

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 3.

УДК 512.558

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-71-80

О полумодулях над тривиальным полукольцом¹

Е. М. Вечтомов, А. А. Петров

Вечтомов Евгений Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Вятский государственный университет (г. Киров).

e-mail: vecht@mail.ru

Петров Андрей Александрович — кандидат физико-математических наук, Вятский государственный университет (г. Киров).

e-mail: andreipetrow@mail.ru

Аннотация

Изучаются полумодули над одноэлементным полукольцом $\{e\}$, которое мы называем тривиальным полукольцом. Под полумодулем над тривиальным полукольцом понимается коммутативная полугруппа $\langle A, + \rangle$ вместе с отображением $e : A \rightarrow A$, $a \rightarrow ea$, которое: аддитивно, то есть $e(a+b) = ea + eb$ для любых $a, b \in A$; идемпотентно, то есть $e(ea) = ea$ для всех $a \in A$; $ea + ea = ea$ для любого $a \in A$. При этом отображение $e : A \rightarrow A$, или действие e на A , называется ретракцией коммутативной полугруппы $\langle A, + \rangle$. Для ретракции e на A множество eA будет множеством всех неподвижных точек отображения e , называемым e -множеством. Коммутативная полугруппа $\langle A, + \rangle$ может иметь самые разные ретракции и, соответственно, различные e -множества. Кроме того, одно и то же множество на полурешетке A может служить e -множеством самых разных ретракций e на A .

На ряде примеров показано, что целесообразно исследовать ретракции на полурешетках $\langle A, + \rangle$, которые будем называть e -полумодулями.

Дана некоторая классификация ретракций. Описано строение ретракций цепей. Доказано, что все непустые подмножества произвольной цепи являются e -множествами тогда и только тогда, когда эта цепь дискретная. Рассмотрены возрастающие, убывающие и линейные ретракции на полурешетках и решетках. Показано, что возрастающие ретракции e и убывающие ретракции e однозначно определяются своими e -множествами.

Получены также другие результаты, приведены соответствующие примеры.

Ключевые слова: полукольцо, полумодуль, ретракция, тривиальное полукольцо, полурешетка, e -полумодуль, e -множество, решетка, цепь.

Библиография: 3 названия.

Для цитирования:

Вечтомов, Е. М., Петров, А. А. О полумодулях над тривиальным полукольцом // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 3, с. 71–80.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 24-21-00117).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 3.

UDC 512.558

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-71-80

About semimodules over the trivial semiring

Е. М. Vechtomov, А. А. Petrov

Vechtomov Evgenii Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Vyatka State University (Kirov).

e-mail: vecht@mail.ru

Petrov Andrey Aleksandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Vyatka State University (Kirov).

e-mail: andreipetro@mail.ru

Abstract

The article studies semimodules over a single-element semiring $\{e\}$, which we call a trivial semiring. By a semimodule over a trivial semiring we mean a commutative semigroup $\langle A, + \rangle$ considered together with the mapping $e : A \rightarrow A, a \rightarrow ea$ which is additive, i. e. $e(a+b) = ea+eb$ for any $a, b \in A$; and idempotent, i. e. $e(ea) = ea$ for all $a \in A$; $ea + ea = ea$ for any $a \in A$. In this case, the mapping $e : A \rightarrow A$, or the action of e onto A , is called a retraction of the commutative semigroup $\langle A, + \rangle$. For the retraction of e onto A , the set eA will be the set of all fixed points of the mapping e , called the e -set. A commutative semigroup $\langle A, + \rangle$ can have very different retractions and, accordingly, different e -sets. Moreover, the same set on a semilattice A can serve as an e -set of different retractions of e onto A .

The article shows, using a number of examples, that it is advisable to study retractions on semilattices $\langle A, + \rangle$, which we call e -semimodules.

The paper provides some classification of retractions, describes the structure of chain retractions. It is proved that all non-empty subsets of an arbitrary chain are e -sets if and only if this chain is discrete. We considered increasing, decreasing and linear retractions on semilattices and lattices. It is shown that increasing retractions e and decreasing retractions e are uniquely determined by their e -sets.

We also obtained other results, and gave corresponding examples in the paper.

Keywords: semiring, semimodule, retraction, trivial semiring, semilattice, e -semimodule, e -set, lattice, chane.

Bibliography: 4 titles.

For citation:

Vechtomov, E. M., Petrov, A. A. 2025, "About semimodules over the trivial semiring", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 71–80.

1. Введение. Основные понятия

В статье исследуются полумодули над тривиальным (одноэлементным) полукольцом, их свойства и строение. Обосновывается целесообразность рассмотрения полумодулей A над тривиальным полукольцом, аддитивные редукты $\langle A, + \rangle$ которых являются полурешетками. Дана некоторая классификация таких полумодулей. Даже в случае цепей A получены новые результаты. Заметим, что некоторые результаты статьи анонсированы в докладе авторов «О

полумодулях над идемпотентными моно-полукольцами» на XXIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 80-летию профессора Александра Ивановича Галочкина и 75-летию профессора Владимира Григорьевича Чирского, состоявшейся в Туле 29–31 октября 2024 года.

