

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 3.

УДК 511, 519.6

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-96-112

**О некоторых вопросах, связанных с арифметической
производной и ее приложениями**

Е. И. Деза, Т. Н. Казарихина, Д. Ю. Ганусенко, С. О. Тихонов

Деза Елена Ивановна — доктор педагогических наук, профессор, Институт математики и информатики, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: elena.deza@gmail.com

Казарихина Татьяна Николаевна — кандидат педагогических наук, Институт математики и информатики, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: t.n.kaz@mail.ru

Ганусенко Дарья Юрьевна — Институт математики и информатики, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: darya.ganusenko@gmail.com

Тихонов Сергей Олегович — Институт математики и информатики, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: stihonov3107@yandex.ru

Аннотация

В статье рассмотрены свойства арифметической производной и первообразной на множестве рациональных чисел, получены свойства, связанные с аналогичными свойствами производной функции, изучены некоторые дифференциальные уравнения в арифметических производных и проанализированы свойства их решений.

Ключевые слова: арифметическая производная, арифметическая первообразная, правило Лейбница, арифметическая константа.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Деза, Е. И., Казарихина, Т. Н., Ганусенко, Д. Ю., Тихонов, С. О. О некоторых вопросах, связанных с арифметической производной и ее приложениями // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 3, с. 96–112.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 3.

UDC 511, 519.6

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-96-112

Some questions related to the arithmetic derivative and its applications

E. I. Deza, T. N. Kazarikhina, D. Y. Ganusenko, S. O. Tikhonov

Deza Elena Ivanovna — doctor of pedagogical sciences, professor, Institute of Mathematics and Computer Science, Moscow Pedagogical State University (Moscow).*e-mail: elena.deza@gmail.com***Kazarikhina Tatiana Nikolaevna** — candidate of pedagogical sciences, Institute of Mathematics and Computer Science, Moscow Pedagogical State University (Moscow).*e-mail: t.n.kaz@mail.ru***Ganusenko Darya Yurievna** — Institute of Mathematics and Computer Science, Moscow Pedagogical State University (Moscow).*e-mail: darya.ganusenko@gmail.com***Tikhonov Sergey Olegovich** — Institute of Mathematics and Computer Science, Moscow Pedagogical State University (Moscow).*e-mail: stikhonov3107@yandex.ru***Abstract**

The article discusses the properties of the arithmetic derivative and the primitive on the set of rational numbers, obtained properties related to similar properties of the derivative function, some equations in arithmetic derivatives and the properties of their solutions.

Keywords: arithmetical derivative, arithmetical antiderivative, Leibnitz rule, arithmetical constant.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Deza, E. I., Kazarikhina, T. N., Ganusenko, D. Y., Tikhonov, S. O. 2025, "Some questions related to the arithmetic derivative and its applications", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 96–112.

1. Введение

На числовых множествах можно ввести ряд понятий, аналогичных классическим понятиям математического анализа, включая понятия *производная*, *первообразная*, *интеграл*. Один из существующих подходов (см., например, [4], [9], [13]) связан с построением теории так называемых *арифметических производных*. При построении арифметической производной натуральных чисел достаточно задать значение арифметической производной для любого простого числа, и затем потребовать выполнения правила Лейбница, сохраняющего правило "дифференцирование произведения". Аналогичный подход позволяет однозначно задать арифметическую производную любого целого и рационального числа, более того, любого вещественного числа, представленного, с точностью до знака, в виде конечного произведения рациональных степеней различных простых чисел. Именно, определенный таким образом оператор арифметического дифференцирования позволяет получить для всех указанных выше числовых множеств простую формулу вычисления арифметической производной, не зависящую от способа разложения дифференцируемого числа на множители.

Построение теории арифметической производной ("определение – формула – свойства – арифметические константы – арифметическая первообразная"), реализованное в разделе 2 статьи, позволяет рассмотреть ряд естественных приложений, в том числе вопросы разрешимости ряда *дифференциальных уравнений в арифметических производных* (раздел 3 статьи).

2. Арифметическая производная и арифметическая первообразная

2.1. Определение арифметической производной

Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Определим *арифметическую производную* любого натурального числа как некоторое целое неотрицательное число, удовлетворяющее следующим условиям ([13]):

- $p' = 1$ для любого простого числа p ;
- $(mn)' = m'n' + m'n$ для любых натуральных чисел m и n (*правило Лейбница*).

Например, $6' = (2 \cdot 3)' = 2' \cdot 3 + 2 \cdot 3' = 3 + 2 = 5$, $4' = (2 \cdot 2)' = 2' \cdot 2 + 2 \cdot 2' = 2 + 2 = 4$, $8' = (4 \cdot 2)' = 4' \cdot 2 + 4 \cdot 2' = 8 + 4 = 12$.

Нетрудно убедиться в том, что $1' = 0$. Действительно, $1' = (1 \cdot 1)' = 1' \cdot 1 + 1 \cdot 1' = 2 \cdot 1'$, откуда и следует искомый результат.

Заметим, что, пользуясь правилами арифметического дифференцирования, нетрудно показать, что для любого натурального числа k имеют место соотношения

$$(p^k)' = kp^{k-1}, \quad p \in P,$$

и, в общем случае,

$$(n^k)' = kn^{k-1}n', \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для $p = 2$ и $k = 2, 3$ мы проверили данное соотношение непосредственно. В общем случае его легко доказать по индукции. Поскольку $n' = (n^1)' = 1 \cdot n^0 \cdot n'$, то утверждение верно для $k = 1$. Переходя от k к $k + 1$, получим соотношение

$$(n^{k+1})' = (n^k \cdot n)' = (n^k)' \cdot n + n^k \cdot n' = kn^{k-1}n' \cdot n + n^kn' = (k+1)n^kn'.$$

Сохраняя те же требования, мы можем легко расширить понятие арифметической производной на множество $\mathbb{Z}$ целых чисел и на множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Определим *арифметическую производную* любого целого (рационального) числа как некоторое целое (рациональное) число, удовлетворяющее следующим условиям:

- $p' = 1$ для любого простого числа p ;
- $(ab)' = ab' + a'b$ для любых целых (рациональных) чисел a и b (*правило Лейбница*).

Нетрудно убедиться в том, что $(-1)' = 0$. Действительно,

$$0 = 1' = ((-1) \cdot (-1))' = (-1)' \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1)' = -2 \cdot (-1)',$$

откуда и следует искомый результат.

Более того, $0' = 0$. В этом случае рассуждения таковы: $0' = (0 \cdot p)' = 0' \cdot p + 0 \cdot p'$, или $0' = p \cdot 0'$, $p \in P$, откуда и следует нужное утверждение.

Опираясь на полученную информацию, нетрудно вывести простое правило дифференцирования отрицательных целых чисел:

$$(-n)' = -n', \quad n \in \mathbb{N}.$$

Действительно, $(-n)' = ((-1) \cdot n)' = (-1)' \cdot n + (-1) \cdot n' = -n'$.

Например, $(-6)' = -6' = -5$, $(-4)' = -4' = -4$, $(-8)' = -8' = -12$.

В этом случае правило дифференцирования степени сохраняется: для любого натурального числа k имеет место соотношение

$$(z^k)' = kz^{k-1}z', \quad z \in \mathbb{Z}.$$

Если речь идет о рациональных числах, то, прежде всего, можно утверждать, что для любого ненулевого рационального (в частности, натурального) числа b имеет место равенство

$$\left(\frac{1}{b}\right)' = -\frac{b'}{b^2}.$$

Действительно, $0 = 1' = \left(b \cdot \frac{1}{b}\right)' = b' \cdot \frac{1}{b} + b \cdot \left(\frac{1}{b}\right)'$, откуда и следует искомый результат.

