.

При $k_2 = 1$ условие (19), отвечающее $i = r = 3$, после несложных преобразований приводится к виду

$$k_1(k_3 - 1) \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Так как в первом случае $k_1 \equiv 0 \pmod{3}$, то это условие не может быть выполнено ни при каком k_3 . Во втором случае то же условие принимает вид

$$7k_3 \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

При $k_3 \geq 3$ пустота $\mathcal{T}(3, 2, k_3)$ следует из п. 3с леммы 3. Таким образом, непустые области отвечают лишь значениям $k_3 = 1, k_3 = 2$. Значит, множество $\mathcal{A}_3^*(3, 1, 2)$ состоит из наборов

$$(3, 2, 1), \quad (3, 2, 2). \quad (23)$$

Оказывается, что и при любом $r \geq 4$ множество $\mathcal{A}_r^*(3, 1, 2)$ состоит из двух наборов: $(3, 2^{r-2}, 1)$ и $(3, 2^{r-1})$. Докажем это индукцией по r .

В случае $r = 3$ это было установлено выше. Предположим теперь, что это утверждение верно для всех r , $3 \leq r \leq m-1$, где $m \geq 4$, и докажем его для $r = m$.

Действительно, пусть $(k_1, \dots, k_m) \in \mathcal{A}_m^*(3, 1, 2)$. Тогда $(k_1, \dots, k_{m-1}) \in \mathcal{A}_{m-1}^*(3, 1, 2)$, так что в силу предположения индукции $(k_1, \dots, k_{m-1})$ - один из наборов $(3, 2^{m-3}, 1)$ и $(3, 2^{m-2})$. Следовательно, $(k_1, \dots, k_m)$ имеет вид $(3, 2^{m-3}, 1, k)$ либо $(3, 2^{m-2}, k)$, где $k \geq 1$ - некоторое целое число.

В первом случае условие (19), отвечающее $i = m$, имеет вид

$$\mathbb{K}_m(3, 2^{m-3}, 1, k) + \mathbb{K}_{m-1}(2^{m-3}, 1, k) \not\equiv 2 \pmod{3}. \quad (24)$$

Из явных формул для континуантов получаем:

$$\mathbb{K}_m(3, 2^{m-3}, 1, k) = 2(k - m) + 3, \quad \mathbb{K}_{m-1}(2^{m-3}, 1, k) = k - m + 2,$$

так что (24) принимает вид $3(k - m) + 5 \not\equiv 2 \pmod{3}$ и, таким образом, не удовлетворяется ни при каком k . Следовательно, набор $(k_1, \dots, k_m)$ не может иметь вид $(3, 2^{m-3}, 1, k)$.

Во втором случае имеем условие

$$\mathbb{K}_m(3, 2^{m-2}, k) + \mathbb{K}_{m-1}(2^{m-2}, k) \not\equiv 2 \pmod{3},$$

которое с помощью равенств

$$\mathbb{K}_m(3, 2^{m-2}, k) = 2km - k - 2m + 3, \quad \mathbb{K}_{m-1}(2^{m-2}, k) = km - k - m + 2$$

приводится к виду

$$3m(k - 1) - 2k + 5 \not\equiv 2 \pmod{3}, \quad \text{т.е.} \quad k \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Поскольку $m - 2 \geq 2$, то в силу п. б леммы 9 область $\mathcal{T}(3, 2^{m-2}, k)$ будет пуста при $k \geq 3$ и непуста при $k = 1, 2$. Итак, $\mathcal{A}_m^*(3, 1, 2)$ действительно состоит из двух наборов: $(3, 2^{m-2}, 1)$ и $(3, 2^{m-1})$.

Отыщем теперь все наборы, образующие множество $\mathcal{A}_r^o(3, 1, 2)$ при $r \geq 4$.

Если $(k_1, \dots, k_r)$ - набор из $\mathcal{A}_r^o(3, 1, 2)$, то $(k_1, \dots, k_{r-1})$ - набор из $\mathcal{A}_{r-1}^*(3, 1, 2)$ и потому, в силу доказанного, совпадает либо с $(3, 2^{r-2})$, либо с $(3, 2^{r-3}, 1)$.

В первом случае исходный набор имеет вид $(3, 2^{r-2}, k)$, где k удовлетворяет последнему из условий (9), т.е.

$$\mathbb{K}_r(3, 2^{r-2}, k) + \mathbb{K}_{r-1}(2^{r-2}, k) \equiv 2 \pmod{3}$$

или, что то же, сравнению

$$3(k - 1)(r - 2) + 4k - 1 \equiv 2 \pmod{3},$$

которое удовлетворяется при $k \equiv 0 \pmod{3}$. Пустота такой области следует из п. 3б леммы 9.

Во втором случае исходный набор имеет вид $(3, 2^{r-2}, 1, k)$, так что условие на k выглядит следующим образом:

$$\mathbb{K}_r(3, 2^{r-3}, 1, k) + \mathbb{K}_{r-1}(2^{r-3}, 1, k) \equiv 2 \pmod{3}.$$

Последнее сравнение равносильно следующему:

$$(2k - 2r + 3) + (k - r + 2) \equiv 2 \pmod{3}.$$

Но оно удовлетворяется при любом $k \geq 1$. Если $r = 4$, то в силу леммы 11 непустые области $\mathcal{T}(3, 2^{r-3}, 1, k) = \mathcal{T}(3, 2, 1, k)$ отвечают лишь $7 \leq k \leq 12$. Если же $r \geq 5$, то из леммы 12 несложно заключить, что среди таких областей непустыми будут лишь те, что отвечают значениям $4r - 10 \leq k \leq 4r - 4$.

Этим завершается описание множеств $\mathcal{A}_r^\circ(3, 1, 2)$.

Доказанному утверждению удобно придать следующую формулировку.

ЛЕММА 13. *Множество $\mathcal{A}_r^\circ(3, 1, 2)$ (u , следовательно, множество $\mathcal{A}_r^\circ(3, 2, 1)$) состоит из следующих наборов:*

r	$\bar{k}$	$\mathbb{K}_r(\bar{k})$
1	$(k_1), k_1 \equiv 1 \pmod{3}, k_1 \geq 3$	k_1
2	$(k_1, 1), k_1 \equiv 2 \pmod{3}, k_1 \geq 2$	$k_1 - 1$
2	$(2, 2)$	3
2	$(2, 3)$	5
2	$(2, 4)$	7
3	$(k_1, 1, 2), k_1 \equiv 0 \pmod{3}, k_1 \geq 3$	$k_1 - 2$
3	$(3, 1, k_3), 4 \leq k_3 \leq 8$	$2k_3 - 3$
3	$(6, 1, 3)$	9
4	$(3, 2, 1, k_4), 7 \leq k_4 \leq 12$	$2k_4 - 5$
≥ 5	$(3, 2^{r-3}, 1, k_r), 4r - 10 \leq k_r \leq 4r - 4$	$2k_r - 2r + 3$

5. Итеративное построение множеств $\mathcal{A}_r^\circ(3, 1, 0)$

Условия принадлежности набора $(k_1, \dots, k_r)$ ко множеству $\mathcal{A}_r^\circ(3, 1, 0)$ имеют вид (10). Соответственно, условие принадлежности набора ко множеству $\mathcal{A}_r^*(3, 1, 0)$ имеет вид

$$\mathbb{K}_{i-1}(k_2, \dots, k_i) \not\equiv 2 \pmod{3}, \quad i = 2, 3, \dots, r-1. \quad (25)$$

Как уже отмечалось, в СЛУЧАЕ $r = 1$ условия (10) не могут удовлетворяться ни при каком k_1 , так что множество $\mathcal{A}_1^\circ(3, 1, 0)$ является пустым, а множество $\mathcal{A}_1^*(3, 1, 0)$ состоит из всех наборов $(k_1), k_1 \geq 1$.

В СЛУЧАЕ $r = 2$ условие (10) имеет вид $k_2 \equiv 2 \pmod{3}$. Из наборов (k_1, k_2) с условиями $k_1 \geq 1, k_2 \equiv 2 \pmod{3}$ непустым областям отвечают лишь наборы

$$(1, k_2), \quad k_2 \equiv 2 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 2;$$

$$(2, 2), (3, 2), (4, 2),$$

которые и составляют множество $\mathcal{A}_2^\circ(3, 1, 0)$. Далее, условия (25) принимают вид: $k_2 \not\equiv 2 \pmod{3}, k_1 \geq 1$ - произвольное число. Пользуясь п.п. b, d леммы 2, в случаях $k_1 = 1$ или $k_2 = 1$ получим следующие наборы, отвечающие непустым областям:

$$(1, k_2), \quad k_2 \not\equiv 2 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 3$$

$$(k_1, 1), \quad k_1 \geq 2 \quad - \quad \text{произвольное.}$$

В силу сказанного выше, в случае $k_1 = 2$ имеем лишь две непустые области $\mathcal{T}(2, 3)$ и $\mathcal{T}(2, 4)$. В случае $k_1 \geq 3$ непустых областей, отвечающих значениям $k_2 \geq 3, k_2 \not\equiv 2 \pmod{3}$, нет. Следовательно, $\mathcal{A}_2^*(3, 1, 0)$ состоит из наборов

$$(a) \quad (1, k_2), \quad k_2 \equiv 0 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 3;$$

$$(b) \quad (1, k_2), \quad k_2 \equiv 1 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 4;$$

$$(c) \quad (k_1, 1), \quad k_1 \geq 2;$$

$$(d) \quad (2, 3), (2, 4). \quad (26)$$

В случае $r = 3$ множество $\mathcal{A}_r^\circ(3, 1, 0)$ состоит из наборов вида (k_1, k_2, k_3) , где $(k_1, k_2) \in \mathcal{A}_2^*(3, 1, 0)$ - один из наборов (26), а число k_3 удовлетворяет условию

$$k_2 k_3 \equiv 0 \pmod{3}. \quad (27)$$

Если (k_1, k_2) имеет вид (26 а), то (27) удовлетворяется при любом k_3 . Согласно п.п. 4а и 6 леммы 3, непустым областям будут отвечать лишь наборы

$$(1, k_2, 1), \quad k_2 \equiv 0 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 3;$$

$$(1, 3, 2).$$

Если (k_1, k_2) имеет вид (26 б), то в силу (27) имеем $k_3 \equiv 0 \pmod{3}$. Поскольку $k_2 \geq 4$, то в силу п. с леммы 2 все соответствующие области пусты.

