

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-81-95

О рядах Виноградова по простым числам

А. Гияси, В. Н. Чубариков

Гияси Азар Ходабахш — кандидат физико-математических наук, Университет им. Алламе Табатаба'и (Иран).

e-mail: azarghyasi@yahoo.com

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Аннотация

В статье доказаны теоремы о сходимости тригонометрических рядов по простым числам. Мы продолжаем исследования Г. И. Архипова и К. И. Осколкова по специальным тригонометрическим рядам, основанные на методе И. М. Виноградова по оценкам тригонометрических сумм Г. Вейля с многочленом в аргументе тригонометрической функции.

В настоящей работе мы рассматриваем специальные тригонометрические ряды по простым числам трех типов в зависимости от функций в аргументе тригонометрической функции: корень квадратный, линейной и общего многочлена от одной переменной, пробегающей последовательно все простые числа. Здесь мы существенно пользуемся оценками И. М. Виноградова тригонометрических сумм по простым числам.

Отметим то обстоятельство, что возникает необходимость использовать справедливость расширенной гипотезы Римана.

Кроме того, в случае линейных многочленов в аргументе нам потребовалось некоторое улучшение оценок И. М. Виноградова, полученное Р. Воном.

Ключевые слова: ряды Виноградова по простым числам; тригонометрические суммы с простыми числами.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:

Гияси, А. Х., Чубариков, В. Н. О рядах Виноградова по простым числам // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26, вып. 3, С. 81–95.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-81-95

On Vinogradov's series over primes

A. Ghyasi, V. N. Chubarikov

Ghyasi Azar Khodabakhsh — candidate of physical and mathematical sciences, Allameh Tabataba'i University (Iran).

e-mail: azarghyasi@yahoo.com

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Abstract

In the paper theorems on the convergence trigonometrical series over primes are proven. We continue the G. I. Arkhipov's and K. I. Oskolkov's investigations on special trigonometric series, based on the I. M. Vinogradov's method on estimations of H. Weyl's trigonometric sums with polynomial in the argument of the trigonometric function.

In this paper we consider special trigonometric series over prime numbers of three types in the dependence of functions of an argument trigonometric function: the square root, the linear and the general polynomial from the one variable, running sequently all prime numbers. Here we essentially are used the I. M. Vinogradov's estimates of trigonometric sums over prime numbers.

We note the one circumstance, that appears the need touse the holding of Grand Riemann's hypotheses.

Besides, in the case of linear polynomials of arguments for us required a little improvement of I. M. Vinogradov's estimations, getting by R. C. Vaughan.

Keywords: the Vinogradov's series on primes; trigonometric sums over primes.

Bibliography: 6 titles.

For citation:

Ghyasi, A. Kh., Chubarikov, V. N. 2025, "On Vinogradov's series over primes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 81–95.

Се́мидесятипятилетию со дня рождения
профессора Николая Михайловича Добровольского
посвящается

1. Введение

Пусть n — натуральное число, $f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x$ — алгебраический многочлен степени n с действительными коэффициентами, p — простое число. Рассмотрим ряд

$$S = S_f = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i f(p)}}{p}$$

по всем целым простым числам, симметрические частные суммы $S_f(x)$ которого имеют вид

$$S(x) = S_f(x) = \sum_{|p| \leq x} \frac{e^{2\pi i f(p)}}{p} = \sum_{|n| \leq x} \frac{g(n)e^{2\pi i f(n)}}{n}, \quad x \geq 2,$$

где

$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = p, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

§1. Специальный случай ряда Виноградова.

ЛЕММА 1. Пусть k — натуральное число, $k \leq x^{0,1}$, h — положительная постоянная и

$$T = T(x; \alpha, k) = \sum_{1 < p \leq x} \sin(2\pi k h \sqrt{p}).$$

Тогда имеем

$$T \ll x^{\frac{7}{8} + \varepsilon} k^{\frac{1}{4}},$$

где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [2], теорема 6, с. 86.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x) = kh\sqrt{x}$. Тогда ряд

$$S = S_f = 2i \sum_{p \geq 2} \frac{\sin 2\pi f(p)}{p} = 2i \sum_{n > 1} \frac{g(n) \sin 2\pi f(n)}{n}$$

сходится для любого действительного числа h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$T(x) = \sum_{1 < p \leq x} \sin 2\pi k h \sqrt{p} = \sum_{1 < n \leq x} g(n) \sin(2\pi k h \sqrt{n}).$$

Далее воспользуемся критерием Коши. Преобразуем

$$|S(x+h) - S(x)| = 2 \left| \sum_{x < n \leq x+h} g(n) \frac{\sin 2\pi k h \sqrt{n}}{n} \right| = 2 \left| \int_x^{x+h} T(y) \frac{dy}{y^2} + \frac{T(x+h)}{x+h} - \frac{T(x)}{x} \right|.$$

Отсюда, используя лемму 1, при $x \rightarrow \infty$ и при любом $h > 0$ находим оценку

$$|S(x+h) - S(x)| \ll \int_x^{x+h} y^{\frac{7}{8} + \varepsilon} k^{\frac{1}{4}} \frac{dy}{y^2} \ll k^{\frac{1}{4}} x^{-1/8} \rightarrow 0.$$

Тем самым доказана сходимость ряда $\sum_p \frac{\sin(2\pi k h \sqrt{p})}{p}$. $\square$

§2. Случай линейных многочленов.