Последнее равенство позволяет получить "рабочее" правило дифференцирования любого рационального числа b : если $b \in \mathbb{Q}$, и $b = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$b' = \left(\frac{m}{n}\right)' = \frac{m'n - n'm}{n^2}.$$

Действительно, в этом случае

$$b' = \left(\frac{m}{n}\right)' = \left(m \cdot \frac{1}{n}\right)' = m' \cdot \frac{1}{n} + m \cdot \left(\frac{1}{n}\right)' = m' \cdot \frac{1}{n} + m \cdot \left(-\frac{n'}{n^2}\right) = \frac{m'n - n'm}{n^2}.$$

Так, $\left(\frac{2}{3}\right)' = \frac{2' \cdot 3 - 3' \cdot 2}{3^2} = \frac{1}{9}$, $\left(-\frac{5}{4}\right)' = -\left(\frac{5}{4}\right)' = -\frac{5' \cdot 4 - 4' \cdot 5}{4^2} = -\frac{4 - 4 \cdot 5}{16} = 1$.

При этом нетрудно показать, что правило дифференцирования степени сохраняется и в этом случае: для любого целого числа k имеет место соотношение

$$(b^k)' = kb^{k-1}b', \quad b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

Доказательство для натурального k аналогично соответствующим рассуждениям на множестве натуральных чисел. Для $k = 0$ утверждение тривиально. Если же k отрицательно, то

$$(b^k)' = \left(\left(\frac{1}{b}\right)^{-k}\right)' = -k \left(\frac{1}{b}\right)^{-k-1} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)' = k \left(\frac{1}{b}\right)^{-k-1} \cdot \frac{b'}{b^2} = kb^{k-1} \cdot b'.$$

В частности, для целой степени простого числа имеет место соотношение $(p^k)' = kp^{k-1}$, $p \in P$.

Переходя к множеству действительных чисел, попробуем сохранить формальное определение арифметической производной.

Следуя стандартной схеме, попробуем определить *арифметическую производную* действительного числа как некоторое действительное число, удовлетворяющее следующим условиям:

- $p' = 1$ для любого простого числа p ;
- $(\alpha\beta)' = \alpha'\beta + \beta'\alpha$ для любых действительных чисел α и β (*правило Лейбница*).

При этом возникает два естественных связанных между собой вопроса. Во-первых, как "влияют" производные простых чисел на производные произвольных действительных чисел? И, во-вторых, каково "рабочее" правило вычисления арифметической производной для рассматриваемого числового множества? В отличие от предыдущих числовых множеств, в общем случае ситуация не так проста, как хотелось бы. Однако для действительных чисел, представимых, с точностью до знака, в виде произведения конечного числа рациональных степеней различных простых чисел все становится на свои места. Будем считать, что представленное выше определение арифметической производной было дано только для действительных чисел указанного вида, а множество $\mathbb{R}$, если не оговорено противное, есть множество именно указанных выше действительных чисел.

При этом правило дифференцирования степени сохраняется для любых рациональных показателей. Именно, для любого рационального числа $b = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет место соотношение

$$(\alpha^b)' = b\alpha^{b-1} \cdot \alpha', \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Для доказательства сначала убедимся, что утверждение верно для целого показателя степени m :

$$(\alpha^m)' = m\alpha^{m-1} \cdot \alpha', \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

В этом случае рассуждения идентичны доказательству аналогичного свойства рациональных чисел. Далее, получим утверждение $(p^b)' = bp^{b-1}$, $p \in P$, для арифметической производной рациональной степени простого числа. Оно следует из соотношения

$$(p^b)' = (p^{\frac{m}{n}})' = ((p^{\frac{1}{n}})^m)' = m(p^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot (p^{\frac{1}{n}})' = mp^{\frac{m-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot p^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot p^{\frac{m}{n}-1} = bp^{b-1}.$$

Общий результат может быть получен теперь на основании разложения $\alpha = \pm p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_s^{b_s}$ при использовании правила Лейбница.

2.2. Формула для вычисления арифметической производной

Опираясь на доказанные утверждения, мы можем получить формулу, позволяющую вычислять арифметическую производную любого действительного числа, представимого с точностью до знака в виде произведения конечного числа рациональных степеней различных простых чисел ([13]).

ТЕОРЕМА 1. Для действительного числа α , представимого в виде $\alpha = \pm p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_s^{b_s}$, где $b_1, b_2, \dots, b_s \in \mathbb{Q}$, и $p_1, p_2, \dots, p_s$ – различные простые числа, имеет место равенство

$$\alpha' = \alpha \left(\frac{b_1}{p_1} + \frac{b_2}{p_2} + \dots + \frac{b_s}{p_s} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом определения арифметической производной и доказанных выше свойств производной степени имеем:

$$\begin{aligned} \alpha' &= (\pm p_1^{b_1} \dots p_s^{b_s})' = \pm(p_1^{b_1} \dots p_{s-1}^{b_{s-1}} \cdot (p_s^{b_s})' + \dots + p_2^{b_2} \dots p_s^{b_s} \cdot (p_1^{b_1})') = \\ &= \pm(p_1^{b_1} \dots p_{s-1}^{b_{s-1}} \cdot b_s p_s^{b_s-1} + \dots + p_2^{b_2} \dots p_s^{b_s} \cdot b_1 p_1^{b_1-1}) = \left(p_1^{b_1} \dots p_{s-1}^{b_{s-1}} p_s^{b_s} \cdot \frac{b_s}{p_s} + \dots + p_1^{b_1} \dots p_{s-1}^{b_{s-1}} p_s^{b_s} \cdot \frac{b_1}{p_1} \right) = \\ &= \alpha \left(\frac{b_1}{p_1} + \dots + \frac{b_s}{p_s} \right). \end{aligned}$$

□ Например, $6' = (2^1 \cdot 3^1)' = 6 \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = 6 \cdot \frac{5}{6} = 5$, $4' = (2^2)' = 4 \cdot \frac{2}{2} = 4$, $8' = (2^3)' = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12$, $24' = (2^3 \cdot 3^1)' = 24 \cdot (\frac{3}{2} + \frac{1}{3}) = 24 \cdot \frac{11}{6} = 44$, $(\frac{2}{3})' = (2^1 \cdot 3^{-1})' = \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)' &= (2^1 \cdot 3^{-1})' = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}, \quad \left(\frac{5}{4}\right)' = (5^1 \cdot 2^{-2})' = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{2}\right) = \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -1, \\ \left(\frac{4}{27}\right)' &= (2^2 \cdot 3^{-3})' = \frac{4}{27} \cdot \left(\frac{2}{2} - \frac{3}{3}\right) = 0, \quad \sqrt{3}' = (3^{\frac{1}{2}})' = \sqrt{3} \cdot \frac{1/2}{3} = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

Таким образом, определение арифметической производной корректно, то есть не зависит от конкретного представления дифференцируемого натурального (целого, рационального, действительного) числа в виде произведения двух чисел.