Если (k_1, k_2) имеет вид (26 с), то и здесь имеем $k_3 \equiv 0 \pmod{3}$. Согласно пп. 2а-2ф леммы 3, непустым областям отвечают наборы

$$(2, 1, k_3), \quad k_3 \equiv 0 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 6;$$

$$(3, 1, 6);$$

$$(k_1, 1, 3), \quad 4 \leq k_1 \leq 8.$$

Если $(k_1, k_2) = (2, 3)$, то в силу (27) число k_3 может быть любым, но непустыми областями, согласно п. 4б леммы 3, будут лишь те, что отвечают наборам

$$(2, 3, 1), \quad (2, 3, 2).$$

Наконец, если $(k_1, k_2) = (2, 4)$, то необходимо $k_3 \equiv 0 \pmod{3}$, так что $k_3 \geq 3$. Но соответствующие области пусты в силу леммы 2.

Итак, $\mathcal{A}_3^\circ(3, 1, 0)$ состоит из наборов

$$(1, k_2, 1), \quad k_2 \equiv 0 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 3;$$

$$(2, 1, k_3), \quad k_3 \equiv 0 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 6;$$

$$(1, 3, 2); \quad (28)$$

$$(2, 3, 1), (2, 3, 2);$$

$$(3, 1, 6);$$

$$(k_1, 1, 3), \quad 4 \leq k_1 \leq 8.$$

Переходя к описанию наборов $(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{A}_3^*(3, 1, 0)$, в силу (25), (27) будем иметь:

$$k_2 k_3 \not\equiv 0 \pmod{3}. \quad (29)$$

Условие (29) исключает из рассмотрения наборы (26 а) и набор (2, 3).

Пусть (k_1, k_2) имеет вид (26 б). Здесь $k_2 \geq 4$, так что в силу леммы п.п. с, d леммы 2 и леммы 4 следует рассмотреть лишь значения $k_3 = 1, 2$. Согласно п.п. 5а, 6 леммы 3, непустым областям отвечают лишь наборы вида

$$(1, k_2, 1), \quad k_2 \equiv 1 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 4;$$

$$(1, 4, 2).$$

Пусть (k_1, k_2) имеет вид (26 с). Тогда $k_3 \not\equiv 0 \pmod{3}$ и в силу п.п. 2а-2f леммы 3 непустые области отвечают наборам

$$\begin{aligned} &(2, 1, k_3), \quad k_3 \equiv 1 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 7; \\ &(2, 1, k_3), \quad k_3 \equiv 2 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 8; \\ &(3, 1, k_3), \quad k_3 = 4, 5, 7, 8; \\ &(4, 1, 4), (4, 1, 5); \\ &(5, 1, 4); \\ &(k_1, 1, 2), \quad k_1 \geq 6. \end{aligned}$$

Пусть, наконец, $(k_1, k_2) = (2, 4)$. Тогда единственная непустая область отвечает набору $(2, 4, 1)$.

Объединив полученные результаты, заключаем, что $\mathcal{A}_3^*(3, 1, 0)$ состоит из следующих наборов:

$$\begin{aligned} &(k_1, 1, 2), \quad k_1 \geq 6; \\ &(1, k_2, 1), \quad k_2 \equiv 1 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 4; \\ &(2, 1, k_3), \quad k_3 \equiv 1 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 7; \\ &(2, 1, k_3), \quad k_3 \equiv 2 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 8; \\ &(1, 4, 2), (2, 4, 1); \\ &(3, 1, k_3), \quad k_3 = 4, 5, 7, 8; \\ &(4, 1, 4), (4, 1, 5); \\ &(5, 1, 4). \end{aligned} \tag{30}$$

В СЛУЧАЕ $r=4$ для всякого набора $(k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathcal{A}_4^o(3, 1, 0)$ имеем: $(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{A}_3^*(3, 1, 0)$ - набор из перечня (30), а величина k_4 удовлетворяет сравнению

$$k_4(k_2 k_3 - 1) - k_2 \equiv 2 \pmod{3}. \tag{31}$$

Если $(k_1, k_2, k_3) = (k_1, 1, 2)$, то $k_4 \equiv 0 \pmod{3}$. В силу п. 3а леммы 3, единственным возможным значением для k_4 будет 3. Согласно лемме 4, области $\mathcal{T}(k, 1, 2, 3)$ и $\mathcal{T}(3, 2, 1, k)$ одновременно пусты или непусты. В силу леммы 11, области $\mathcal{T}(3, 2, 1, k)$ непусты лишь при $7 \leq k \leq 12$. Следовательно, в $\mathcal{A}_4^o(3, 1, 0)$ войдут наборы

$$(k_1, 1, 2, 3), \quad 7 \leq k_1 \leq 12.$$

Если $(k_1, k_2, k_3) = (1, k_2, 1)$, где $k_2 \equiv 1 \pmod{3}$, $k_2 \geq 4$, то (31) выполняется при всех k_4 . Согласно п.п. 2с, 2е и 2f леммы 3, для выполнения необходимого условия - непустоты $\mathcal{T}(k_2, 1, k_4)$ при $k_2 = 4$ необходимо $3 \leq k_4 \leq 5$, при $k_2 = 7$ необходимо $2 \leq k_4 \leq 3$, а при $k_2 \geq 11$ имеется единственная возможность $k_4 = 2$.

В первых двух случаях непосредственное вычисление показывает, что непустым областям отвечают наборы

$$\begin{aligned} &(1, 4, 1, 3), (1, 4, 1, 4), (1, 4, 1, 5); \\ &(1, 7, 1, 3); \\ &(1, k_2, 1, 2), \quad k_2 \equiv 1 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 7. \end{aligned}$$

В третьем случае непустота областей при $k_2 \geq 9$ есть следствие п. d леммы 7, а при $k_2 = 7, 8$ проверяется прямым вычислением. Если $(k_1, k_2, k_3) = (2, 1, k_3)$, где $k_3 \equiv 1 \pmod{3}$, $k_3 \geq 7$, то и в этом случае (31) выполняется при всех $k_4 \geq 1$. Согласно п. 6 леммы 3, необходимое

условие - непустота области $\mathcal{T}(k_2, k_3, k_4) = \mathcal{T}(1, k_3, k_4)$ - влечёт равенство $k_4 = 1$. В силу п. d леммы 7, все области $\mathcal{T}(2, 1, k_3, 1)$ при $k_3 \geq 9$ непусты. Их непустота при $k_3 = 7, 8$ проверяется непосредственно. Так получаем наборы

$$(2, 1, k_3, 1), \quad k_3 \equiv 1 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 7.$$

Если $(k_1, k_2, k_3) = (2, 1, k_3)$, где $k_3 \equiv 2 \pmod{3}$, $k_3 \geq 8$, то из (31) следует, что $k_4 \equiv 0 \pmod{3}$ и, таким образом, $k_4 \geq 3$. Так как $k_3 \geq 8$, то в силу леммы 2 необходимое условие - непустота области $\mathcal{T}(k_3, k_4)$ - не выполнено. Следовательно, все рассматриваемые области пусты.

Согласно п. 5b леммы 3, область $\mathcal{T}(k_2, k_3, k_4) = \mathcal{T}(4, 2, k_4)$ непуста лишь при $k_4 = 1$. Значит, все рассматриваемые области пусты.

Если $(k_1, k_2, k_3) = (2, 4, 1)$, то (31) удовлетворяется при любом $k_4 \geq 1$. С другой стороны, для непустоты $\mathcal{T}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \mathcal{T}(2, 4, 1, k_4)$ необходима непустота области $\mathcal{T}(4, 1, k_4)$. В силу п. 2с леммы 3, это отвечает значениям $3 \leq k_4 \leq 5$. Непосредственное вычисление показывает, что непустым исходным областям соответствуют наборы $(2, 4, 1, 3)$ и $(2, 4, 1, 4)$.