Пусть $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, для любого простого p , определяемая следующим образом

$$\begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^r, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При $x > 1$ определим функцию Чебышёва

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n), \quad \psi(x; q, l) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \pmod{q}}} \Lambda(n).$$

Здесь нам понадобится следствие *расширенной гипотезы Римана*: если гипотеза справедлива, то при $q < x$, $(l, q) = 1$, имеем

$$\psi(x; q, l) = \frac{x}{\varphi(q)} + O(\sqrt{x} \ln^2 x).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(x) = \alpha x$, где α — любое действительное число из полуинтервала $0 \leq \alpha < 1$, который обозначим Ω . Тогда при условии справедливости *расширенной гипотезы Римана* сходится ряд

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda(n) \sin(2\pi\alpha n)}{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$T_1(x) = \sum_{1 < n \leq x} \Lambda(n) \sin 2\pi\alpha n.$$

Далее воспользуемся критерием Коши. Преобразуем

$$|S_1(x+h) - S_1(x)| = 2 \left| \sum_{x < n \leq x+h} \Lambda(n) \frac{\sin(2\pi\alpha n)}{n} \right| = 2 \left| \int_x^{x+h} T_1(y) \frac{dy}{y^2} + \frac{T_1(x+h)}{x+h} - \frac{T_1(x)}{x} \right|. \quad (1)$$

По теореме Дирихле имеем, что для любого $\tau \geq 1$ и любого $\alpha \in \Omega$ найдутся целые числа a, q такие, что

$$\alpha = \frac{a}{q} + \gamma, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\gamma| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Положим $\tau = n^{0,6}$.

Для данного натурального n множество всех точек $\alpha \in \Omega$ разобьем на два класса $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ в зависимости от их приближения рациональными числами β . К первому классу $\Omega_1 = \Omega_1(n)$ отнесем те точки α , для которых

$$\alpha = \beta + \gamma, \quad (2)$$

где знаменатель q рациональной дроби β не превосходит $n^{0,4} < 0,5\tau$. Остальные точки α из Ω отнесем ко второму классу $\Omega_2 = \Omega_2(n)$.

Покажем, что для любого $\alpha \in \Omega_1(n)$ представление (2) является единственным. Будем рассуждать от противного. Предположим, что найдутся различные рациональные числа

$$\beta_1 \neq \beta_2, \beta_s = \frac{a_s}{q_s}, (a_s, q_s) = 1, s = 1, 2; 1 \leq q_1, q_2 < 0,5\tau.$$

Тогда при любом натуральном n находим

$$(q_1 q_2)^{-1} \leq |\beta_1 - \beta_2| = |(\alpha - \beta_2) - (\alpha - \beta_1)| = |\gamma_2 - \gamma_1| \leq (q_1 \tau)^{-1} + (q_2 \tau)^{-1},$$

$$q_1 + q_2 \geq \tau,$$

но $q_1, q_2 < 0,5\tau$. Получено противоречивое неравенство. Тем самым единственность представления (1) для $\alpha \in \Omega_1(n)$ доказана. $\square$

Далее зафиксируем $\alpha \in \Omega$. Возможны три ситуации:

1. Начиная с некоторого n_0 , для всех $n > n_0$ имеем, что $\alpha \in \Omega_2(n)$. Другими словами, последовательность чисел n , для которых $\alpha \in \Omega_1(n)$, будет конечной.
2. Начиная с некоторого n_1 , для всех $n > n_1$ имеем, что $\alpha \in \Omega_1(n)$.
3. Последовательность n , для которых $\alpha \in \Omega_1(n)$, является бесконечной, но найдется сколь угодно большое k такое, что точка $\alpha \in \Omega_2(k)$.

Далее нам понадобится следующая лемма, полученная Р. С. Воном [5] и уточняющая оценку И. М. Виноградова [3].

ЛЕММА 2. Пусть $x \geq 1$ — действительное число,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, |\theta| \leq 1,$$

$$T_1 = T_1(x; \alpha) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha n}.$$

Тогда

$$T_1 \ll x(\ln x)^{7/2} \Delta,$$

где

$$\Delta = q^{-1/2} + q^{1/2} x^{-1/2} + x^{-1/5}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [6], гл.V, теорема 5.12, с.74–75. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 2. Рассмотрим ситуацию 1). Имеем, что при фиксированном α для любого $n > n_0$ точка $\alpha \in \Omega_2(n)$. По лемме 2 находим $T_1(x, \alpha) \leq x^{4/5}(\ln x)^{7/2}$. Подставляя эту оценку в (1), при $0 \leq h \leq x$ находим

$$\begin{aligned} |S_1(x+h) - S_1(x)| &\ll \int_x^{x+h} y^{-6/5} (\ln y)^{7/2} dy + (x+h)^{-1/5} (\ln(x+h))^{7/2} + x^{-1/5} (\ln x)^{7/2} \ll \\ &\ll x^{-1/5} (\ln x)^{7/2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь ситуацию 2). Тогда при любом $n \rightarrow \infty$ и фиксированном $q \geq 1$ справедливо асимптотическое равенство

Пусть $\alpha \in \Omega_1(n)$, $n > n_1$,

$$\alpha = \beta + \gamma, \quad \beta = \frac{a}{q}, (a, q) = 1, q \leq n^{2/5}, |\gamma| \leq q^{-1} n^{-3/5}.$$

Тогда

$$T_1(n; \alpha) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \int_2^n \sin 2\pi i \gamma t dt + O(nL^{-4h}).$$