2.3. Арифметическая производная и классические свойства дифференцирования

Исходя из вышесказанного, можно утверждать, что аналоги классических правил "производная произведения", "производная частного" и "производная степени" имеют место и в случае арифметического дифференцирования действительных чисел. При этом свойство

$$(\alpha\beta)' = \alpha'\beta + \alpha\beta', \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

представляет собой правило Лейбница, и при нашем подходе является частью определения арифметической производной, свойство

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)' = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\beta^2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

легко доказывается на основе использования правила дифференцирования степени, а вот свойство дифференцирования степени имеет, в общем случае, вид

$$(\alpha^b)' = b\alpha^{b-1}\alpha', \quad b \in \mathbb{Q}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

то есть демонстрирует нам арифметический аналог дифференцирования сложной функции (аналог правила $(x^b)' = bx^{b-1}$ мы получаем для простых чисел: $(p^b)' = bp^{b-1}$, $b \in \mathbb{Q}$, $p \in P$).

Что же происходит в случае арифметического дифференцирования с правилом "производная суммы"? Очевидно, что в классическом виде сохранить его не удастся. В самом деле, в случае сохранения правила дифференцирования суммы мы получили бы для любого натурального числа n следующий результат: $n' = (1 + 1 + \dots + 1)' = 1' + 1' + \dots + 1' = 0$. Однако существуют пары $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, для которых правило $(\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta'$ имеет место. Например, $(1 + 2)' = 1' + 2'$, $(2 + 4)' = 2' + 4'$.

Можно утверждать, что *таких пар бесконечно много*, поскольку имеет место следующее свойство (для натуральных чисел доказано в [13]):

- если $(\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $(\gamma\alpha + \gamma\beta)' = (\gamma\alpha)' + (\gamma\beta)'$ для любого $\gamma \in \mathbb{R}$.

Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} (\gamma\alpha + \gamma\beta)' &= (\gamma(\alpha + \beta))' = \gamma'(\alpha + \beta) + \gamma(\alpha + \beta)' = \\ &= \gamma'\alpha + \gamma'\beta + \gamma\alpha' + \gamma\beta' = (\gamma'\alpha + \gamma\alpha') + (\gamma'\beta + \gamma\beta') = (\gamma\alpha)' + (\gamma\beta)'. \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем бесконечно много пар действительных чисел, удовлетворяющих правилу "производная суммы": например, таковыми являются все пары натуральных чисел $(n, 2n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Еще одно классическое свойство дифференцирования – "правило вынесения константы за знак производной". Но что понимать под константой в контексте нашего исследования?

2.4. Арифметические константы

Определим *арифметическую константу* как действительное число c , арифметическая производная которого равна нулю. Для таких действительных чисел правило вынесения константы за знак производной безусловно работает: $(c\alpha)' = c'\alpha + c\alpha' = c\alpha'$ для любого действительного α и любой арифметической константы c . Однако верно и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Равенство $(c\alpha)' = c\alpha'$, $c, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, имеет место тогда и только тогда, когда c – арифметическая константа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону утверждение мы уже доказали. Проверим теперь, что равенство $(c\alpha)' = c\alpha'$ возможно лишь в случае $c' = 0$. Действительно, если $(c\alpha)' = c'\alpha + c\alpha' = c\alpha'$, то $c'\alpha = 0$, и, поскольку $\alpha \neq 0$, то $c' = 0$, то есть c – арифметическая константа. $\square$

Нетрудно убедиться в том, что существует лишь одна натуральная арифметическая константа 1, и ровно три целых арифметических константы 0, 1, -1 . Это следует из того, что для любого ненулевого целого числа $z = \pm p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ равенство $z' = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\frac{k_1}{p_1} + \dots + \frac{k_s}{p_s} = 0$, то есть тогда и только тогда, когда все целые неотрицательные числа $k_1, \dots, k_s$ равны нулю ([13]).

Однако уже для рациональных чисел ситуация меняется. Существуют нетривиальные рациональные арифметические константы. Например, арифметической константой является число $\frac{4}{27}$: $(\frac{4}{27})' = (2^2 \cdot 3^{-3})' = \frac{4}{27} (\frac{2}{3} - \frac{3}{3}) = 0$.

Исходя из определения арифметической константы и свойств арифметической производной, можно утверждать, что действительное число α , представимое, с точностью до знака, в виде произведения конечного числа рациональных степеней различных простых чисел, $\alpha = \pm p_1^{b_1} \dots p_s^{b_s}$, $p_i \in P$, $b_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, s$, является арифметической константой тогда и только тогда, когда $\frac{b_1}{p_1} + \dots + \frac{b_s}{p_s} = 0$. В частности, арифметическими константами являются рациональные числа вида $\frac{p^p}{q^q}$, $p, q \in P$: $(\frac{p^p}{q^q})' = \frac{p^p}{q^q} (\frac{p}{p} - \frac{q}{q}) = 0$. Следуя данной схеме, можно получить и действительную арифметическую константу вида $\frac{p_1^{b_1 p_1} \dots p_s^{b_s p_s}}{q_1^{b_1 q_1} \dots q_s^{b_s q_s}}$, $p_i, q_i \in P$, $b_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, s$:

$$\left(\frac{p_1^{b_1 p_1} \dots p_s^{b_s p_s}}{q_1^{b_1 q_1} \dots q_s^{b_s q_s}} \right)' = \frac{p_1^{b_1 p_1} \dots p_s^{b_s p_s}}{q_1^{b_1 q_1} \dots q_s^{b_s q_s}} \cdot \left(\frac{b_1 p_1}{p_1} + \dots + \frac{b_s p_s}{p_s} - \frac{b_1 q_1}{q_1} - \dots - \frac{b_s q_s}{q_s} \right) = 0.$$

Такая арифметическая константа может быть и иррациональным числом. Например, иррациональной арифметической константой является число $\frac{2\sqrt{27}}{27}$: $(\frac{2\sqrt{27}}{27})' = (2^1 \cdot 3^{-3/2})' = 0$. Иррациональными арифметическими константами являются и числа вида $\sqrt{\frac{p^p}{q^q}}$, $p, q \in P, p \neq q$.

Заметим, что из доказанного выше утверждения немедленно следует, что число $\alpha = \pm p_1^{b_1} \dots p_s^{b_s}$, $p_i \in P$, $b_i \in \mathbb{Q}$, является арифметической константой тогда и только тогда, когда арифметической константой является число $\frac{1}{\alpha} = \pm p_1^{-b_1} \dots p_s^{-b_s}$, $p_i \in P$, $b_i \in \mathbb{Q}$. Впрочем, это утверждение можно доказать и в более общем виде:

• если ненулевое действительное число α является арифметической константой, то арифметической константой является и число $\frac{1}{\alpha}$.

Для доказательства достаточно заметить, что, если $\alpha' = 0$, и $\alpha \neq 0$, то $(\frac{1}{\alpha})' = \frac{\alpha'}{\alpha^2} = 0$.

Более того, произведение арифметических констант тоже дает арифметическую константу:

• если действительные числа α и β являются арифметическими константами, то арифметической константой является и число $\alpha\beta$.

Читатель легко проведет необходимые рассуждения самостоятельно.

Из полученных утверждений следует, что

• множество ненулевых арифметических констант образует группу относительно операции умножения.

2.5. Арифметическая первообразная

Таким образом, мы получили алгоритм нахождения арифметической производной любого действительного числа, представимого, с точностью до знака, в виде произведения конечного числа рациональных степеней различных простых чисел. Естественный вопрос, возникающий в этой связи, звучит так: какие действительные (рациональные, целые, натуральные) числа могут быть получены как арифметические производные того или иного действительного (рационального, целого, натурального) числа? Другими словами, что можно сказать о решениях уравнения $x' = a$, если x и a принадлежат выделенному числовому множеству?