Если $(k_1, k_2, k_3) = (3, 1, k_3)$, где k_3 - одно из чисел 4, 5, 7, 8, то (31) принимает вид

$$k_4(k_3 - 1) \equiv 0 \pmod{3}. \quad (32)$$

В случаях $k_3 = 5, 8$ это сравнение влечёт условие $k_4 \equiv 0 \pmod{3}$ и, в частности, условие $k_4 \geq 3$. Но необходимым условием непустоты $\mathcal{T}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \mathcal{T}(3, 1, k_3, k_4)$ является непустота области $\mathcal{T}(1, k_3, k_4)$. Согласно п.п. 5а, 6 леммы 3, такая область пуста уже при $k_4 \geq 2$. В случаях $k_3 = 4, 7$ сравнение (31) удовлетворяется при любых k_4 . Однако в силу п. 5а леммы 3, область $\mathcal{T}(1, 4, k_4)$ непуста лишь при $k_4 = 1, 2$, а область $\mathcal{T}(1, 7, k_4)$ - лишь при $k_4 = 1$. Непосредственное вычисление показывает, что все соответствующие области $\mathcal{T}(3, 1, k_3, k_4)$ непусты. Отвечающие им наборы имеют вид:

$$(3, 1, 4, 1), (3, 1, 4, 2), (3, 1, 7, 1).$$

Если $(k_1, k_2, k_3) = (4, 1, 4)$, то (31) имеет вид $3k_4 - 1 \equiv 2 \pmod{3}$ и удовлетворяется при любом $k_4 \geq 1$. Необходимое условие непустоты $\mathcal{T}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \mathcal{T}(4, 1, 4, k_4)$ - непустота области $\mathcal{T}(1, 4, k_4)$. В силу п. 5а леммы 3, это влечёт неравенства $1 \leq k_4 \leq 2$. Непосредственное вычисление показывает непустоту каждой из соответствующих областей. Отвечающие им наборы имеют вид

$$(4, 1, 4, 1), (4, 1, 4, 2).$$

Если $(k_1, k_2, k_3) = (4, 1, 5)$, то (31) имеет вид $4k_4 - 1 \equiv 2 \pmod{3}$ и удовлетворяется при $k_4 \equiv 0 \pmod{3}$. Необходимое условие непустоты $\mathcal{T}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \mathcal{T}(4, 1, 5, k_4)$ - непустота области $\mathcal{T}(1, 5, k_4)$ - согласно п. 6 леммы 3 не выполнено.

Если, наконец, $(k_1, k_2, k_3) = (5, 1, 4)$, то (31) имеет вид $3k_4 - 1 \equiv 2 \pmod{3}$ и удовлетворяется при любом $k_4 \geq 1$. Необходимое условие непустоты $\mathcal{T}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \mathcal{T}(5, 1, 4, k_4)$ - непустота области $\mathcal{T}(1, 4, k_4)$ - в силу п. 5а леммы 3 - влечёт неравенства $1 \leq k_4 \leq 2$. Непосредственное вычисление показывает, что единственная непустая область в этом случае отвечает набору

$$(5, 1, 4, 1).$$

Итак, множество $\mathcal{A}_4^\circ(3, 1, 0)$ состоит из наборов

$$\begin{aligned}
 &(1, k_2, 1, 2), \quad k_2 \equiv 1 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 7; \\
 &(2, 1, k_3, 1), \quad k_3 \equiv 1 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 7; \\
 &(1, 4, 1, 3), (1, 4, 1, 4), (1, 4, 1, 5), (1, 7, 1, 3); \\
 &(2, 4, 1, 3), (2, 4, 1, 4); \\
 &(3, 1, 4, 1), (3, 1, 4, 2), (3, 1, 7, 1); \\
 &(4, 1, 4, 1), (4, 1, 4, 2); \\
 &(5, 1, 4, 1); \\
 &(k_1, 1, 2, 3), \quad 7 \leq k_1 \leq 12.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Далее, построим множество $\mathcal{A}_4^*(3, 1, 0)$. Оно состоит из наборов (k_1, k_2, k_3, k_4) таких, что $(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{A}_3^*(3, 1, 0)$ и при этом

$$k_4(k_2k_3 - 1) - k_2 \not\equiv 2 \pmod{3}. \tag{34}$$

Сразу отметим, что в тех случаях, когда сравнение (31) удовлетворяется при любом $k_4 \geq 1$, сравнение (34), напротив, не может быть выполнено ни при каких k_4 . Соответственно, из рассмотрения сразу исключаются случаи, когда (k_1, k_2, k_3) - один из следующих наборов:

$$\begin{aligned}
 &(1, k_2, 1), \quad k_2 \equiv 1 \pmod{3}, \quad k_2 \geq 4; \\
 &(2, 1, k_3), \quad k_3 \equiv 1 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 7; \\
 &(2, 4, 1), (4, 1, 4), (5, 1, 4), (3, 1, 4), (3, 1, 7).
 \end{aligned}$$

Во всех оставшихся случаях условие (31) имело вид $k_4 \equiv 0 \pmod{3}$, так что условие (34) равносильно условию

$$k_4 \not\equiv 0 \pmod{3}. \tag{35}$$

Если $(k_1, k_2, k_3) = (k_1, 1, 2)$, где $k_1 \geq 6$, то необходимое условие - непустота области $\mathcal{T}(1, 2, k_4)$ - с помощью п. 3а леммы 3 - приводит к неравенствам $2 \leq k_4 \leq 4$. С учётом (35) получаем две возможности: $k_4 = 2$ $k_4 = 4$.

В первом случае непустыми оказываются все области, отвечающие наборам $(k_1, 1, 2, 2)$, $k_1 \geq 10$, а во втором - отвечающие наборам $(k_1, 1, 2, 4)$, $k_1 = 6, 7, 8$.

Если $(k_1, k_2, k_3) = (2, 1, k_3)$, $k_3 \equiv 2 \pmod{3}$, $k_3 \geq 8$, то необходимое условие - непустота области $\mathcal{T}(k_3, k_4)$ - даёт: $k_4 = 1$. Согласно п. d леммы 7, при $k_3 \geq 9$ все такие области непусты. В случае $k_3 = 8$ непустота $\mathcal{T}(2, 1, k_3, 1)$ проверяется непосредственно. Значит, все наборы

$$(2, 1, k_3, 1), \quad k_3 \equiv 2 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 8,$$

войдут в $\mathcal{A}_4^*(3, 1, 0)$.

Если $(k_1, k_2, k_3) = (1, 4, 2)$, то необходимое условие - непустота области $\mathcal{T}(4, 2, k_4)$ - приводит с помощью п. 3d леммы 3 к равенству $k_4 = 1$, что отвечает единственному набору $(1, 4, 2, 1)$.

Если $(k_1, k_2, k_3) = (3, 1, 5)$, то необходимое условие - непустота области $\mathcal{T}(1, 5, k_4)$ - оставляет, согласно п. 6 леммы 3, единственную возможность $k_4 = 1$, что отвечает набору $(3, 1, 5, 1)$.

Единственное значение $k_4 = 1$ получается и в случаях $(k_1, k_2, k_3) = (3, 1, 8)$ и $(k_1, k_2, k_3) = (4, 1, 5)$, что приводит, соответственно, к наборам $(3, 1, 8, 1)$ и $(4, 1, 5, 1)$.

Таким образом, множество $\mathcal{A}_4^*(3, 1, 0)$ состоит из наборов

$$\begin{aligned} & (k_1, 1, 2, 2), \quad k_1 \geq 10; \\ & (k_1, 1, 2, 4), \quad k_1 = 6, 7, 8; \\ & (2, 1, k_3, 1), \quad k_3 \equiv 2 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 8; \\ & (1, 4, 2, 1); \\ & (3, 1, 5, 1), (3, 1, 8, 1); \\ & (4, 1, 5, 1). \end{aligned} \tag{36}$$

В случае $r = 5$ множество $\mathcal{A}_5^o(3, 1, 0)$ состоит из наборов $(k_1, \dots, k_5)$ таких, что (k_1, k_2, k_3, k_4) - набор из перечня (35), а k_5 удовлетворяет сравнению

$$\mathbb{K}_4(k_2, k_3, k_4, k_5) = k_5 \mathbb{K}_3(k_2, k_3, k_4) - \mathbb{K}_2(k_2, k_3) \equiv 2 \pmod{3}.$$

Но во всех случаях $\mathbb{K}_2(k_2, k_3) \equiv 1 \pmod{3}$, так что условие на k_5 принимает вид

$$k_5 \mathbb{K}_3(k_2, k_3, k_4) \equiv 0 \pmod{3}. \tag{37}$$

В случае, когда $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (k_1, 1, 2, 2)$, $k_1 \geq 10$, имеем: $\mathbb{K}_3(k_2, k_3, k_4) \equiv 1 \pmod{3}$, так что из (37) следует, что $k_5 \equiv 0 \pmod{3}$. Необходимое условие непустоты области $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_5)$ - непустота $\mathcal{T}(2, k_5)$ - с помощью леммы 2 даёт: $k_5 \leq 5$. Следовательно, для k_5 имеется единственная возможность: $k_5 = 3$. Так получаем семейство наборов вида $(k_1, 1, 2, 2, 3)$, где $k_1 \geq 10$.

Согласно лемме 4, области $\mathcal{T}(k, 1, 2, 2, 3)$ и $\mathcal{T}(3, 2, 2, 1, k)$ одновременно пусты или непусты. В силу леммы 12, область $\mathcal{T}(3, 2, 2, 1, k)$ пуста лишь при $10 \leq k \leq 16$. Следовательно, в $\mathcal{A}_5^o(3, 1, 0)$ войдут наборы $(k_1, 1, 2, 2, 3)$, $10 \leq k_1 \leq 16$.