Действительно, разобьем все натуральные числа $m \leq n$ на арифметические прогрессии с разностью q . Получим

$$T_1(n; \alpha) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l, q)=1}}^q \sum_{\substack{m \equiv l \\ k \leq n}} \Lambda(m) \sin \left(2\pi \left(\frac{a}{q} + \gamma \right) m \right) = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q \sin\left(2\pi\frac{al}{q}\right) \sum_{\substack{m \equiv l \pmod{q} \\ m \leq n}} \Lambda(m) \cos(2\pi\gamma m), \\ \Sigma_2 &= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q \cos\left(2\pi\frac{al}{q}\right) \sum_{\substack{m \equiv l \pmod{q} \\ m \leq n}} \Lambda(m) \sin(2\pi\gamma m).\end{aligned}$$

Преобразуем Σ_1 и Σ_2 . Имеем

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q \sin\left(2\pi\frac{al}{q}\right) \sum_{k \leq n} (\psi(k; q, l) - \psi(k-1; q, l)) \cos(2\pi\gamma k) + O(q) = \\ &= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q \sin\left(2\pi i \frac{al}{q}\right) \times \\ &\times \left(\sum_{k \leq n-1} \psi(k; q, l) (\cos(2\pi\gamma k) - \cos(2\pi\gamma(k+1))) + \psi(n; q, l) \cos(2\pi\gamma n) \right) + O(q), \\ \Sigma_2 &= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q \cos\left(2\pi i \frac{al}{q}\right) \times \\ &\times \left(\sum_{k \leq n-1} \psi(k; q, l) (\sin(2\pi\gamma k) - \sin(2\pi\gamma(k+1))) + \psi(n; q, l) \sin(2\pi\gamma n) \right) + O(q).\end{aligned}$$

Далее воспользуемся теоремой Зигеля – Вальфиша.

ЛЕММА 3. (теорема Зигеля – Вальфиша). Пусть $A > 1$ — любое фиксированное действительное число, $1 \leq q \leq (\ln x)^A$. Тогда при $x \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\psi(x; q, l) = \frac{x}{\varphi(q)} + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),$$

где $c = c(A) > 0$ — неэффективная постоянная, т.е. она не может быть вычислена по заданному значению A .

Используя равенство

$$\sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q \sin\left(2\pi\frac{al}{q}\right) = \mu(q)$$

и лемму 3, находим

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q \sin\left(2\pi\frac{al}{q}\right) \times \\ &\times \left(\sum_{k \leq n-1} k (\cos(2\pi\gamma k) - \cos(2\pi\gamma(k+1))) + n \cos(2\pi\gamma n) \right) + R_1(n) = R_1(n),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_1(n) &= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q \sin\left(2\pi\frac{al}{q}\right) \left(\sum_{k \leq n-1} \left(\psi(k; q, l) - \frac{k}{\varphi(q)} \right) (\cos(2\pi\gamma k) - \cos(2\pi\gamma(k+1))) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\psi(n; q, l) - \frac{n}{\varphi(q)} \right) \cos(2\pi\gamma n) \right) + O(q) \ll \\
 &\ll \varphi(q) \sum_{k \leq n-1} k e^{-c\sqrt{\ln k}} |\sin \pi\gamma| + n e^{-c\sqrt{\ln n}} + O(1) \ll n e^{-c\sqrt{\ln n}}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{k=1}^n \sin(2\pi\gamma k) + O(n e^{-c\sqrt{\ln n}}) \ll \min\{1, |\sin \pi\gamma|^{-1}\} \ll n e^{-c\sqrt{\ln n}}.$$

Оценим сумму Σ_2 :

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2 &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q \cos\left(2\pi\frac{al}{q}\right) \times \\
 &\times \left(\sum_{k \leq n-1} k (\sin(2\pi\gamma k) - \sin(2\pi\gamma(k+1))) + n \sin(2\pi\gamma n) \right) + R_2(n) = \\
 &= \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \left(\sum_{k \leq n-1} k (\sin(2\pi\gamma k) - \sin(2\pi\gamma(k+1))) + n \sin(2\pi\gamma n) \right) + R_2(n),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_2(n) &= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q \cos\left(2\pi\frac{al}{q}\right) \left(\sum_{k \leq n-1} \left(\psi(k; q, l) - \frac{k}{\varphi(q)} \right) (\sin(2\pi\gamma k) - \sin(2\pi\gamma(k+1))) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\psi(n; q, l) - \frac{n}{\varphi(q)} \right) \sin(2\pi\gamma n) \right) + O(q) \ll \\
 &\ll \varphi(q) \sum_{k \leq n-1} k e^{-c\sqrt{\ln k}} |\sin \pi\gamma| + n e^{-c\sqrt{\ln n}} + O(1) \ll n e^{-c\sqrt{\ln n}}.
 \end{aligned}$$

Таким образом $T_1 \ll n e^{-c\sqrt{\ln n}}$.

Подставляя эту оценку в (1), при $0 \leq h \leq x$ находим

$$\begin{aligned}
 |S_1(x+h) - S_1(x)| &\ll \int_x^{x+h} y^{-1} e^{-c\sqrt{\ln y}} dy + e^{-c\sqrt{\ln(x+h)}} + e^{-c\sqrt{\ln x}} \ll \\
 &\ll e^{-c\sqrt{\ln x}} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

при $x \rightarrow \infty$.

Тем самым, исходя из критерия Коши доказана сходимость ряда.

Рассмотрим ситуацию 3). Здесь число $\alpha = \beta + \gamma$ — фиксировано, последовательность n , для которых $\alpha \in \Omega_1(n)$, является бесконечной, и найдется сколь угодно большое k такое, что точка

$\alpha \in \Omega_2(k)$. Это означает, что рассматриваемая последовательность n состоит из бесконечного числа конечных отрезков $\omega_j(\alpha)$, $j \geq 1$, натурального ряда чисел. В каждом из этих отрезков числа $\beta = \beta_j$ и $\gamma = \gamma_j$ остаются постоянными.