По аналогии с классическим случаем, назовем *арифметической первообразной* числа $\alpha \in \mathbb{R}$ такое действительное число x , арифметическая производная которого равна α : $x' = \alpha$. Множество $I_R(\alpha)$ всех арифметических первообразных числа α назовем *интегрирующей функцией* числа α .

Поскольку помимо общего случая действительной арифметической первообразной действительных чисел интерес представляют натуральные, целые и рациональные арифметические первообразные натуральных, целых и рациональных чисел, соответственно, в ходе рассуждений мы будем уточнять рассматриваемое в конкретный момент числовое множество.

Прежде всего заметим, что арифметическая производная любого натурального числа, большего 1, есть число натуральное, арифметическая производная любого целого числа есть число целое, арифметическая производная любого рационального числа есть число рациональное, и арифметическая производная любого действительного числа, представимого, с точностью до знака, в виде произведения конечного числа рациональных степеней различных простых чисел, есть действительное число, представимое в аналогичном виде.

Перейдем к рассмотрению арифметических первообразных. Начнем с чисел натуральных.

Нетрудно заметить, что арифметическая производная натуральных чисел обладает *свойством ограниченности*. Именно, имеют место следующие оценки ([4], [13]):

- арифметическая производная n' любого натурального числа n удовлетворяет условиям $0 \leq n' \leq \frac{n}{2} \log_2 n$; более того, арифметическая производная n' любого составного числа n удовлетворяет условиям $2\sqrt{n} \leq n' \leq \frac{n}{2} \log_2 n$.

Действительно, первое утверждение верно для $n = 1$: $1' = 0$. Если $n > 1$, то $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$, и

$$n' = n \left(\frac{k_1}{p_1} + \dots + \frac{k_s}{p_s} \right) \leq n \left(\frac{k_1}{2} + \dots + \frac{k_s}{2} \right) = \frac{n}{2} (k_1 + \dots + k_s) \leq \frac{n}{2} \log_2 n,$$

так как $n \geq 2^{k_1 + \dots + k_s}$, и, следовательно, $k_1 + \dots + k_s \leq \log_2 n$. Заметим, что нижняя граница 0 достигается только при $n = 1$, в то время как значение 1 имеет место для всех простых. Нижняя оценка для составного $n = n_1 n_2$, $1 < n_1 \leq n_2 < n$, вытекает из таких соображений:

$$n' = (n_1 n_2)' = n_1' n_2 + n_1 n_2' \geq n_1 + n_2 = n \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \geq 2n \sqrt{\frac{1}{n_1} \cdot \frac{1}{n_2}} = 2\sqrt{n}.$$

В общем случае, если $n = n_1 n_2 \dots n_k$, то $n' \geq k n^{k-1}$.

Таким образом, для составного числа n имеет место оценка $n \leq \frac{(n')^2}{4}$. Отсюда следует, что

- существуют натуральные числа, которые не могут быть представлены в виде арифметической производной некоторого натурального числа. ([13])

Например, не существует натурального числа n , такого что $n' = 2$. Действительно, в противном случае для n , как для числа составного, выполнялась бы оценка $n \leq \frac{2^2}{4}$, то есть $n \leq 1$, что невозможно. Таким образом, мы доказали, что множество $I_N(2)$ натуральных первообразных числа 2 пусто. С другой стороны, нетрудно показать ([13]), что имеются рациональные числа, арифметическая производная которых равна 2. Например,

$(-\frac{21}{16})' = (-3^1 \cdot 7^1 \cdot 2^{-4})' = -\frac{21}{16} \cdot (\frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{4}{2}) = 2$. Другими словами, множество $I_Q(2)$ рациональных арифметических первообразных числа 2 непусто.

Одна из существующих в настоящее время гипотез теории арифметических производных ([13]) утверждает, что *существуют рациональные числа, не обладающие рациональной арифметической первообразной, то есть такие рациональные числа a , для которых множество $I_Q(a)$ из рациональных арифметических первообразных является пустым.*

Данную гипотезу можно обобщить, опираясь на следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Равенство $I_R(c\alpha) = cI_R(\alpha)$, $c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, имеет место тогда и только тогда, когда c – ненулевая арифметическая константа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$x \in I_R(c\alpha) \Leftrightarrow x' = c\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{c}x' = \alpha \Leftrightarrow \left(\frac{1}{c}x\right)' = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{c}x \in I_R(\alpha) \Leftrightarrow x \in cI_R(\alpha).$$

□

2.6. Рациональные арифметические первообразные рациональных чисел

В предыдущем разделе мы ввели в рассмотрение множества $I_N(\alpha)$, $I_Q(\alpha)$ и $I_R(\alpha)$ всех натуральных, рациональных и действительных арифметических первообразных заданного числа α , как правило, натурального, рационального или действительного, соответственно.

Рассмотрев множество $I_N(n)$ натуральных арифметических первообразных натурального числа n , мы доказали, что существуют натуральные числа, не обладающие арифметической первообразной. Таковыми являются, например, числа 2, 3, 11, 17, 23, 29, 35 и многие другие нечетные натуральные числа (в [13] представлены все такие числа, меньшие 1000; мы нашли все такие числа, не превосходящие 20000¹). При этом все перечисленные выше числа обладают рациональными арифметическими первообразными. Более того, на сегодняшний день не найдено ни одного рационального числа, которое не обладало бы рациональной арифметической первообразной.

Однако специалисты считают, что такие числа могут существовать, и одна из гипотез ([13]), касающихся свойств арифметической производной и арифметической первообразной, звучит так: *существует рациональное число a , такое что уравнение $x' = a$ не имеет рациональных корней* (Уфнаровский-Аландер).

В терминах арифметической производной гипотеза принимает следующий вид: *существует рациональное число a , такое что $I_Q(a) = \emptyset$.*

Опираясь на доказанную теорему, мы можем уточнить гипотезу Уфнаровского-Аландера:

• *существует бесконечно много рациональных чисел a , для которых уравнение $x' = a$ не имеет рациональных решений.*

Действительно, если существует $a \in \mathbb{Q}$, такое что $I_Q(a) = \emptyset$, то для любого $sa \in \mathbb{Q}$, где s – ненулевая рациональная арифметическая константа, $I_Q(sa) = \emptyset$. В противном случае существует $b \in \mathbb{Q}$, такое что $b' = sa$, и, следовательно, $(\frac{1}{s}b)' = \frac{1}{s}b' = a$, что дает противоречие.

По ряду причин естественными кандидатами для проверки гипотезы Уфнаровского-Аландера являются числа $\frac{2}{p}$, где p – нечетное простое число. В работе [9] числа такого рода подробно исследованы; в частности, доказано, что для $p = 3$ существует отрицательное рациональное число x , такое что $x' = \frac{2}{3}$. Однако само число x найдено не было. Нам удалось показать, что можно взять $x = -\frac{19}{27}$: $(-\frac{19}{27})' = -(19^1 \cdot 3^{-3})' = -\frac{19}{27}(\frac{1}{19} - \frac{3}{3}) = \frac{2}{3}$.

Таким образом, предположение, что среди чисел $\frac{2}{p}$ могут быть числа без рациональных арифметических первообразных, следует проверять лишь для простых $p \geq 5$.