Для всех оставшихся наборов из перечня (36) выполнено сравнение $\mathbb{K}_3(k_2, k_3, k_4) \equiv 0 \pmod{3}$, так что условие (37) удовлетворяется при любом $k_5 \geq 1$.

Если $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (k_1, 1, 2, 4)$, где $6 \leq k_1 \leq 8$, то необходимое условие - непустота области $\mathcal{T}(2, 4, k_5)$ - в соответствии с п. 5b леммы 3 приводит к единственному возможному значению: $k_5 = 1$. Непосредственное вычисление показывает, что все три области $\mathcal{T}(k_1, 1, 2, 4)$, $6 \leq k_1 \leq 8$ пусты.

Если $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (2, 1, k_3, 1)$, где $k_3 \equiv 2 \pmod{3}$, $k_3 \geq 8$, то в силу леммы 6 в случае $k_3 \geq 4 \cdot 5 + 2 = 22$ единственным значением, отвечающим непустой области $\mathcal{T}(2, 1, k_3, 1, k_5)$, будет $k_5 = 2$. Непосредственное вычисление показывает, что то же верно и для $k_3 = 11, 14, 17, 20$. В случае же $k_3 = 8$ имеются два значения k_5 , отвечающие непустым областям, а именно $k_5 = 2$ и $k_5 = 3$. Итак, получаем следующие наборы, входящие в $\mathcal{A}_5^o(3, 1, 0)$:

$$\begin{aligned} & (2, 1, k_3, 1, 2), \quad k_3 \equiv 2 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 8; \\ & (2, 1, 8, 1, 3). \end{aligned}$$

Если $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (1, 4, 2, 1)$, то необходимым условием непустоты области $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_5) = \mathcal{T}(1, 4, 2, 1, k_5)$ будет, очевидно, непустота области $\mathcal{T}(4, 2, 1, k_5)$.

Согласно леммам 4 и 8, область $\mathcal{T}(4, 2, 1, k_5)$ пуста лишь при $6 \leq k_5 \leq 8$. Непустота же каждой из областей $\mathcal{T}(1, 4, 2, 1, k)$, $6 \leq k \leq 8$, проверяется непосредственно. Следовательно, в $\mathcal{A}_5^o(3, 1, 0)$ войдут наборы

$$(1, 4, 2, 1, 6), (1, 4, 2, 1, 7), (1, 4, 2, 1, 8).$$

Если $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (3, 1, 5, 1)$, то необходимое условие - непустота $\mathcal{T}(5, 1, k_5)$ - с помощью п. 2d леммы 3 приводит к значениям $k_5 = 3$ и $k_5 = 4$. Проверка показывает, что отвечающие им области $\mathcal{T}(3, 1, 5, 1, k_5)$ пусты. Следовательно, в $\mathcal{A}_5^o(3, 1, 0)$ войдут и наборы

$$(3, 1, 5, 1, 3), (3, 1, 5, 1, 4).$$

Если $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (3, 1, 8, 1)$, то необходимое условие - непустота $\mathcal{T}(8, 1, k_5)$ - в силу пп. 1 и 2е леммы 3 приводит к значениям $k_5 = 2$ и $k_5 = 3$. Непосредственное вычисление показывает, что область $\mathcal{T}(3, 1, 8, 1, k_5)$ непуста лишь при $k_5 = 2$. Поэтому в $\mathcal{A}_5^\circ(3, 1, 0)$ войдёт только набор

$$(3, 1, 8, 1, 2).$$

Наконец, если $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (4, 1, 5, 1)$, то необходимое условие - непустота $\mathcal{T}(5, 1, k_5)$ - согласно п. 2d леммы 3 приводит к значениям $k_5 = 3, k_5 = 4$. Непосредственный подсчёт показывает, что область $\mathcal{T}(4, 1, 5, 1, k_5)$ непуста лишь в случае $k_5 = 3$. Соответственно, в $\mathcal{A}_5^\circ(3, 1, 0)$ войдёт только набор

$$(4, 1, 5, 1, 3).$$

Итак, множество $\mathcal{A}_5^\circ(3, 1, 0)$ состоит из наборов

$$\begin{aligned} & (k_1, 1, 2, 2, 3), \quad 10 \leq k_1 \leq 16; \\ & (k_1, 1, 2, 4, 1), \quad k_1 = 6, 7, 8; \\ & (2, 1, k_3, 1, 2), \quad k_3 \equiv 2 \pmod{3}, \quad k_3 \geq 8; \\ & (2, 1, 8, 1, 3); \\ & (1, 4, 2, 1, k_5), \quad k_5 = 6, 7, 8; \\ & (3, 1, 5, 1, 3), (3, 1, 5, 1, 4), (3, 1, 8, 1, 2); \\ & (4, 1, 5, 1, 3). \end{aligned} \tag{38}$$

На последующих шагах в строении множеств наступает «стабилизация»: для $\mathcal{A}_r^*(3, 1, 0)$ - начиная с $r \geq 5$, для $\mathcal{A}_r^\circ(3, 1, 0)$ - начиная с $r \geq 6$. В указанных случаях эти множества допускают простое описание. Именно, оказывается, что:

- (а) множество $\mathcal{A}_r^*(3, 1, 0)$ при $r \geq 5$ состоит из наборов вида $(k_1, 1, 2^{r-2})$, где $k_1 \geq 4r - 6$;
- (б) множество $\mathcal{A}_r^\circ(3, 1, 0)$ при $r \geq 6$ состоит из наборов вида $(k_1, 1, 2^{r-3}, 3)$, где $4r - 10 \leq k_1 \leq 4r - 4$.

Докажем эти утверждения индукцией по r . Пусть $r = 5$. В этом случае условие (37) заменяется условием

$$k_5 \mathbb{K}_3(k_2, k_3, k_4) \not\equiv 0 \pmod{3}. \tag{39}$$

В силу сказанного выше, оно не может быть выполнено ни при каком k_5 для всех наборов из перечня (36), за исключением $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (k_1, 1, 2, 2)$, $k_1 \geq 10$. В этом случае (39) приводится к виду $k_5 \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Необходимым условием непустоты $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_5) = \mathcal{T}(k_1, 1, 2, 2, k_5)$ будет непустота области $\mathcal{T}(2, 2, k_5)$. В силу п. 3b леммы 3 это имеет место лишь при $1 \leq k_5 \leq 3$. Исключая значение $k_5 = 3$, получим: $1 \leq k_5 \leq 2$. Однако при $k_5 = 1$ нарушено другое необходимое условие: область $\mathcal{T}(1, 2, 2, k_5) = \mathcal{T}(1, 2, 2, 1)$ оказывается пустой. Следовательно, $k_5 = 2$, так что искомые наборы имеют вид $(k_1, 1, 2, 2, 2)$, где $k_1 \geq 10$. В силу лемм 4 и 10, все области $\mathcal{T}(k_1, 1, 2^3)$, $k_1 \geq 14$, непусты. Это и составляет базу индукции.

Пусть теперь $r \geq 6$. Если $(k_1, \dots, k_r)$ - набор из $\mathcal{A}_r^*(3, 1, 0)$, то в силу индукционного предположения он имеет вид $(k_1, 1, 2^{r-3}, k_r)$, где $k_1 \geq 4r - 10$. Условие (25) сводится к следующему:

$$\mathbb{K}_{r-1}(1, 2^{r-3}, k_r) \not\equiv 2 \pmod{3}$$

или, что то же, к условию

$$k_r \not\equiv 0 \pmod{3}. \tag{40}$$

Необходимое условие непустоты области $\mathcal{T}(k_1, 1, 2^{r-3}, k_r)$ - непустота областей $\mathcal{T}(2, k_r)$, $\mathcal{T}(2, 2, k_r)$ - сужает в силу леммы 3 диапазон возможных значений k_r до следующего:

$1 \leq k_r \leq 3$. С учетом (40) получаем: $k_r = 1$ либо $k_r = 2$. Однако в случае $k_r = 1$ нарушено необходимое условие непустоты области $\mathcal{T}(k_1, 1, 2^{r-3}, k_r)$, поскольку $\mathbb{K}_r(1, 2^{r-3}, k_r) = 0$.

Итак, остаётся единственная возможность $k_r = 2$, которая отвечает области $\mathcal{T}(k_1, 1, 2^{r-2})$. Её непустота при любом $k_1 \geq 4r - 6$ следует из леммы 10. Поэтому множество $\mathcal{A}_r^*(3, 1, 0)$ действительно состоит из всех наборов $(k_1, 1, 2^{r-2})$, $k_1 \geq 4r - 6$. Этим завершается описание множеств $\mathcal{A}_r^*(3, 1, 0)$ для $r \geq 5$.

Пусть теперь $(k_1, \dots, k_r)$ - набор из $\mathcal{A}_r^\circ(3, 1, 0)$, $r \geq 6$. Тогда $(k_1, \dots, k_{r-1}) \in \mathcal{A}_{r-1}^*(3, 1, 0)$ и в силу доказанного

$$(k_1, \dots, k_{r-1}) = (k_1, 1, 2^{r-3}), \quad \text{где } k_1 \geq 4(r-1) - 6 = 4r - 10.$$

Условие (10) сводится тогда к следующему:

$$\mathbb{K}_{r-1}(1, 2^{r-3}, k_r) \equiv 2 \pmod{3} \quad \text{или, что то же,} \quad k_r \equiv 0 \pmod{3}.$$

Необходимое условие непустоты $\mathcal{T}(k_1, 1, 2^{r-3}, k_r)$ - непустота области $\mathcal{T}(2, k_r)$ - даёт: $k_r \leq 5$, так что $k_r = 3$.