Пусть рациональная точка β отвечает α и некоторому n . Занумеруем точки $\beta = \beta_k \in \omega_k(\alpha)$ в порядке возрастания их знаменателей q_k , $k \geq 1$. Тогда справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4. Пусть $\alpha \in \Omega_1(n) \cup \Omega_1(m)$, $m > n$, и

$$\alpha = \frac{a_k}{q_k} + \gamma_1(n) = \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}} + \gamma_1(m).$$

Тогда имеем $q_{k+1} \geq 0,5q_k^{1,5}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ранее было доказано неравенство

$$(q_k q_{k+1})^{-1} \leq |\gamma_k - \gamma_{k+1}|.$$

Поскольку $q_k \leq n^{0,4}$, $|\gamma_k| \leq q_k^{-1} \tau(n)^{-1}$ и $q_{k+1} \leq m^{0,4}$, $|\gamma_{k+1}| \leq q_{k+1}^{-1} \tau(m)^{-1}$, и $m > n$, находим

$$(q_k q_{k+1})^{-1} \leq |\gamma_k - \gamma_{k+1}| \leq \frac{1}{q_k \tau(n)} + \frac{1}{q_{k+1} \tau(m)} \leq \frac{2}{q_k \tau(n)}.$$

Отсюда получим

$$q_{k+1} \geq 0,5\tau(n) = 0,5n^{0,6} \geq 0,5q_k^{1,5}.$$

Лемма доказана. $\square$

Далее имеем

$$T_2(n; \alpha) = W + O(R),$$

где

$$W = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{2\pi i \frac{al}{q}} \left(\sum_{2 \leq k \leq n-1} \frac{k}{\varphi(q)} \left(e^{2\pi i \gamma k} - e^{2\pi i \gamma (k+1)} \right) + \frac{n}{\varphi(q)} e^{2\pi i \gamma n} \right),$$

$$R = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q \sum_{2 \leq k \leq n-1} \left| \psi(k; q, l) - \frac{k}{\varphi(q)} \right| \left| e^{2\pi i \gamma k} - e^{2\pi i \gamma (k+1)} \right| + \left| \psi(n; q, l) - \frac{n}{\varphi(q)} \right| + q.$$

Преобразуем W :

$$W = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{2 \leq k \leq n} e^{2\pi i \gamma k} = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \int_2^n e^{2\pi i t \gamma} dt + R_1,$$

где

$$R_1 = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{2 \leq k \leq n} \int_{k-1}^k (e^{2\pi i k \gamma} - e^{2\pi i t \gamma}) dt.$$

Далее

$$e^{2\pi i k \gamma} - e^{2\pi i t \gamma} = 2\pi i \gamma \int_t^k e^{2\pi i \gamma u} du \ll \gamma(k-t) \ll (q\tau)^{-1}.$$

Следовательно,

$$R_1 \ll \frac{n^{0,4}}{q\varphi(q)}, \quad W \ll \frac{1}{\varphi(q)} Z + \frac{n^{0,4}}{q\varphi(q)},$$

где $n \geq 2$,

$$Z = \begin{cases} n, & \text{если } |\gamma| \leq n^{-1}, \\ |\gamma|^{-1}, & \text{если } n^{-1} \leq |\gamma| \leq n^{-0,6}. \end{cases}$$

Оценим теперь величину R . Для этого из справедливости расширенной гипотезы Римана получим

$$\begin{aligned} R &\ll |\gamma| \sum_{l=1}^q \sum_{\substack{2 \leq k \leq n-1 \\ (l,q)=1}} \left| \psi(k; q, l) - \frac{k}{\varphi(q)} \right| + \left| \psi(n; q, l) - \frac{n}{\varphi(q)} \right| + 1 \ll \\ &\ll |\gamma| \sum_{l=1}^q \sum_{\substack{2 \leq k \leq n-1 \\ (l,q)=1}} \sqrt{k} \ln^2 k + \sqrt{n} \ln^2 n + 1 \ll \varphi(q) |\gamma| n^{1,5} \ln^2 n + \sqrt{n} \ln^2 n \ll \\ &\ll n^{0,9} \ln^2 n. \end{aligned}$$

Как и раньше, по критерию Коши из полученных оценок следует сходимость рассматриваемого ряда. Теорема 2 доказана.

§3. Многочлен общего вида от одной переменной.

Пусть $N > 1, r \geq 2$, — натуральные числа, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ — точка с вещественными координатами, $f(x) = f_{\bar{\alpha}}(x) = \alpha_r x^r + \dots + \alpha_1 x$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Координаты точки $\bar{\alpha}$ по теореме Дирихле при $\tau_s = \tau_s(N) = N^{s-0,1\nu} \geq 1, 1 \leq s \leq r, r\nu = 1$, представим в виде

$$\alpha_s = \frac{a_s}{q_s} + z_s, (a_s, q_s) = 1, 1 \leq q_s \leq \tau_s, |z_s| \leq \frac{1}{q_s \tau_s}.$$

Пусть Q обозначает наименьшее общее кратное чисел $q_1, \dots, q_r$, представим z_s в виде $z_s = \delta_s N^s$, и примем обозначение $\delta_0 = \max\{|\delta_1|, \dots, |\delta_r|\}$.

Пусть Ω — единичный r -мерный куб, точки которого $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ с вещественными координатами $0 \leq \alpha_s < 1$ разобьем на два класса Ω_1 и Ω_2 . Точку $\bar{\alpha} \in \Omega_1$ при фиксированном $N > 1$ назовем точкой первого класса, если при $\nu = 1/r$ имеем

$$Q \leq N^{0,1\nu}. \quad (3)$$

Остальные точки $\bar{\alpha} \in \Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ назовем точками второго класса.