¹https://docs.google.com/document/d/1alh45KONgrDLeQnOIOcvx08ai_c29BU4/edit?usp=sharing&ouid=100689387175010310069&rtpof=true&sd=true

3. Уравнения в арифметических производных

Арифметическая производная обладает рядом интересных и полезных свойств ([13], [4], [14]). В частности, можно рассматривать теорию соответствующих *дифференциальных уравнений*. В этом разделе мы рассматриваем некоторые виды дифференциальных уравнений в арифметических производных и исследуем их на разрешимость и количество решений. При этом мы используем классическую терминологию теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уточняя некоторые термины, поскольку точный их перенос на язык арифметической производной может быть не совсем корректен.

Если не оговорено противное, будем считать, что параметры и неизвестные рассматриваемых дифференциальных уравнений в арифметических производных являются рациональными числами.

3.1. Простейшие примеры

Приведем несколько несложных фактов (см. [13], [9]):

- Дифференциальное уравнение в арифметических производных $x' = 0$ имеет единственное натуральное решение 1, ровно три целых решения $0, \pm 1$, и бесконечно много рациональных решений ([13]), которые мы называем арифметическими константами.
- Дифференциальному уравнению в арифметических производных $x' = 1$ удовлетворяют, по определению, все простые числа. Более того, можно доказать, что множество натуральных решений данного уравнения состоит только из простых чисел. С другой стороны, уравнение имеет и другие рациональные решения. Так, $(-\frac{5}{4})' = 1$. Однако существует гипотеза, что положительными рациональными решениями уравнения $x' = 1$ являются только простые числа ([13]).
- Дифференциальное уравнение в арифметических производных $x' = a$, где a – натуральное число, большее 1, имеет конечное (возможно, пустое) множество натуральных решений. Множество таких решений пусто для $a = 2, 3, 11, 17, 23, 29, 35$ (и многих других нечетных натуральных чисел), и непусто для любого четного числа a , большего двух, если верна *бинарная гипотеза Гольдбаха*: в этом случае $a = p + q$, $p, q \in P$, и $x = pq$.
- Уравнение $x'' = 0$ имеет бесконечно много натуральных решений: для любого простого числа p имеет место равенство $p' = 1$, и, следовательно, $p'' = 0$.
- Уравнение $x'' = 1$ имеет бесконечно много натуральных решений, если существует бесконечно много пар *простых-близнецов*: если $p, p + 2 \in P$, то $(2p)' = p + 2$, и $(2p)'' = 1$.
- Натуральными решениями уравнения $x' = x$ являются лишь числа вида p^p , $p \in P$ ([13]). Более общее уравнение $x' = x + p^p$, $p \in P$, имеет бесконечно много натуральных решений вида qp^p , $q, p \in P$. Существует гипотеза ([13]), утверждающая, что других натуральных решений у уравнения $x' = x + p^p$, $p \in P$, нет.
- Натуральными решениями уравнения $x' = ax$ при натуральном a являются числа p^{ap} , $p \in P$. В рациональных числах это уравнение имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда a является целым или представимо в виде несократимой дроби, знаменатель которой является произведением различных простых чисел (см. [13]).

3.2. Линейные уравнения в арифметических производных

3.2.1. Уравнение $x' + ax = b$

Назовем *линейным дифференциальным уравнением в арифметических производных* уравнение вида $x' + ax = b$, $a, b \in \mathbb{Q}$.

Если $b = 0$, то мы говорим об *однородном* линейном дифференциальном уравнении в арифметических производных. Если $b \neq 0$, то назовем соответствующее уравнение *неоднородным*.

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что линейное дифференциальное уравнение $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные функции (в частности, постоянные), можно решить методом Бернулли, то есть свести его к уравнению с разделяющимися переменными с помощью некоторой подстановки. Благодаря правилу Лейбница, этот метод применим и для решения уравнения $x' + ax = b$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$, в арифметических производных.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$. Если x_0 представляет собой ненулевое рациональное решение однородного линейного дифференциального уравнения в арифметических производных $x' + ax = 0$, и $I_{\mathbb{Q}}(\frac{b}{x_0}) \neq \emptyset$, то $x_0 I_{\mathbb{Q}}(\frac{b}{x_0})$ является множеством всех рациональных решений уравнения $x' + ax = b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 – ненулевое рациональное решение уравнения $x' + ax = 0$. Будем искать рациональные решения уравнения $x' + ax = b$ в виде $x = x_0 y$, $y \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$x' + ax = b \Leftrightarrow (x_0 y)' + ax_0 y = b \Leftrightarrow x_0' y + x_0 y' + ax_0 y = b \Leftrightarrow x_0 y' = b \Leftrightarrow y' = \frac{b}{x_0}.$$

□

Таким образом, в случае разрешимости в $\mathbb{Q}$ неоднородного линейного дифференциального уравнения в арифметических производных $x' + ax = b$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$, и нетривиальной разрешимости в $\mathbb{Q}$ соответствующего однородного уравнения $x' + ax = 0$, мы получим все рациональные решения уравнения $x' + ax = b$, найдя одно ненулевое рациональное решение уравнения $x' + ax = 0$, и множество $I_{\mathbb{Q}}(\frac{b}{x_0})$ всех рациональных арифметических первообразных числа $\frac{b}{x_0}$. Обратно, зная ненулевые рациональные решения x_1, x_0 уравнений $x' + ax = b$ и $x' + ax = 0$, можно получить рациональную первообразную $\frac{x_1}{x_0}$ числа $\frac{b}{x_0}$.

Замечание. Неоднородное уравнение $x' + ax = b$ может быть разрешимо, тогда как соответствующее однородное уравнение неразрешимо. Например, $x' + \frac{1}{4}x = 5$ имеет решением число 4, однако уравнение $x' + \frac{1}{4}x = 0$ не имеет рациональных решений.

Заметим, что в случае $a = 0$ мы получим в качестве множества рациональных решений однородного уравнения $x' = 0$ все рациональные арифметические константы, и любое решение x_1 неоднородного уравнения $x' = b$ можно представить в виде $x_1 = yx_0$, где x_0 – ненулевая рациональная арифметическая константа, а $y \in I_{\mathbb{Q}}(\frac{b}{x_0}) = \frac{1}{x_0} I_{\mathbb{Q}}(b)$.

С другой стороны, нетрудно убедиться в том, что при любом рациональном a все рациональные решения уравнения $x' + ax = 0$ могут быть получены как sx_0 , где x_0 – некоторое фиксированное решение данного уравнения, а s – произвольная рациональная арифметическая константа. Это легкое упражнение читатель может провести самостоятельно.

Например, рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение в арифметических производных $x' - x = 96$. Соответствующее ему однородное уравнение имеет вид $x' - x = 0$. Его частным решением является, например, число 4: $x_0 = 4$. Рассмотрим множество $I_{\mathbb{Q}}(\frac{96}{4}) = I_{\mathbb{Q}}(24)$. Нетрудно проверить, что $20 \in I_{\mathbb{Q}}(24)$. Следовательно, число $4 \cdot 20$ является решением уравнения $x' - x = 96$, и $4I_{\mathbb{Q}}(24)$ дает множество всех рациональных решений уравнения $x' - x = 96$. Заметим, что в натуральных числах мы можем найти все первообразные числа 24. Поскольку любая натуральная первообразная числа 24 есть число

составное, то для $n \in I_N(24)$ имеет место оценка $n \leq \frac{24^2}{4}$. Непосредственная проверка показывает, что $I_N(24) = \{20, 95, 119, 143\}$. Отсюда следует, что натуральными решениями исходного уравнения являются числа $4 \cdot 20, 4 \cdot 95, 4 \cdot 119, 4 \cdot 143$.