Выше было установлено, что области вида $\mathcal{T}(3, 2^{r-3}, 1, k_r)$ непусты при $4r - 10 \leq k_r \leq 4r - 4$. Следовательно, $\mathcal{A}_r^\circ(3, 1, 0)$ при $r \geq 6$ состоит из наборов $(k_1, 1, 2^{r-3}, 3)$, $4r - 10 \leq k_1 \leq 4r - 4$. Этим завершается описание множеств $\mathcal{A}_r^\circ(3, 1, 0)$.

Полученным выше результатам удобно придать следующую форму.

ЛЕММА 14. *Множество $\mathcal{A}_r^\circ(3, 1, 0)$ (и, следовательно, множество $\mathcal{A}_r^\circ(3, 2, 0)$) состоит из следующих наборов:*

r	$\bar{\mathbf{k}}$	$\mathbb{K}_r(\bar{\mathbf{k}})$
2	$(1, k_2), k_2 \equiv 2 \pmod{3}, k_2 \geq 2$	$k_2 - 1$
2	$(2, 2)$	3
2	$(3, 2)$	5
2	$(4, 2)$	7
3	$(1, k_2, 1), k_2 \equiv 0 \pmod{3}, k_2 \geq 3$	$k_2 - 2$
3	$(2, 1, k_3), k_3 \equiv 0 \pmod{3}, k_3 \geq 6$	$k_3 - 3$
3	$(1, 3, 2), (2, 3, 1)$	3
3	$(2, 3, 2)$	8
3	$(3, 1, 6)$	9
3	$(k_1, 1, 3), 4 \leq k_1 \leq 8$	$2k_1 - 3$
4	$(1, k_2, 1, 2), k_2 \equiv 1 \pmod{3}, k_2 \geq 7$	$k_2 - 3$
4	$(2, 1, k_3, 1), k_3 \equiv 1 \pmod{3}, k_3 \geq 7$	$k_3 - 3$
4	$(1, 4, 1, 3), (3, 1, 4, 1)$	3
4	$(1, 4, 1, 4), (4, 1, 4, 1)$	5
4	$(1, 4, 1, 5), (5, 1, 4, 1)$	7
4	$(2, 4, 1, 3), (3, 1, 4, 2)$	8
4	$(1, 7, 1, 3), (3, 1, 7, 1)$	9
4	$(2, 4, 1, 4), (4, 1, 4, 2)$	13
4	$(k_1, 1, 2, 3), 7 \leq k_1 \leq 12$	$2k_1 - 5$
5	$(2, 1, k_3, 1, 2), k_3 \equiv 2 \pmod{3}, k_2 \geq 8$	$k_3 - 4$
5	$(k_1, 1, 2, 2, 3), 10 \leq k_1 \leq 16$	$2k_1 - 7$
5	$(k_1, 1, 2, 4, 1), 6 \leq k_1 \leq 8$	$2k_1 - 5$
5	$(1, 4, 2, 1, k_5), 6 \leq k_5 \leq 8$	$2k_5 - 5$
5	$(3, 1, 5, 1, 3)$	8

5	(2, 1, 8, 1, 3), (3, 1, 8, 1, 2)	9
5	(3, 1, 5, 1, 4), (4, 1, 5, 1, 3)	13
≥ 6	$(k_1, 1, 2^{r-3}, 3), 4r - 10 \leq k_1 \leq 4r - 4$	$2k_1 - 2r + 3$

6. Доказательство основной теоремы

По лемме 1, в каждом из случаев $c_0 = 1$, $c_0 = 2$ при любом $r \geq 1$ имеем:

$$\nu(Q; r, 3, c_0) = \nu(r, 3, c_0) + O\left(\frac{\ln Q}{Q}\right), \quad \nu(r, 3, c_0) = \frac{2}{3} \mathfrak{c}_r,$$

$$\mathfrak{c}_r = \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^\circ(3,1,0)} + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^\circ(3,1,2)} \right) |\mathcal{T}(\mathbf{k})| = \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^\circ(3,2,0)} + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_r^\circ(3,2,1)} \right) |\mathcal{T}(\mathbf{k})|.$$

СЛУЧАЙ $r = 1$. Согласно лемме 13,

$$\begin{aligned} \nu(1, 3, 1) &= \frac{2}{3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_1^\circ(3,1,2)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})| = \frac{2}{3} \sum_{\substack{k \equiv 1 \pmod{3} \\ k \geq 1}} |\mathcal{T}(k)| = \\ &= \frac{2}{3} \left(|\mathcal{T}(1)| + \sum_{k=1}^{+\infty} |\mathcal{T}(3k+1)| \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3} \ln 3 - \frac{1}{3} = 0.14345\,80504\dots \end{aligned}$$

СЛУЧАЙ $r = 2$. Согласно леммам 13 и 14,

$$\begin{aligned} \nu(2, 3, 1) &= \frac{2}{3} \left\{ \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_2^\circ(3,1,2)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})| + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_2^\circ(3,1,0)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})| \right\} = \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \sum_{\substack{k_1 \equiv 2 \pmod{3} \\ k_1 \geq 2}} |\mathcal{T}(k_1, 1)| + |\mathcal{T}(2, 2)| + |\mathcal{T}(2, 3)| + |\mathcal{T}(2, 4)| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{k_2 \equiv 2 \pmod{3} \\ k_2 \geq 2}} |\mathcal{T}(1, k_2)| + |\mathcal{T}(2, 2)| + |\mathcal{T}(3, 2)| + |\mathcal{T}(4, 2)| \right\} = \\ &= \frac{4}{3} \left\{ \sum_{\substack{k_1 \equiv 2 \pmod{3} \\ k_1 \geq 2}} |\mathcal{T}(k_1, 1)| + \frac{1}{10} + \frac{1}{35} + \frac{1}{210} \right\}. \end{aligned}$$

В силу п. а леммы 7, $|\mathcal{T}(k_1, 1)| = |\mathcal{T}(k_1)|$ при $k_1 \geq 5$. Поэтому

$$\begin{aligned} \nu(2, 3, 1) &= \frac{4}{3} \left\{ \sum_{\substack{k_1 \equiv 2 \pmod{3} \\ k_1 \geq 5}} |\mathcal{T}(k_1)| + |\mathcal{T}(2, 1)| + \frac{2}{15} \right\} = \\ &= \frac{4}{3} \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} + \frac{1}{6} \right\} = \frac{8}{3} (\ln 3 - 1) = 0.26296\,62031\dots \end{aligned}$$

СЛУЧАЙ $r = 3$. Имеем

$$\nu(3, 3, 1) = \frac{2}{3} \left\{ \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_3^0(3, 1, 2)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})| + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_3^0(3, 1, 0)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})| \right\} = \frac{2}{3}(\sigma_1 + \sigma_2),$$

где смысл обозначений очевиден. Согласно лемме 13,

$$\sigma_2 = \sum_{\substack{k_1 \equiv 0 \pmod{3} \\ k_1 \geq 3}} |\mathcal{T}(k_1, 1, 2)| + \sum_{k_3=4}^8 |\mathcal{T}(3, 1, k_3)| + |\mathcal{T}(6, 1, 3)|.$$

Согласно п. в леммы 7, $|\mathcal{T}(k_1, 1, 2)| = |\mathcal{T}(k_1)|$ при $k_1 \geq 9$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{\substack{k_1 \equiv 0 \pmod{3} \\ k_1 \geq 9}} |\mathcal{T}(k_1)| + |\mathcal{T}(3, 1, 2)| + |\mathcal{T}(6, 1, 2)| + \frac{221}{4620} = \\ &= \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{4}{3k(3k+1)(3k+2)} + \frac{1}{20} = \frac{104}{35} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3. \end{aligned}$$

Аналогично, в силу леммы 14 имеем

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sum_{\substack{k_2 \equiv 0 \pmod{3} \\ k_2 \geq 3}} |\mathcal{T}(1, k_2, 1)| + \sum_{\substack{k_3 \equiv 0 \pmod{3} \\ k_3 \geq 6}} |\mathcal{T}(2, 1, k_3)| + |\mathcal{T}(1, 3, 2)| + |\mathcal{T}(2, 3, 1)| + \\ &\quad + |\mathcal{T}(2, 3, 2)| + |\mathcal{T}(3, 1, 6)| + \sum_{k_1=4}^8 |\mathcal{T}(k_1, 1, 3)|. \end{aligned}$$

Согласно п.п. f, с леммы 7, $|\mathcal{T}(1, k, 1)| = |\mathcal{T}(k)|$ при $k \geq 6$, $|\mathcal{T}(2, 1, k)| = |\mathcal{T}(k, 1, 2)| = |\mathcal{T}(k)|$ при $k \geq 9$, то

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sum_{\substack{k_2 \equiv 0 \pmod{3} \\ k_2 \geq 6}} |\mathcal{T}(k_2)| + \sum_{\substack{k_3 \equiv 0 \pmod{3} \\ k_3 \geq 9}} |\mathcal{T}(k_3)| + |\mathcal{T}(1, 3, 1)| + |\mathcal{T}(2, 1, 3)| + |\mathcal{T}(2, 1, 6)| + \frac{113}{1155} = \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{4}{3k(3k+1)(3k+2)} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{4}{3k(3k+1)(3k+2)} + \frac{7}{60} = \frac{209}{35} - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 2 \ln 3. \end{aligned}$$