Пусть p пробегает последовательно все простые числа, и пусть $\Lambda(n)$ обозначает известную функцию Мангольда

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^m, \\ 0, & \text{если } n \neq p^m. \end{cases}$$

Рассмотрим ряд И.М.Виноградова вида

$$H = H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Lambda(n) e^{2\pi i f(n)}}{n}$$

и его симметричную частичную сумму

$$H_N = H_N(f) = H_N(f; \bar{\alpha}) = \sum_{|n| \leq N} \frac{\Lambda(n) e^{2\pi i f(n)}}{n} = 2i \sum_{2 \leq n \leq N} \frac{\Lambda(n) e^{2\pi i f^+(n)} \sin 2\pi f^-(n)}{n},$$

где

$$f(x) = f(x; \frac{\bar{a}}{q} + \bar{z}) = f^+(x) + f^-(x),$$

$$f^+(-x) = f^+(x), f^-(-x) = -f^-(x), f^\pm(x) = f^\pm(x; \frac{\bar{a}}{q} + \bar{z}).$$

ЛЕММА 5. Пусть точка $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ из второго класса $\Omega_2(N)$. Тогда при $N \rightarrow \infty$ имеем

$$H_N(\alpha) \ll N^{-\rho}, \quad \rho = \frac{\gamma}{r^2 \ln r},$$

где $\gamma > 0$ — некоторая постоянная.

Пусть теперь точка $\bar{\alpha} \in \Omega_1(N)$. Тогда

$$H_N(\alpha) \ll (\ln N)^{\frac{\ln \ln N}{\ln(1+\varepsilon_2)}} Q^{-0,5\nu+\varepsilon_1},$$

где $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ — сколь угодно малые постоянные.

Доказательство леммы является простым следствием теоремы И.М.Виноградова (см. [3], теорема 1, с. 122). $\square$

ТЕОРЕМА 3. Пусть справедлива расширенная гипотеза Римана. Тогда при $N \rightarrow \infty$ существует конечный предел последовательности $H_N(f)$.

Доказательство. Покажем, что для любого фиксированного $\bar{\alpha} \in \Omega_1(N)$ представление (3) является единственным.

Будем рассуждать от противного. Предположим, что найдутся два различных набора

$$\bar{\beta}_1 \neq \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_t = \frac{\bar{a}^{(t)}}{\bar{q}^{(t)}}, t = 1, 2,$$

и пусть $Q_1 = Q(\bar{\beta}_1)$ и $Q_2 = Q(\bar{\beta}_2)$, отвечающие этим наборам, наименьшие общие кратные знаменателей их рациональных координат.

Так как $\bar{\beta}_1 \neq \bar{\beta}_2$, то найдется такое $s, 1 \leq s \leq r$, что

$$(a_s^{(t)}, q_s^{(t)}) = 1, t = 1, 2; 1 \leq q_s^{(1)} \leq Q_1 < 0,5\tau, 1 \leq q_s^{(2)} \leq Q_2 < 0,5\tau.$$

Тогда находим

$$(q_1 q_2)^{-1} \leq |\beta_1 - \beta_2| = |(\alpha - \beta_2) - (\alpha - \beta_1)| = |\gamma_2 - \gamma_1| \leq (q_1 \tau)^{-1} + (q_2 \tau)^{-1},$$

$$q_1 + q_2 \geq \tau,$$

но $q_1, q_2 < 0,5\tau$. Получено противоречивое неравенство. Тем самым единственность представления (1) для $\alpha \in \Omega_1(n)$ доказана. $\square$

Далее, как и ранее, зафиксируем $\bar{\alpha} \in \Omega$. Возможны три случая:

1. Начиная с некоторого n_0 , для всех $n > n_0$ имеем, что $\bar{\alpha} \in \Omega_2(n)$. Другими словами, последовательность чисел n , для которых $\bar{\alpha} \in \Omega_1(n)$, будет конечной.
2. Начиная с некоторого n_1 , для всех $n > n_1$ имеем, что $\bar{\alpha} \in \Omega_1(n)$.
3. Последовательность n , для которых $\bar{\alpha} \in \Omega_1(n)$, является бесконечной, но найдется сколь угодно большое k такое, что точка $\bar{\alpha} \in \Omega_2(k)$.

Обозначим символом $T(x)$ сумму

$$T(x) = \sum_{1 < n \leq x} \Lambda(n) e^{2\pi i f^+(n)} \sin(2\pi f^-(n)).$$

Применим критерий Коши для доказательства сходимости ряда H . Для этого при

$$A \leq A' < A'' \leq 2A' \leq B$$

оценим сверху модуль суммы

$$\Delta(A', A'') = \sum_{A' < n \leq A''} \frac{\Lambda(n) e^{2\pi i f^+(n)} \sin 2\pi f^-(n)}{n} = \sum_{0 \leq k \leq [\ln B]} \Delta(Ae^k, Ae^{k+1}) + \Delta([Ae^{\ln B}], B).$$

Воспользовавшись преобразованием Абеля в интегральной форме, найдем

$$\Delta(A', A'') = \frac{T(A'')}{A''} + \int_{A'}^{A''} \frac{T(x)}{x^2} dx.$$

Следовательно,

$$|\Delta(A', A'')| \leq \frac{2}{A'} \max_{A' < x \leq A''} |T(x)| = \frac{T(C)}{A'}, \quad A' \leq C \leq A''.$$

Перейдем к рассмотрению случаев 1)-3). По лемме 5 в случае 1) имеем

$$\Delta(A', A'') \ll A'^{-\rho}.$$

Отсюда при $N \rightarrow \infty$ следует сходимость $H_N(\bar{\alpha})$ в случае 1).