Теорему 4 можно использовать для нахождения некоторых рациональных первообразных. Рассмотрим, например, линейное неоднородное дифференциальное уравнение в арифметических производных $x' - x = -18$. Замечая, что одним из решений уравнения $x' - x = -18$ является число 19, мы можем найти первообразную числа $-\frac{2}{3}$: поскольку число 27 является решением уравнения $x' - x = 0$, то $\frac{19}{27} \in I_Q(-\frac{18}{27}) = I_Q(-\frac{2}{3})$; другими словами, $-\frac{19}{27}$ — одна из рациональных первообразных числа $\frac{2}{3}$.

3.2.2. Уравнение $x' + ax = cb$

Рассмотрим теперь уравнение $x' + ax = cb$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$, и c — ненулевая рациональная арифметическая константа. Другими словами, рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в арифметических производных, отличающееся от рассмотренного выше уравнения $x' + ax = b$ множителем c в правой части, который является ненулевой рациональной арифметической константой. Естественно ожидать, что множества решений двух данных уравнений связаны между собой. Действительно, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$. Пусть $c \neq 0$ — рациональная арифметическая константа. Уравнение $x' + ax = cb$ разрешимо в рациональных числах тогда и только тогда, когда разрешимо в рациональных числах уравнение $x' + ax = b$; в случае разрешимости все рациональные решения уравнения $x' + ax = cb$ имеют вид cx_1 , где x_1 — некоторое решение уравнения $x' + ax = b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, заменой переменной $x = cy$, где c — ненулевая арифметическая константа, уравнение $x' + ax = cb$ сводится к уравнению $y' + ax = b$. $\square$

Другими словами, структура множества рациональных решений линейного дифференциального уравнения в арифметических производных $x' + ax = b$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$, не зависит от "входящих" в b арифметических констант.

Например, рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение в арифметических производных $x' - x = 648$. Домножим обе части уравнения на $\frac{4}{27}$: $\frac{4}{27}x' - \frac{4}{27}x = \frac{4}{27} \cdot 648$. Замечая, что $\frac{4}{27} \in I_Q(0)$, перепишем последнее уравнение в виде $(\frac{4}{27}x)' - \frac{4}{27}x = \frac{4}{27} \cdot 648$. Проведя замену $t = \frac{4}{27}x$, получим уравнение $t' - t = 96$. Множество рациональных решений этого уравнения имеет вид $4I_Q(24)$. Отсюда следует, что $\frac{27}{4} \cdot 4I_Q(24) = 27I_Q(24)$ — множество рациональных решений уравнения $x' - x = 648$. В частности, $27 \cdot 20, 27 \cdot 95, 27 \cdot 119, 27 \cdot 143$ — натуральные решения данного уравнения.

3.2.3. Уравнения $x' = (a + b)x$, $x' = ax$, $x' = bx$

Пусть $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Рассмотрим три линейных однородных дифференциальных уравнения в арифметических производных

$$x' = (a + b)x, \quad x' = ax, \quad x' = bx.$$

Покажем, что между их рациональными решениями существует интересная связь.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Пусть уравнения $x' = ax$ и $x' = bx$ нетривиальным образом разрешимы в $\mathbb{Q}$. Тогда уравнение $x' = (a + b)x$ нетривиальным образом разрешимо в $\mathbb{Q}$, и любое его ненулевое рациональное решение имеет вид $x_0 y_0$, где x_0 — некоторое ненулевое рациональное решение уравнения $x' = ax$, а y_0 — некоторое ненулевое рациональное решение уравнения $x' = bx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 и y_0 – некоторые ненулевые рациональные решения уравнений $x' = ax$ и $x' = bx$, соответственно: $x'_0 = ax_0$, и $y'_0 = by_0$. Тогда

$$(x_0y_0)' = x'_0y_0 + x_0y'_0 = ax_0y_0 + bx_0y_0 = (a+b)x_0y_0,$$

то есть x_0y_0 является (ненулевым) рациональным решением уравнения $x' = (a+b)x$.

С другой стороны, рассмотрим любое ненулевое рациональное решение x_1 уравнения $x' = (a+b)x$: $x'_1 = (a+b)x_1$. Поскольку уравнение $x' = ax$ нетривиальным образом разрешимо в $\mathbb{Q}$, выберем некоторое его ненулевое рациональное решение x_0 : $x'_0 = ax_0$. Построим число $y_0 = \frac{x_1}{x_0}$. Нетрудно проверить, что

$$y'_0 = \left(\frac{x_1}{x_0}\right)' = \frac{x'_1x_0 - x_1x'_0}{x_0^2} = \frac{(a+b)x_1x_0 - x_1ax_0}{x_0^2} = \frac{bx_1}{x_0} = by_0.$$

Другими словами, y_0 – ненулевое рациональное решение уравнения $y' = by$, и, следовательно, мы получили для любого ненулевого рационального решения x_1 уравнения $x' = (a+b)x$ искомое разложение: $x_1 = x_0y_0$, где x_0 – некоторое ненулевое рациональное решение уравнения $x' = ax$, а y_0 – некоторое ненулевое рациональное решение уравнения $x' = bx$. $\square$

Следует заметить, что возможны ситуации, когда одно уравнение разрешимо, а два других – нет (конечно, разрешимость двух любых уравнений влечет разрешимость третьего). Это случается, например, при $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{4}$. Именно, в [13] получены необходимые и достаточные условия нетривиальной разрешимости уравнения $x' = ax$, $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, в рациональных числах, получена структура его решений в случае разрешимости, и описан способ получения частного решения. Доказано, что уравнение $x' = ax$ имеет ненулевые рациональные решения тогда и только тогда, когда $a = \frac{m}{n}$, где $\gcd(m, n) = 1$, и n – бесквадратное натуральное число.

В случае, представленном выше, условия выполнены для $a = \frac{2}{3}$, и не выполнены для $b = \frac{1}{4}$ и $a+b = \frac{11}{12}$. Другими словами, уравнение $x' = \frac{2}{3}x$ имеет нетривиальные рациональные решения, в то время как уравнения $x' = \frac{x}{4}$ и $x' = \frac{11x}{12}$ ненулевых рациональных решений не имеют.

Полученный результат можно обобщить на любое конечное число слагаемых.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Пусть однородные линейные дифференциальные уравнения в арифметических производных $x' = a_1x$, $x' = a_2x$, ..., $x' = a_sx$ нетривиальным образом разрешимы в $\mathbb{Q}$. Тогда линейное однородное дифференциальное уравнение в арифметических производных $x' = (a_1 + a_2 + \dots + a_s)x$ нетривиальным образом разрешимо в $\mathbb{Q}$, и любое его ненулевое рациональное решение имеет вид $x_1x_2\dots x_s$, где x_i – ненулевое рациональное решение уравнения $x' = a_ix$, $i = 1, 2, \dots, s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Читатель легко получит данное утверждение, пользуясь методом математической индукции. $\square$

Например, рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение в арифметических производных $x' = \frac{3}{2}x$. Представим число $\frac{3}{2}$ в виде $\frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$, и рассмотрим уравнения $x' = 2x$, $x' = -\frac{1}{2}x$. Поскольку число 16 является решением уравнения $x' = 2x$, то все его рациональные решения имеют вид $16c_1$, где c_1 – рациональная арифметическая константа. Поскольку число $\frac{1}{2}$ является решением уравнения $x' = -\frac{1}{2}x$, то все его рациональные решения имеют вид $\frac{1}{2}c_2$, где c_2 – рациональная арифметическая константа. Отсюда следует, что все рациональные решения уравнения $x' = \frac{3}{2}x$ имеют вид $8c$, где c – рациональная арифметическая константа.