Поэтому окончательно находим:

$$\nu(3, 3, 1) = \frac{626}{105} - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 2 \ln 3 = 0.13708\,14561\ldots$$

СЛУЧАЙ $r = 4$. Здесь имеем

$$\nu(4, 3, 1) = \frac{2}{3}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \sigma_1 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_4^0(3, 1, 2)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})|, \quad \sigma_2 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_4^0(3, 1, 0)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})|.$$

Согласно лемме 13,

$$\sigma_1 = \sum_{k_4=7}^{12} |\mathcal{T}(3, 2, 1, k_4)| = \frac{1}{70}.$$

Далее, по лемме 14,

$$\begin{aligned}\sigma_2 = & \sum_{\substack{k_2 \equiv 1 \pmod{3} \\ k_2 \geq 7}} |\mathcal{T}(1, k_2, 1, 2)| + \sum_{\substack{k_3 \equiv 1 \pmod{3} \\ k_3 \geq 7}} |\mathcal{T}(2, 1, k_3, 1)| + \\ & + |\mathcal{T}(1, 4, 1, 3)| + |\mathcal{T}(1, 4, 1, 4)| + |\mathcal{T}(1, 4, 1, 5)| + |\mathcal{T}(1, 7, 1, 3)| + \\ & + |\mathcal{T}(2, 4, 1, 3)| + |\mathcal{T}(2, 4, 1, 4)| + |\mathcal{T}(3, 1, 4, 1)| + |\mathcal{T}(3, 1, 4, 2)| + \\ & + |\mathcal{T}(3, 1, 7, 1)| + |\mathcal{T}(4, 1, 4, 1)| + |\mathcal{T}(4, 1, 4, 2)| + |\mathcal{T}(5, 1, 4, 1)| + \\ & + \sum_{k_1=7}^{12} |\mathcal{T}(k_1, 1, 2, 3)| = \sum_{\substack{k_2 \equiv 1 \pmod{3} \\ k_1 \geq 7}} |\mathcal{T}(1, k_2, 1, 2)| + \frac{710}{9009}.\end{aligned}$$

Пользуясь леммой 4 и п. d леммы 7, заключаем, что $|\mathcal{T}(1, k, 1, 2)| = |\mathcal{T}(2, 1, k, 1)| = |\mathcal{T}(k)|$ при $k \geq 9$. Следовательно,

$$\sigma_2 = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{4}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)} + \frac{17}{2002} + \frac{710}{9009} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{93}{70} - 2\ln 3.$$

Окончательно находим:

$$\nu(4, 3, 1) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{92}{105} - \frac{4}{3}\ln 3 = 0.07739\,22912\dots$$

СЛУЧАЙ $r = 5$. Здесь имеем

$$\nu(5, 3, 1) = \frac{2}{3}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \sigma_1 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_5^3(3,1,2)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})|, \quad \sigma_2 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}_5^3(3,1,0)} |\mathcal{T}(\mathbf{k})|.$$

По лемме 13,

$$\sigma_1 = \sum_{k_5=10}^{16} |\mathcal{T}(3, 2, 2, 1, k_5)| = \frac{2}{315}.$$

Далее, согласно лемме 14,

$$\begin{aligned}\sigma_2 = & \sum_{\substack{k_3 \equiv 2 \pmod{3} \\ k_3 \geq 7}} |\mathcal{T}(2, 1, k_3, 1, 2)| + \sum_{k_1=10}^{16} |\mathcal{T}(k_1, 1, 2, 2, 3)| + \sum_{k_1=6}^8 |\mathcal{T}(k_1, 1, 2, 4, 1)| + \\ & + |\mathcal{T}(2, 1, 8, 1, 3)| + \sum_{k_5=6}^8 |\mathcal{T}(1, 4, 2, 1, k_5)| + |\mathcal{T}(3, 1, 5, 1, 3)| + |\mathcal{T}(3, 1, 5, 1, 4)| + |\mathcal{T}(3, 1, 8, 1, 2)| + \\ & + |\mathcal{T}(4, 1, 5, 1, 3)| = \sum_{\substack{k_3 \equiv 2 \pmod{3} \\ k_3 \geq 8}} |\mathcal{T}(2, 1, k_3, 1, 2)| + \frac{10}{273}.\end{aligned}$$

В силу п. e леммы 7, при $k_3 \geq 9$ справедливо равенство $|\mathcal{T}(2, 1, k_3, 1, 2)| = |\mathcal{T}(k_3)|$. Поэтому

$$\sigma_2 = \sum_{\substack{k_3 \equiv 2 \pmod{3} \\ k_3 \geq 11}} |\mathcal{T}(k_3)| + \frac{1}{260} + \frac{10}{273} = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{4}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} + \frac{17}{420} = 2\ln 3 - \frac{271}{126}.$$

Следовательно,

$$\nu(5, 3, 1) = \frac{4}{3}\ln 3 - \frac{193}{135} = 0.03518\,67552\dots$$

СЛУЧАЙ $r \geq 6$. В силу лемм 13, 14, а также леммы 4,

$$\nu(r, 3, 1) = \frac{4}{3} \sigma, \quad \sigma = \sum_{k_1=4r-10}^{4r-4} |\mathcal{T}(k_1, 1, 2^{r-3}, 3)| = \sum_{k_r=4r-10}^{4r-4} |\mathcal{T}(3, 2^{r-3}, 1, k_r)|.$$

По лемме 12, объединение областей $\mathcal{T}(3, 2^{r-3}, 1, k_r)$, $4r - 10 \leq k_r \leq 4r - 4$ имеет площадь, равную

$$\frac{2}{(2r-5)(2r-3)(2r-1)}.$$

Следовательно,

$$\nu(r, 3, 1) = \frac{8}{3(2r-5)(2r-3)(2r-1)}.$$

Заметим наконец, что

$$\sum_{r=6}^{+\infty} \frac{8}{3(2r-5)(2r-3)(2r-1)} = \frac{2}{189}.$$

Поэтому, вычисляя сумму всех найденных выше долей, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{+\infty} \nu(r, 3, 1) &= \left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3} \ln 3 - \frac{1}{3} \right) + \frac{8}{3} (\ln 3 - 1) + \left(\frac{626}{105} - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 2 \ln 3 \right) + \\ &+ \left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{92}{105} - \frac{4}{3} \ln 3 \right) + \left(\frac{4}{3} \ln 3 - \frac{193}{135} \right) + \frac{2}{189} = \frac{124}{189} + \frac{2}{189} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\nu(0, 3, 1) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Теорема доказана.

Приложение 1. Явный вид областей $\mathcal{T}(3, 2, 1, k)$, $7 \leq k \leq 12$

СЛУЧАЙ $k = 7$: область $\mathcal{T}(3, 2, 1, 7)$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{4}{7} < x \leq \frac{10}{17}, & 1 - x < y \leq \frac{1+2x}{5}, \\ \frac{10}{17} < x \leq \frac{3}{4}, & \frac{1+6x}{11} < y \leq \frac{1+2x}{5} \end{cases}$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7} \right), \quad B = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right), \quad C = \left(\frac{10}{17}, \frac{7}{17} \right) \quad \text{и площадью} \quad \frac{1}{476}.$$

СЛУЧАЙ $k = 8$: область $\mathcal{T}(3, 2, 1, 8)$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{10}{17} < x \leq \frac{3}{5}, & 1 - x < y \leq \frac{1+6x}{11}, \\ \frac{3}{5} < x \leq \frac{3}{4}, & \frac{1+7x}{13} < y \leq \frac{1+6x}{11}, \\ \frac{3}{4} < x \leq \frac{8}{9}, & \frac{1+7x}{13} < y \leq \frac{1+2x}{5}, \end{cases}$$

и представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{10}{17}, \frac{7}{17}\right), \quad B = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right), \quad C = \left(\frac{8}{9}, \frac{5}{9}\right), \quad D = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) \quad \text{и площадью} \quad \frac{13}{3060}.$$

СЛУЧАЙ $k = 9$: область $\mathcal{T}(3, 2, 1, 9)$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{3}{5} < x \leq \frac{8}{11}, & \frac{1+3x}{7} < y \leq \frac{1+7x}{13}, \\ \frac{8}{11} < x \leq \frac{8}{9}, & \frac{1+8x}{15} < y \leq \frac{1+7x}{13}, \\ \frac{8}{9} < x \leq 1, & \frac{1+8x}{15} < y \leq \frac{1+2x}{5}, \end{cases}$$

и представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \quad B = \left(\frac{8}{9}, \frac{5}{9}\right), \quad C = \left(1, \frac{3}{5}\right), \quad D = \left(\frac{8}{11}, \frac{5}{11}\right) \quad \text{и площадью} \quad \frac{2}{495}.$$

СЛУЧАЙ $k = 10$: область $\mathcal{T}(3, 2, 1, 10)$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{8}{11} < x \leq \frac{5}{6}, & \frac{1+3x}{7} < y \leq \frac{1+8x}{15}, \\ \frac{5}{6} < x \leq 1, & \frac{1+9x}{17} < y \leq \frac{1+8x}{15}, \end{cases}$$

и представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{8}{11}, \frac{5}{11}\right), \quad B = \left(1, \frac{3}{5}\right), \quad C = \left(1, \frac{10}{17}\right), \quad D = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{и площадью} \quad \frac{7}{2805}.$$

СЛУЧАЙ $k = 11$: область $\mathcal{T}(3, 2, 1, 11)$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{5}{6} < x \leq \frac{12}{13}, & \frac{1+3x}{7} < y \leq \frac{1+9x}{17}, \\ \frac{12}{13} < x \leq 1, & \frac{1+10x}{19} < y \leq \frac{1+9x}{17}, \end{cases}$$

и представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right), \quad B = \left(1, \frac{10}{17}\right), \quad C = \left(1, \frac{11}{19}\right), \quad D = \left(\frac{12}{13}, \frac{7}{13}\right) \quad \text{и площадью} \quad \frac{14}{12597}.$$

СЛУЧАЙ $k = 12$: область $\mathcal{T}(3, 2, 1, 12)$ задаётся системой неравенств

$$\frac{12}{13} < x \leq 1, \quad \frac{1+3x}{7} < y \leq \frac{1+10x}{19}$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{12}{13}, \frac{7}{13}\right), \quad B = \left(1, \frac{11}{19}\right), \quad C = \left(1, \frac{4}{7}\right) \quad \text{и площадью} \quad \frac{1}{3458}.$$

Приложение 2. Явный вид областей $\mathcal{T}(3, 2^{r-3}, 1, k)$, $4r - 10 \leq k \leq 4r - 4$

СЛУЧАЙ $k = 4r - 10$: область $\mathcal{T}(3, 2^{r-3}, 1, 4r - 10)$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{2r-7}{2r-5} < x \leq \frac{6r-19}{6r-13}, & \frac{1+x}{4} < y \leq \frac{1+(r-2)x}{2r-3}, \\ \frac{6r-19}{6r-13} < x \leq \frac{4r-12}{4r-9}, & \frac{1+(3r-7)x}{6r-15} < y \leq \frac{1+(r-2)x}{2r-3} \end{cases}$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{2r-7}{2r-5}, \frac{r-3}{2r-5} \right), \quad B = \left(\frac{4r-12}{4r-9}, \frac{2r-5}{4r-9} \right), \quad C = \left(\frac{6r-19}{6r-13}, \frac{3r-8}{6r-13} \right)$$

и площадью $\frac{1}{2(2r-5)(4r-9)(6r-13)}$.

СЛУЧАЙ $k = 4r - 9$: область $\mathcal{T}(3, 2^{r-3}, 1, 4r - 9)$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{6r-19}{6r-13} < x \leq \frac{6r-17}{6r-11}, & \frac{1+x}{4} < y \leq \frac{1+(3r-7)x}{6r-15} \\ \frac{6r-17}{6r-11} < x \leq \frac{4r-12}{4r-9}, & \frac{1+(3r-6)x}{6r-13} < y \leq \frac{1+(3r-7)x}{6r-15} \\ \frac{4r-12}{4r-9} < x \leq \frac{2r-5}{2r-4}, & \frac{1+(3r-6)x}{6r-13} < y \leq \frac{1+(r-2)x}{2r-3} \end{cases}$$

и представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{6r-19}{6r-13}, \frac{3r-8}{6r-13} \right), \quad B = \left(\frac{4r-12}{4r-9}, \frac{2r-5}{4r-9} \right), \quad C = \left(\frac{2r-5}{2r-4}, \frac{1}{2} \right),$$

$$D = \left(\frac{6r-17}{6r-11}, \frac{3r-7}{6r-11} \right) \quad \text{и площадью} \quad \frac{9r-19}{2(r-2)(4r-9)(6r-13)(6r-11)}.$$

СЛУЧАЙ $k = 4r - 8$: область $\mathcal{T}(3, 2^{r-3}, 1, 4r - 8)$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{6r-17}{6r-11} < x \leq \frac{2r-5}{2r-3}, & \frac{1+x}{4} < y \leq \frac{1+(3r-6)x}{6r-13} \\ \frac{2r-5}{2r-3} < x \leq \frac{2r-5}{2r-4}, & \frac{1+(3r-5)x}{6r-11} < y \leq \frac{1+(3r-6)x}{6r-13} \\ \frac{2r-5}{2r-4} < x \leq \frac{4r-8}{4r-7}, & \frac{1+(3r-5)x}{6r-11} < y \leq \frac{1+(r-2)x}{2r-3} \end{cases}$$

и представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{6r-17}{6r-11}, \frac{3r-7}{6r-11} \right), \quad B = \left(\frac{2r-5}{2r-4}, \frac{1}{2} \right), \quad C = \left(\frac{4r-8}{4r-7}, \frac{2r-3}{4r-7} \right),$$

$$D = \left(\frac{2r-5}{2r-3}, \frac{r-2}{2r-3} \right) \quad \text{и площадью} \quad \frac{5r-9}{2(r-2)(2r-3)(4r-7)(6r-11)}.$$

СЛУЧАЙ $k = 4r - 7$: область $\mathcal{T}(3, 2^{r-3}, 1, 4r - 7)$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{2r-5}{2r-3} < x \leq \frac{4r-8}{4r-7}, & \frac{1+(r-1)x}{2r-1} < y \leq \frac{1+(3r-5)x}{6r-11} \\ \frac{4r-8}{4r-5} < x \leq \frac{4r-8}{4r-7}, & \frac{1+(3r-4)x}{6r-9} < y \leq \frac{1+(3r-5)x}{6r-11} \\ \frac{4r-8}{4r-7} < x \leq 1, & \frac{1+(3r-4)x}{6r-9} < y \leq \frac{1+(r-2)x}{2r-3} \end{cases}$$

и представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{2r-5}{2r-3}, \frac{r-2}{2r-3} \right), \quad B = \left(\frac{4r-8}{4r-7}, \frac{2r-3}{4r-7} \right), \quad C = \left(1, \frac{r-1}{2r-3} \right), \\ D = \left(\frac{4r-8}{4r-5}, \frac{2r-3}{4r-5} \right) \quad \text{и площадью} \quad \frac{2}{(2r-3)(4r-7)(4r-5)}.$$

СЛУЧАЙ $k = 4r - 6$: область $\mathcal{T}(3, 2^{r-3}, 1, 4r - 6)$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{4r-8}{4r-5} < x \leq \frac{2r-3}{2r-2}, & \frac{1+(r-1)x}{2r-1} < y \leq \frac{1+(3r-4)x}{6r-9} \\ \frac{2r-3}{2r-2} < x \leq 1, & \frac{1+(3r-3)x}{6r-7} < y \leq \frac{1+(3r-4)x}{6r-9} \end{cases}$$

и представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{4r-8}{4r-5}, \frac{2r-3}{4r-5} \right), \quad B = \left(1, \frac{r-1}{2r-3} \right), \quad C = \left(1, \frac{3r-2}{6r-7} \right), \\ D = \left(\frac{2r-3}{2r-2}, \frac{1}{2} \right) \quad \text{и площадью} \quad \frac{5r-6}{2(r-1)(2r-3)(4r-5)(6r-7)}.$$

СЛУЧАЙ $k = 4r - 5$: область $\mathcal{T}(3, 2^{r-3}, 1, 4r - 5)$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{2r-3}{2r-2} < x \leq \frac{4r-4}{4r-3}, & \frac{1+(r-1)x}{2r-1} < y \leq \frac{1+(3r-3)x}{6r-7} \\ \frac{4r-4}{4r-3} < x \leq 1, & \frac{1+(3r-2)x}{6r-5} < y \leq \frac{1+(3r-3)x}{6r-7} \end{cases}$$

и представляет собой четырёхугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{2r-3}{2r-2}, \frac{1}{2} \right), \quad B = \left(1, \frac{3r-2}{6r-7} \right), \quad C = \left(1, \frac{3r-1}{6r-5} \right), \\ D = \left(\frac{4r-4}{4r-3}, \frac{2r-1}{4r-3} \right) \quad \text{и площадью} \quad \frac{9r-8}{2(r-1)(4r-3)(6r-7)(6r-5)}.$$

СЛУЧАЙ $k = 4r - 4$: область $\mathcal{T}(3, 2^{r-3}, 1, 4r - 4)$ задаётся системой неравенств

$$\frac{4r-4}{4r-3} < x \leq 1, \quad \frac{1+(r-1)x}{2r-1} < y \leq \frac{1+(3r-2)x}{6r-5}$$

и представляет собой треугольник с вершинами

$$A = \left(\frac{4r-4}{4r-3}, \frac{2r-1}{4r-3} \right), \quad B = \left(1, \frac{3r-1}{6r-5} \right), \quad C = \left(1, \frac{r}{2r-1} \right),$$