В случае 2) при $n > n_1$ рациональное число β будет одно и то же для всех $n > n_1$. Сначала преобразуем сумму $T(C)$. Для этого представим n в виде

$$n = Qt + s, \quad (Q, s) = 1, \quad 0 \leq s < Q, \quad \frac{A' - s}{Q} \leq t \leq \frac{C - s}{Q}.$$

Находим

$$\begin{aligned} T(C) &= \sum_{A' \leq n \leq C} \Lambda(n) e^{2\pi i f^+(n)} \sin 2\pi f^-(n) = \\ &= \sum_{\substack{s=0 \\ (s,Q)=1}}^{Q-1} \sum_{\substack{n \equiv s \pmod{Q} \\ A' < n \leq C}} \Lambda(n) e^{2\pi i f^+(n; \frac{\bar{a}}{Q} + \bar{z})} \sin 2\pi f^-(n; \frac{\bar{a}}{Q} + \bar{z}) = \\ &= \sum_{\substack{s=0 \\ (s,Q)=1}}^{Q-1} e^{2\pi i f^+(s; \frac{\bar{a}}{Q})} \sin \left(2\pi f^-(s; \frac{\bar{a}}{Q}) \right) \sum_{\substack{n \equiv s \pmod{Q} \\ A' < n \leq C}} \Lambda(n) e^{2\pi i f^+(n; \bar{z})} \cos (2\pi f^-(n; \bar{z})) + \\ &+ \sum_{\substack{s=0 \\ (s,Q)=1}}^{Q-1} e^{2\pi i f^+(s; \frac{\bar{a}}{Q})} \cos \left(2\pi f^-(s; \frac{\bar{a}}{Q}) \right) \sum_{\substack{n \equiv s \pmod{Q} \\ A' < n \leq C}} \Lambda(n) e^{2\pi i f^+(n; \bar{z})} \sin (2\pi f^-(n; \bar{z})) = \\ &= \sum_{\substack{s=0 \\ (s,Q)=1}}^{Q-1} e^{2\pi i f^+(s; \frac{\bar{a}}{Q})} \sin \left(2\pi f^-(s; \frac{\bar{a}}{Q}) \right) \sum_{A' < n \leq C} e^{2\pi i f^+(n; \bar{z})} \cos (2\pi f^-(n; \bar{z})). \\ &\cdot (\psi(n, Q, s) - \psi(n-1, Q, s)) + \sum_{\substack{s=0 \\ (s,Q)=1}}^{Q-1} e^{2\pi i f^+(s; \frac{\bar{a}}{Q})} \cos \left(2\pi f^-(s; \frac{\bar{a}}{Q}) \right) \sum_{A' < n \leq C} e^{2\pi i f^+(n; \bar{z})} \\ &\cdot \sin (2\pi f^-(n; \bar{z})) (\psi(n, Q, s) - \psi(n-1, Q, s)) + O(Q) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{s=0 \\ (s,Q)=1}}^{Q-1} e^{2\pi i f^+(s; \frac{\bar{a}}{q})} \sin \left(2\pi f^-(s; \frac{\bar{a}}{q}) \right) \times \\
&\times \sum_{A' < n \leq C} \psi(n; Q, s) \left(e^{2\pi i f^+(n; \bar{z})} \cos(2\pi f^-(n; \bar{z})) - e^{2\pi i f^+(n+1; \bar{z})} \cos(2\pi f^-(n+1; \bar{z})) \right) + \\
&\quad + \psi(C, Q, s) e^{2\pi i f^+(C; \bar{z})} \cos(2\pi f^-(C; \bar{z})) + \\
&\quad + \sum_{\substack{s=0 \\ (s,Q)=1}}^{Q-1} e^{2\pi i f^+(s; \frac{\bar{a}}{q})} \cos \left(2\pi f^-(s; \frac{\bar{a}}{q}) \right) \times \\
&\times \sum_{A' < n \leq C} \psi(k; Q, s) \left(e^{2\pi i f^+(n; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(n; \bar{z})) - e^{2\pi i f^+(n+1; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(n+1; \bar{z})) \right) + \\
&\quad + \psi(C, Q, s) e^{2\pi i f^+(C; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(C; \bar{z})) + O(Q) = \\
&= A(Q)D(C) + B(Q)E(C) + R + O(Q),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A(Q) &= \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{\substack{s=0 \\ (s,Q)=1}}^{Q-1} e^{2\pi i f^+(s; \frac{\bar{a}}{q})} \sin \left(2\pi f^-(s; \frac{\bar{a}}{q}) \right), \\
D(C) &= \sum_{A' < k \leq C-1} k \left(e^{2\pi i f^+(k; \bar{z})} \cos(2\pi f^-(k; \bar{z})) - e^{2\pi i f^+(k+1; \bar{z})} \cos(2\pi f^-(k+1; \bar{z})) \right) + \\
&\quad + C e^{2\pi i f^+(C; \bar{z})} \cos(2\pi f^-(C; \bar{z})), \\
B(Q) &= \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{\substack{s=0 \\ (s,Q)=1}}^{Q-1} e^{2\pi i f^+(s; \frac{\bar{a}}{q})} \cos \left(2\pi f^-(s; \frac{\bar{a}}{q}) \right), \\
E(C) &= \sum_{A' < k \leq C} k \left(e^{2\pi i f^+(k; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(k; \bar{z})) - e^{2\pi i f^+(k+1; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(k+1; \bar{z})) \right) + \\
&\quad + C e^{2\pi i f^+(C; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(C; \bar{z})), \\
R &= \sum_{\substack{s=0 \\ (s,Q)=1}}^{Q-1} e^{2\pi i f^+(s; \frac{\bar{a}}{q})} \sin \left(2\pi f^-(s; \frac{\bar{a}}{q}) \right) \times \\
&\times \sum_{A' < k \leq C-1} \left(\psi(k; Q, s) - \frac{k}{\varphi(Q)} \right) \left(e^{2\pi i f^+(k; \bar{z})} \cos(2\pi f^-(k; \bar{z})) - \right. \\
&\quad \left. - e^{2\pi i f^+(k+1; \bar{z})} \cos(2\pi f^-(k+1; \bar{z})) \right) + \\
&\quad + \left(\psi(C; Q, s) - \frac{1}{\varphi(Q)} \right) e^{2\pi i f^+(C; \bar{z})} \cos(2\pi f^-(C; \bar{z})) + \\
&\quad + \sum_{\substack{s=0 \\ (s,Q)=1}}^{Q-1} e^{2\pi i f^+(s; \frac{\bar{a}}{q})} \cos \left(2\pi f^-(s; \frac{\bar{a}}{q}) \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times \sum_{A' < k \leq C} \left(\psi(k; Q, s) - \frac{k}{\varphi(Q)} \right) & \left(e^{2\pi i f^+(k; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(k; \bar{z})) - e^{2\pi i f^+(k+1; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(k+1; \bar{z})) \right) + \\ & + \left(\psi(C; Q, s) - \frac{1}{\varphi(Q)} \right) e^{2\pi i f^+(C; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(C; \bar{z})) + O(Q), \end{aligned}$$