3.3. Арифметическое уравнение Бернулли

Назовем *арифметическим уравнением Бернулли* дифференциальное уравнение в арифметических производных вида

$$x' + ax = bx^n, \quad a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Для нахождения действительных решений данного уравнения можно использовать метод замены переменной (который использовал Иоганн Бернулли, 1637), позволяющий свести *уравнение Бернулли* $y' + a(x)y = b(x)y^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (названное в честь Якоба Бернулли, опубликовавшего его в 1635 г.), к линейному.

Именно, разделим обе части уравнения $x' + ax = bx^n$ на $x^n, x \neq 0$: $\frac{x'}{x^n} + \frac{a}{x^{n-1}} = b$. Делая замену $t = x^{1-n}$, и замечая, что $t' = (x^{1-n})' = (1-n)x^{-n}x'$, получим, что $\frac{t'}{1-n} + at = b$, или $t' + a(1-n)t = b(1-n)$. Другими словами, мы получили линейное дифференциальное уравнение в арифметических производных

$$t' + \alpha t = \beta, \quad \alpha = a(1-n), \quad \beta = b(1-n),$$

которое было рассмотрено выше. Если уравнение $t' + \alpha t = \beta$ разрешимо в рациональных числах, то можно говорить о разрешимости арифметического уравнения Бернулли $x' + ax = bx^n$, но, в общем случае, в числах действительных. Именно, если t_1 – ненулевое рациональное решение уравнения $t' + \alpha t = \beta$, то действительное число $x_1 = t_1^{\frac{1}{1-n}}$, если оно существует, является ненулевым действительным решением уравнения $x' + ax = bx^n$. Для четного натурального n уравнение $x' + ax = bx^n$ нетривиальным образом разрешимо в $\mathbb{R}$, если уравнение $t' + \alpha t = \beta$ разрешимо в $\mathbb{Q}$; для нечетного натурального $n > 1$ уравнение $x' + ax = bx^n$ нетривиальным образом разрешимо в $\mathbb{R}$, если уравнение $t' + \alpha t = \beta$ имеет в $\mathbb{Q}$ положительные решения.

Заметим, что любое полученное таким образом действительное решение x_1 арифметического уравнения Бернулли может быть представлено, с точностью до знака, в виде произведения конечного числа рациональных степеней различных простых чисел: $x_1 = \pm p_1^{b_1} \dots p_s^{b_s}$.

Например, рассмотрим арифметическое уравнение Бернулли $3x' + x = x^4$. Заметив, что 0 является решением этого уравнения, найдем его ненулевые решения, для чего разделим обе части уравнения на x^4 : $\frac{3x'}{x^4} + \frac{1}{x^3} = 1$. Производя замену переменной $t = \frac{1}{x^3}$ и учитывая, что $t' = -\frac{3x'}{x^4}$, перейдем к уравнению $-t' + t = 1$, или, что то же, к уравнению $t' - t = -1$. Найдем все рациональные решения уравнения $t' - t = -1$. Соответствующее однородное уравнение имеет вид $t' - t = 0$. Его решением является, например, число 4. При этом множество $I_Q(-\frac{1}{4})$ непусто: так, $(\frac{3}{2})' = -\frac{1}{4}$. Тогда $\{4y \mid y \in I_Q(-\frac{1}{4})\}$ – множество всех рациональных решений уравнения $t' - t = -1$, и, поскольку $x = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$, множество $\{\frac{1}{\sqrt[3]{4y}} \mid y \in I_Q(-\frac{1}{4})\}$ состоит из действительных решений уравнения $3x' + x = x^4$. В частности, одним из действительных решений уравнения $3x' + x = x^4$ является иррациональное число $-\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$.

3.4. Дифференциальные уравнения в арифметических производных с переменными коэффициентами

В этом разделе мы попробуем рассмотреть один специальный класс дифференциальных уравнений в арифметических производных с переменными коэффициентами. Для этого нам потребуется ввести понятие рациональной вполне аддитивной функции.

Напомним, что классическая *вполне аддитивная функция* есть функция $f(n)$ натурального аргумента n , такая что $f(mn) = f(m)f(n)$ для всех натуральных m и n .

Известным примером вполне аддитивной функции является функция $\Omega(n)$, которая каждому натуральному числу n ставит в соответствие количество простых делителей n с учетом их кратности. Другими словами, если $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}, p_1, \dots, p_s \in P, k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}, k_1, \dots, k_s \geq 0$,

то $\Omega(n) = k_1 + \dots + k_s$. Впрочем, еще более простой пример – функция логарифмическая: $\log(mn) = \log m + \log n$ для любых натуральных m и n .

Расширим понятие вполне аддитивной функции, позволяя аргументу пробегать некоторое подмножество M ненулевых рациональных чисел (см., например, [10]).

Именно, определим *рациональную вполне аддитивную функцию* $f(x)$ как функцию, заданную на множестве $M \subset \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, такую что $f(xy) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in M$ ([10]).

Приведенные выше примеры легко обобщаются на этот случай. Именно, определив для любого ненулевого рационального числа $x = p_1^{b_1} \dots p_s^{b_s}$, $p_1, \dots, p_s \in P$, $b_1, \dots, b_s \in \mathbb{Z}$, функцию $\Omega(x)$ как $\Omega(x) = b_1 + \dots + b_s$, мы получим рациональную вполне аддитивную функцию на множестве $M = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Логарифмическая функция является примером рациональной вполне аддитивной функции на множестве положительных рациональных чисел.

С точки зрения нашего исследования важно существование рациональной вполне аддитивной функции $f(x) = \frac{x'}{x}$: для любого ненулевого рационального числа x , $x = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_s^{b_s}$, $p_i \in P$, $b_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \dots, s$, имеет место формула $f(x) = \frac{b_1}{p_1} + \frac{b_2}{p_2} + \dots + \frac{b_s}{p_s}$, и утверждение $f(xy) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, проверяется непосредственно.

Пусть $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Пусть $f(x)$ – рациональная вполне аддитивная функция на множестве $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Рассмотрим дифференциальные уравнения в арифметических производных

$$x' + ax = f(x)x, \quad \text{и} \quad x' = f(x)x.$$

Для таких уравнений с переменными коэффициентами имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8. *Если x_0 – некоторое ненулевое рациональное решение уравнения $x' + ax = f(x)x$, a и y_0 – некоторое ненулевое рациональное решение уравнения $x' = f(x)x$, то $x_0 y_0$ – ненулевое рациональное решение уравнения $x' + ax = f(x)x$; в случае нетривиальной разрешимости в $\mathbb{Q}$ уравнений $x' + ax = f(x)x$ и $x' = f(x)x$ все ненулевые рациональные решения уравнения $x' + ax = f(x)x$ могут быть получены таким образом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 – ненулевое рациональное решение уравнения $x' + ax = f(x)x$. Будем искать другие рациональные решения этого уравнения в виде $x = x_0 y$, $y \in \mathbb{Q}$. Получим:

$$\begin{aligned} x' + ax = f(x)x &\Leftrightarrow (x_0 y)' + a x_0 y = f(x_0 y) x_0 y \Leftrightarrow x_0' y + x_0 y' + a x_0 y = f(x_0) x_0 y + f(y) x_0 y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_0 y' = f(y) x_0 y \Leftrightarrow y' = f(y) y. \end{aligned}$$

□

Заметим, что из доказанной теоремы можно получить следующее утверждение: если уравнение $x' + ax = f(x)x$ имеет более одного ненулевого рационального решения, то уравнение $x' = f(x)x$ также разрешимо в ненулевых рациональных числах.