и площадью $\frac{1}{2(2r-1)(4r-3)(6r-5)}.$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. КОРОЛЁВ М.А., Об одном распределении, связанном с рядами Фарея // Чебышевский сб., 2023. Т. 24. № 4. С. 137–190.
2. Korolev M.A., A distribution related to Farey sequences - I // [arXiv:2502.19881 \[math.NT\]](#) (27.02.2025).
3. Gutthery S.B., A Motif of Mathematics // Docent Press, Boston, Massachusetts, USA. 2011.
4. Cobeli C., Zaharescu A., The Haros-Farey sequence at two hundred years. A survey // Acta Univ. Apulensis Math. Inform. 2003. Vol. 5. P. 1–38.
5. Alkan E., Ledoan A.H., Vâjăitu M., Zaharescu A., Discrepancy of fractions with divisibility constraints // Monatsh. Math. 2006. Vol. 149. P. 179–192.
6. Alkan E., Ledoan A.H., Vâjăitu M., Zaharescu A., Discrepancy of sets of fractions with congruence constraints // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 2006. Vol. 51. P. 265–276.
7. Boca F.P., Heersink B., Spiegelhalter P., Gap distribution of Farey fractions under some divisibility constraints // Integers. 2013. Vol. 13. Paper No. A44. 15 pp.
8. Heersink B., Poincare sections for the horocycle ow in covers of $SL(2; \mathbb{R}) = SL(2; \mathbb{Z})$ and applications to Farey fraction statistics // Monatsh. Math. 2016. Vol. 179. P. 389–420.
9. Ledoan A.H., The discrepancy of Farey series // Acta Math. Hungar. 2018. Vol. 156. P. 465–480.
10. Athreya J.S., Cheung Y., A Poincaré section for horocycle flow on the space of lattices // [arXiv:1206.6597 \[math.DS\]](#) (28.06.2012).
11. Athreya J.S., Chaika J., Lelièvre S., The gap distribution of slopes on the golden L // [arXiv:1308.4203 \[math.DS\]](#) (20.08.2013).
12. Taha D., The Boca-Cobeli-Zaharescu Map Analogue for the Hecke Triangle Groups G_q // [arXiv:1810.10668 \[math.DS\]](#) (25.10.2018).
13. Cheung Y., Quas A., BCZ map is weakly mixing // [arXiv:2403.14976v1 \[math.DS\]](#) (22.03.2024).
14. Cobeli C., Zaharescu A., On the intervals of a third between Farey fractions // [arXiv:math/0511363v1 \[math.NT\]](#) (14.11.2005).
15. Haynes A., The distribution of special subsets of the Farey sequence // J. Number Theory. 2004. Vol. 107. P. 95–104.
16. Haynes A.K., Numerators of differences of nonconsecutive Farey fractions // Int. J. Number Theory. 2010. Vol. 6. № 3. P. 655–666.

17. Boca F.P., Siskaki M., A note on the pair correlation of Farey fractions // [arXiv:2109.12744v2 \[math.NT\]](#) (19.09.2022).
18. Marklof J., Smallest denominators // [arXiv:2310.11251v1 \[math.NT\]](#) (17.10.2023).
19. Chahala B., Chaube S., Pair correlation of Farey fractions with square-free denominators // [arXiv:2303.12882v1 \[math.NT\]](#) (22.05.2023).
20. Chahal B., Chaubey S., Goel S., On the distribution of index of Farey sequences // Res. Number Theory. 2024. Vol. 10. Article No 27. 34 pp.
21. Chen H., Haynes A., Expected value of the smallest denominator in a random interval of fixed radius // [arXiv:2109.12668v2 \[math.NT\]](#) (15.11.2022).
22. Sayous R., Gaps in the complex Farey sequence of an imaginary quadratic number field // [arXiv:2407.04380v1 \[math.NT\]](#) (05.07.2024).
23. Ren X., On q -deformed Farey sum and a homological interpretation of q -deformed real quadratic irrational numbers // [arXiv:2210.06056v4 \[math.RT\]](#) (05.01.2024).
24. Boca F.P., Cobeli C., Zaharescu A., A conjecture of R. R. Hall on Farey points // J. reine angew. Math. 2001. Vol. 535. P. 207–236.
25. Cobeli C., Zaharescu A., The distribution of rationals in residue classes // [arXiv:math/0511356v1 \[math.NT\]](#) (14.11.2005).
26. Cobeli C., Văjăitu M., Zaharescu A., The distribution of rationals in residue classes // Math. Reports. 2012. Vol. 14(64). № 1. P. 1–19.
27. Boca F.P., Cobeli C., Zaharescu A., On the distribution of the Farey sequence with odd denominators // Michigan Math. J. 2003. Vol. 51. P. 557–573.
28. Badziahin D.A., Haynes A.K., A note on Farey fractions with denominators in arithmetic progressions // Acta Arith., 2011. Vol. 146. № 3. P. 205–215.
29. Смирнов Е.Ю., Фризы и цепные дроби. М., МЦНМО, 2022.

REFERENCES

1. Korolev M.A., 2023, “A distribution related to Farey sequences”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 24. № 4. P. 137–190.
2. Korolev M.A., 2025, “A distribution related to Farey sequences - I”, [arXiv:2502.19881 \[math.NT\]](#) (27.02.2025).
3. Gutthery S.B., 2011, “A Motif of Mathematics”, Docent Press, Boston, Massachusetts, USA.
4. Cobeli C., Zaharescu A., 2003, “The Haros-Farey sequence at two hundred years. A survey”, *Acta Univ. Apulensis Math. Inform.*, vol. 5. P. 1–38.
5. Alkan E., Ledoan A.H., Văjăitu M., Zaharescu A., 2006, “Discrepancy of fractions with divisibility constraints”, *Monatsh. Math.*, vol. 149. P. 179–192.
6. Alkan E., Ledoan A.H., Văjăitu M., Zaharescu A., 2006, “Discrepancy of sets of fractions with congruence constraints”, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, vol. 51. P. 265–276.

7. Boca F.P., Heersink B., Spiegelhalter P., 2013, “Gap distribution of Farey fractions under some divisibility constraints”, *Integers*, vol. 13. Paper No. A44. 15 pp.
8. Heersink B., 2016, “Poincaré sections for the horocycle flow in covers of $SL(2; \mathbb{R}) = SL(2; \mathbb{Z})$ and applications to Farey fraction statistics”, *Monatsh. Math.*, vol. 179. P. 389–420.
9. Ledoan A.H., The discrepancy of Farey series // *Acta Math. Hungar.* 2018. Vol. 156. P. 465–480.
10. Athreya J.S., Cheung Y., 2012, “A Poincaré section for horocycle flow on the space of lattices”, *arXiv:1206.6597 [math.DS]* (28.06.2012).
11. Athreya J.S., Chaika J., Lelièvre S., 2013, “The gap distribution of slopes on the golden L ”, *arXiv:1308.4203 [math.DS]* (20.08.2013).
12. Taha D., 2018, “The Boca-Cobeli-Zaharescu Map Analogue for the Hecke Triangle Groups G_q ”, *arXiv:1810.10668 [math.DS]* (25.10.2018).
13. Cheung Y., Quas A., 2024, “BCZ map is weakly mixing”, *arXiv:2403.14976v1 [math.DS]* (22.03.2024).
14. Cobeli C., Zaharescu A., 2005, “On the intervals of a third between Farey fractions”, *arXiv:math/0511363v1 [math.NT]* (14.11.2005).
15. Haynes A., 2004, “The distribution of special subsets of the Farey sequence”, *J. Number Theory.*, vol. 107. P. 95–104.
16. Haynes A.K., 2010, “Numerators of differences of nonconsecutive Farey fractions”, *Int. J. Number Theory*, vol. 6. № 3. P. 655–666.
17. Boca F.P., Siskaki M., 2022, “A note on the pair correlation of Farey fractions”, *arXiv:2109.12744v2 [math.NT]* (19.09.2022).
18. Marklof J., 2023, “Smallest denominators”, *arXiv:2310.11251v1 [math.NT]* (17.10.2023).
19. Chahala B., Chaube S., 2023, “Pair correlation of Farey fractions with square-free denominators”, *arXiv:2303.12882v1 [math.NT]* (22.05.2023).
20. Chahal B., Chaubey S., Goel S., 2024, “On the distribution of index of Farey sequences”, *Res. Number Theory.*, vol. 10. Article No 27. 34 pp.
21. Chen H., Haynes A., 2024, “Expected value of the smallest denominator in a random interval of fixed radius”, *arXiv:2109.12668v2 [math.NT]* (15.11.2022).
22. Sayous R., 2024, “Gaps in the complex Farey sequence of an imaginary quadratic number field”, *arXiv:2407.04380v1 [math.NT]* (05.07.2024).
23. Ren X., 2024, “On q -deformed Farey sum and a homological interpretation of q -deformed real quadratic irrational numbers”, *arXiv:2210.06056v4 [math.RT]* (05.01.2024).
24. Boca F.P., Cobeli C., Zaharescu A., 2001, “A conjecture of R. R. Hall on Farey points”, *J. reine angew. Math.*, vol. 535. P. 207–236.
25. Cobeli C., Zaharescu A., 2005, “The distribution of rationals in residue classes”, *arXiv:math/0511356v1 [math.NT]* (14.11.2005).
26. Cobeli C., Văjăitu M., Zaharescu A., 2012, “The distribution of rationals in residue classes”, *Math. Reports.*, vol. 14(64). № 1. P. 1–19.

-
27. Boca F.P., Cobeli C., Zaharescu A., 2003, "On the distribution of the Farey sequence with odd denominators", *Michigan Math. J.*, vol. 51. P. 557–573.
 28. Badziahin D.A., Haynes A.K., 2011, "A note on Farey fractions with denominators in arithmetic progressions", *Acta Arith.*, vol. 146. № 3. P. 205–215.
 29. Smirnov E.Yu., 2022, Frieze patterns and continued fractions (in Russian), М., МСМЕ, 2022.

Получено: 24.06.2025

Принято в печать: 27.08.2025