Преобразуем суммы $A(Q), B(Q), E(C)$. Имеем

$$\begin{aligned} A(Q) &= \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{\substack{s=0 \\ (s, Q)=1}}^{Q-1} e^{2\pi i f^+(s; \frac{\bar{a}}{Q})} \frac{e^{2\pi i f^-(s; \frac{\bar{a}}{Q})} - e^{-2\pi i f^-(s; \frac{\bar{a}}{Q})}}{2i} = 0, \\ B(Q) &= \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{\substack{s=0 \\ (s, Q)=1}}^{Q-1} e^{2\pi i f^+(s; \frac{\bar{a}}{Q})} \frac{e^{2\pi i f^-(s; \frac{\bar{a}}{Q})} + e^{-2\pi i f^-(s; \frac{\bar{a}}{Q})}}{2} = \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{\substack{s=0 \\ (s, Q)=1}}^{Q-1} e^{2\pi i f(s; \frac{\bar{a}}{Q})}, \\ E(C) &= \sum_{A' < k \leq C} k \left(e^{2\pi i f^+(k; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(k; \bar{z})) - e^{2\pi i f^+(k+1; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(k+1; \bar{z})) \right) + \\ & + e^{2\pi i f^+(C; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(C; \bar{z})). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} B(Q)E(C) &= \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{\substack{s=0 \\ (s, Q)=1}}^{Q-1} e^{2\pi i f(s; \frac{\bar{a}}{Q})} \sum_{A' < k \leq C} e^{2\pi i f^+(k; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(k; \bar{z})) \ll \\ & \ll A' |\delta_0|^{-1/r} \ll (A')^{1-0,1\nu^2}. \end{aligned}$$

Предполагая справедливость расширенной гипотезы Римана, оценим $|R|$. Имеем

$$|R| \ll \sum_{A' < k \leq C} k^{0,5} \ll (A')^{1,5}.$$

Таким образом доказана сходимость ряда H в случае 2).

Рассмотрим случай 3). Здесь набор $\bar{\beta}_s, s \geq 1$ различных точек с рациональными координатами, соответствующих возрастающей последовательности N , для которых точка α принадлежит первому классу, будет бесконечной. Это множество N представляет собой бесконечную совокупность непересекающихся отрезков $\omega_j, j \geq 1$, в каждом из которых точка $\bar{\beta}$ остается фиксированной, и, следовательно, Q_j будет постоянной величиной.

Г.И. Архипов и К.И. Осолков доказали замечательную лемму о том, что последовательность Q_j весьма быстро возрастает.

ЛЕММА 6. Пусть точка $\bar{\alpha}$ принадлежит первому классу. Тогда при $j \geq 1$ имеем $Q_{j+1} \geq 0,5 Q_j^{10r-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \in \omega_j$ и $m \in \omega_{j+1}$, и пусть $\bar{\beta}^{(j)}$ и $\bar{\beta}^{(j+1)}$ — соответствующие им точки с рациональными координатами, причем $\bar{\beta}^{(j)} \neq \bar{\beta}^{(j+1)}$. Тогда найдется координата с номером $s, 1 \leq s \leq r$, такая, что

$$\frac{1}{Q_j Q_{j+1}} \leq \frac{1}{q_s^{(j)} q_s^{(j+1)}} \leq |\beta_s^{(j+1)} - \beta_s^{(j)}| = |\gamma_s^{(j+1)} - \gamma_s^{(j)}|.$$

При $m > n$ из определения точек первого класса имеем

$$Q_j \leq n^{0,1\nu}, Q_{j+1} \leq m^{0,1\nu}, |\gamma_s^{(j)}| \leq n^{0,1\nu-s}, |\gamma_s^{(j+1)}| \leq m^{0,1\nu-s}.$$