Например, рассмотрим уравнение $2x' + 2x = \Omega(x)x$. Одним из решений данного уравнения является натуральное число 3^6 : $2 \cdot (3^6)' + 2 \cdot 3^6 = 6 \cdot 3^6 = \Omega(3^6)3^6$. С другой стороны, натуральными решениями уравнения $2x' = \Omega(x)x$ являются числа 2^k , $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. Таким образом, множество $\{3^6 2^k \mid k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$ состоит из натуральных решений уравнения $2x' + 2x = \Omega(x)x$. Этот факт можно проверить и непосредственно: если $x = 3^6 2^k$, то $2x' + 2x = 2x(2 + \frac{k}{2}) + 2x = (6 + k)x = \Omega(x)x$.

Переходя к поиску рациональных решений уравнения $2x' + 2x = \Omega(x)x$, заметим, что непосредственная проверка чисел вида $3^6 2^k$, проведенная выше для целых неотрицательных k , может быть с успехом реализована для любых целых k , откуда немедленно следует, что множество $\{3^6 2^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ состоит из рациональных решений уравнения $2x' + 2x = \Omega(x)x$. Тот же результат можно получить, доказав интересный факт: если a и b – ненулевые рациональные (в частности, натуральные) решения уравнения $2x' = \Omega(x)x$, то число $\frac{a}{b}$ также является

ненулевым рациональным решением уравнения $2x' = \Omega(x)x$. Доказательство опирается на соотношение $\Omega(\frac{a}{b}) = \Omega(a) - \Omega(b)$: если $2a' = \Omega(a)a$, и $2b' = \Omega(b)b$, то

$$2\left(\frac{a}{b}\right)' = 2\left(\frac{a'b - ab'}{b^2}\right) = \frac{2a'b - 2b'a}{b^2} = \frac{\Omega(a)ab - \Omega(b)ab}{b^2} = (\Omega(a) - \Omega(b))\frac{a}{b} = \Omega\left(\frac{a}{b}\right)\frac{a}{b}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб А. А. Теория чисел. — Санкт-Петербург: Лань, 2024. — 384 с.
2. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: URSS, 2022. — 240 с.
3. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: URSS, 2023. — 336 с.
4. Barbeau E. J. Remarks on arithmetic derivative // Canadian Mathematical Bulletin. — 1961. — Vol. 4, No. 2. — P. 117–122.
5. Buium A. Arithmetic Analogues of Derivations // Journal of Algebra. — 1977. — Vol. 198. — P. 290–299.
6. Deza E. I. Perfect and Amicable Numbers. — Singapore: World Scientific, 2023. — 462 p.
7. Dahl N., Olsson J., Loiko A. Investigations on the properties of the arithmetic derivative // arXiv [Электронный ресурс]. — 2011. — URL: <https://arxiv.org/pdf/1108.4762> (дата обращения: 02.07.2025).
8. Haukkanen P., Merikoski J. K., Tossavainen T. The arithmetic derivative and Leibniz-additive functions // arXiv [Электронный ресурс]. — 2018. — URL: <https://arxiv.org/pdf/1803.06849> (дата обращения: 02.07.2025).
9. Kovič J. The Arithmetic Derivative and Antiderivative // Journal of Integer Sequences [Электронный ресурс]. — 2015. — Vol. 16. — URL: <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL15/Kovic/kovic4.html> (дата обращения: 02.07.2025).
10. Merikoski J. K., Haukkanen P., Tossavainen T. Complete additivity, complete multiplicativity, and Leibniz-additivity on rationals // Integers [Электронный ресурс]. — 2021. — Vol. 21. — URL: <https://math.colgate.edu/integers/v33/v33.pdf> (дата обращения: 02.07.2025).
11. Stay M. Generalized Number Derivatives // Journal of Integer Sequences [Электронный ресурс]. — 2005. — Vol. 8. — URL: <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL8/Stay/stay44.html> (дата обращения: 02.07.2025).
12. Tossavainen T., Haukkanen P., Merikoski J. K., Mattila M. We can differentiate numbers, too // The College Mathematics Journal. — 2024. — Vol. 55, No. 2. — P. 100–108.
13. Ufnarovski V., Åhlander B. How to differentiate a number // Journal of Integer Sequences [Электронный ресурс]. — 2003. — Vol. 6. — URL: <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL6/Ufnarovski/ufnarovski.html> (дата обращения: 02.07.2025).
14. Westrick L. Investigations of the Number Derivative // Internet Archive [Электронный ресурс]. — 2003. — URL: <https://web.archive.org/web/20050426071741/http://web.mit.edu/lwest/www/intmain.pdf> (дата обращения: 02.07.2025).

REFERENCES

1. Bukhshtab A.A. 2024, *Number Theory*. Saint Petersburg: Lan. 384 p.
2. Petrovsky I.G. 2022, *Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations*. Moscow: URSS. 240 p.
3. Pontryagin L.S. 2023, *Ordinary Differential Equations*. Moscow: URSS. 336 p.
4. Barbeau E.J. 1961, “Remarks on arithmetic derivative”, *Canadian Mathematical Bulletin* 4(2) pp. 117–122.
5. Buium A. 1977, “Arithmetic Analogues of Derivations”, *Journal of Algebra* 198 pp. 290–299.
6. Deza E.I. 2023, *Perfect and Amicable Numbers*. Singapore: World Scientific. 462 p.
7. Dahl N., Olsson J., Loiko A. 2011, “Investigations on the properties of the arithmetic derivative”, *arXiv* [Preprint]. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1108.4762> (Accessed: 02.07.2025)
8. Haukkanen P., Merikoski J.K., Tossavainen T. 2018, “The arithmetic derivative and Leibniz-additive functions”, *arXiv* [Preprint]. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1803.06849> (Accessed: 02.07.2025)
9. Kovič J. 2015, “The Arithmetic Derivative and Antiderivative”, *Journal of Integer Sequences* [Online] 16. Available at: <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL15/Kovic/kovic4.html> (Accessed: 02.07.2025)
10. Merikoski J.K., Haukkanen P., Tossavainen T. 2021, “Complete additivity, complete multiplicativity, and Leibniz-additivity on rationals”, *Integers* [Online] 21. Available at: <https://math.colgate.edu/integers/v33/v33.pdf> (Accessed: 02.07.2025)
11. Stay M. 2005, “Generalized Number Derivatives”, *Journal of Integer Sequences* [Online] 8. Available at: <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL8/Stay/stay44.html> (Accessed: 02.07.2025)
12. Tossavainen T., Haukkanen P., Merikoski J.K., Mattila M. 2024, “We can differentiate numbers, too”, *The College Mathematics Journal* 55(2) pp. 100–108.
13. Ufnarovski V., Åhlander B. 2003, “How to differentiate a number”, *Journal of Integer Sequences* [Online] 6. Available at: <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL6/Ufnarovski/ufnarovski.html> (Accessed: 02.07.2025)
14. Westrick L. 2003, “Investigations of the Number Derivative”, *Internet Archive* [Online]. Available at: <https://web.archive.org/web/20050426071741/http://web.mit.edu/lwest/www/intmain.pdf> (Accessed: 02.07.2025)

Получено: 05.06.2025

Принято в печать: 27.08.2025