Следовательно,

$$Q_j Q_{j+1} \geq 0, 5n^{1-0,1\nu} \geq 0, 5Q_j^{10r(1-0,1\nu)} = 0, 5Q_j^{10r-1}, Q_{j+1} \geq 0, 5Q_j^{10r-2}$$

Лемма доказана. $\square$

Далее, положив в доказательстве случая 2) величину $Q = Q_j$, получим

$$T(C) = B(Q_j)E(C) + R + O(Q_j),$$

где

$$\begin{aligned} B(Q_j) &= \frac{1}{\varphi(Q_j)} \sum_{\substack{s=0 \\ (s, Q_j)=1}}^{Q_j-1} e^{2\pi i f(s; \frac{\bar{a}}{q})}, \\ E(C) &= \sum_{A' < k \leq C} k \left(e^{2\pi i f^+(k; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(k; \bar{z})) - e^{2\pi i f^+(k+1; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(k+1; \bar{z})) \right) + \\ &\quad + e^{2\pi i f^+(C; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(C; \bar{z})). \\ R &= \sum_{\substack{s=0 \\ (s, Q_j)=1}}^{Q_j-1} e^{2\pi i f^+(s; \frac{\bar{a}}{q})} \sin\left(2\pi f^-\left(s; \frac{\bar{a}}{q}\right)\right) \times \\ &\quad \times \sum_{A' < k \leq C-1} \left(\psi(k; Q_j, s) - \frac{k}{\varphi(Q_j)} \right) \left(e^{2\pi i f^+(k; \bar{z})} \cos(2\pi f^-(k; \bar{z})) - \right. \\ &\quad \left. - e^{2\pi i f^+(k+1; \bar{z})} \cos(2\pi f^-(k+1; \bar{z})) \right) + \\ &\quad + \left(\psi(C; Q_j, s) - \frac{1}{\varphi(Q_j)} \right) e^{2\pi i f^+(C; \bar{z})} \cos(2\pi f^-(C; \bar{z})) + \\ &\quad + \sum_{\substack{s=0 \\ (s, Q_j)=1}}^{Q_j-1} e^{2\pi i f^+(s; \frac{\bar{a}}{q})} \cos\left(2\pi f^-\left(s; \frac{\bar{a}}{q}\right)\right) \times \\ &\quad \times \sum_{A' < k \leq C} \left(\psi(k; Q_j, s) - \frac{k}{\varphi(Q_j)} \right) \left(e^{2\pi i f^+(k; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(k; \bar{z})) - \right. \\ &\quad \left. - e^{2\pi i f^+(k+1; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(k+1; \bar{z})) \right) + \\ &\quad + \left(\psi(C; Q_j, s) - \frac{1}{\varphi(Q_j)} \right) e^{2\pi i f^+(C; \bar{z})} \sin(2\pi f^-(C; \bar{z})) + O(Q_j) \ll (A')^{0,5} |\delta_0| + Q_j. \end{aligned}$$

Используя оценки рациональной тригонометрической суммы, тригонометрического интеграла, и, полагая справедливой расширенную гипотезу Римана, при $\omega_j = [A', A'']$, $Q_j \ll (A')^{0,1\nu}$ находим

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \omega_j} \frac{T(C)}{A'} &\ll \frac{1}{A'} |B(Q_j)E(C) + R + O(Q_j)|. \\ &\ll Q_j^{-\nu+\varepsilon} \sum_{n \in \omega_j} (|\delta_0|^{-\nu} + n^{0,5} |\delta_0|) + Q_j \ll (A')^{0,5} |\delta_0| + Q_j. \end{aligned}$$

Отсюда следует сходимость исследуемого ряда.

2. Заключение

Представляет интерес исследование сходимости подобных рядов для функций многих переменных. Ввиду того, что для условной и абсолютной сходимости рядов в этом случае имеются особенности по сравнению с рядами от одной переменной здесь возникают дополнительные условия на рассматриваемые ряды.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. The fractional part of $n^k\theta$ // Acta math.- 1914.- **37**.
2. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм // М.: «Наука».- 1976.- 124 с.
3. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное // М.: «Наука».- 1980.- 144 с.
4. Архипов Г. И., Осолков К. И. Об одном специальном тригонометрическом ряде и его применениях // Матем. сб.- 1987.- **134 (176)**.- pp. 147–157.
5. Vaughan R. C. Sommes trigonométriques sur les nombres premiers // C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A.- 1977.- **285**.- pp. 981–983.
6. Pan Chengdong, Pan Chengbiao. Goldbach Conjecture // Science Press.- Beijing.- China.- 1992.- Ch.5.- theorem 5.12.- pp. 73–75.

REFERENCES

1. Hardy G.H., Littlewood J.E. 1914, “The fractional part of $n^k\theta$ ”, *Acta Mathematica* 37 pp. 155–191.
2. Vinogradov I.M. 1976, *Special variants of the method of trigonometric sums*. Moscow: Nauka. 124 p.
3. Vinogradov I.M. 1980, *The method of trigonometric sums in number theory*. 2nd ed. Moscow: Nauka. 144 p.
4. Arkhipov G.I., Oskolkov K.I. 1987, “On a special trigonometric series and its applications”, *Matematicheskii Sbornik* 134(176) pp. 147–157.
5. Vaughan R.C. 1977, “Sommes trigonométriques sur les nombres premiers”, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série A* 285 pp. 981–983.
6. Pan Chengdong, Pan Chengbiao. 1992, *Goldbach Conjecture*. Beijing: Science Press. Chapter 5, theorem 5.12, pp. 73–75.

Получено: 14.06.2025

Принято в печать: 27.08.2025