Полукольцом называется алгебраическая структура $S \equiv \langle S, +, \cdot \rangle$ с коммутативно-ассоциативной операцией сложения $+$ и ассоциативной операцией умножения $\cdot$, дистрибутивной относительно сложения с обеих сторон. Другими словами, $\langle S, + \rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot \rangle$ — полугруппа и имеют место тождества дистрибутивности $x(y + z) = xy + xz$, $(x + y)z = xz + yz$.

Заметим, что класс полукольцев весьма широк, он содержит все ассоциативные кольца, все дистрибутивные решетки, основные числовые системы.

Необходимые понятия и факты можно найти в книгах [2, 3]. Тем не менее, мы приводим определения используемых нами базовых понятий.

Упорядоченным множеством называется пара $\langle A, \leq \rangle$, где A — непустое множество с заданным на нем бинарным отношением порядка, которое рефлексивно $x \leq x$, транзитивно $x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$ и антисимметрично $x \leq y \leq x \Rightarrow x = y$. Для элементов $a \leq b$ упорядоченного множества $\langle A, \leq \rangle$ множество $[a, b] = \{x \in A : a \leq x \leq b\}$ называется *интервалом* с концами a и b . Подмножество B упорядоченного множества $\langle A, \leq \rangle$ называется *выпуклым*, если $[a, b] \subseteq B$ для любых элементов $a \leq b$ из B . Отображение f упорядоченного множества $\langle A, \leq \rangle$ в упорядоченное множество $\langle C, \leq \rangle$ называется *изотонным*, если оно сохраняет порядок, то есть $a \leq b$ в A влечет $f(a) \leq f(b)$ в C .

Полурешеткой называется идемпотентная коммутативная полугруппа. При аддитивной записи полурешетка есть алгебраическая структура $\langle A, + \rangle$ с одной бинарной операцией сложения $+$, которая удовлетворяет трем тождествам: ассоциативности $(x + y) + z = x + (y + z)$, коммутативности $x + y = y + x$, идемпотентности $x + x = x$. Если на полурешетке $\langle A, + \rangle$ задать бинарное отношение $\leq$ по правилу: $x \leq y$ означает $x + y = y$, то получим упорядоченное множество $\langle A, \leq \rangle$, любые два элемента a, b которого имеют точную верхнюю грань $\sup\{a, b\}$; такое упорядоченное множество называется *верхней полурешеткой*. Если же на верхней полурешетке $\langle A, \leq \rangle$ задать операцию сложения формулой: $a + b = \sup\{a, b\}$ для любых $a, b \in A$, то получаем полурешетку $\langle A, + \rangle$. Понятия полурешетки и верхней полурешетки равносильны. Двойственным образом определяется *нижняя полурешетка* — как упорядоченное множество $\langle A, \leq \rangle$, любые два элемента a, b которого имеют точную нижнюю грань $\inf\{a, b\}$. Полагая при этом $ab = a \cdot b = \inf\{a, b\}$ для всех $a, b \in A$, получаем полурешетку $\langle A, \cdot \rangle$ в мультипликативной записи. Мы будем пользоваться аддитивными обозначениями $\langle A, + \rangle$, называя ее и соответствующую верхнюю полурешетку $\langle A, \leq \rangle$ полурешетками.

Решеткой называется алгебраическая структура $\langle A, +, \cdot \rangle$ с двумя идемпотентными коммутативно-ассоциативными бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, связанными тождествами поглощения $x(x + y) = x$ и $x + xy = x$. При порядковом подходе под *решеткой* понимается упорядоченное множество $\langle A, \leq \rangle$, являющееся одновременно верхней полурешеткой и нижней полурешеткой. Приведенные определения решеток эквивалентны. Решетка с тождеством $x(y + z) = xy + xz$, равносильно, с двойственным тождеством $x + yz = (x + y)(x + z)$, называется *дистрибутивной*.

Если полурешетка A имеет наименьший элемент (наибольший элемент), то он называется *нулем (единицей)* и обозначается 0 (1 , соответственно). В полурешетках элементы 0 и 1 определяются тождествами $0 + x = x$ и $1 + x = 1$. В решетках к этим тождествам можно добавить соответственно тождества $0 \cdot x = 0$ и $1 \cdot x = x$.

Полукольцо S называется:

коммутативным, если операция умножения в S коммутативна;

полукольцом с нулем 0 , если $\forall s \in S (s + 0 = s \ \& \ s \cdot 0 = 0 \cdot s = 0)$;

полукольцом с единицей 1, если $\forall s \in S \ s \cdot 1 = 1 \cdot s = s$;
 мультипликативно (аддитивно) идемпотентным, если S удовлетворяет тождеству $xx = x$ ($x + x = x$, соответственно);
 идемпотентным, если S мультипликативно идемпотентно и аддитивно идемпотентно;
 моно-полукольцом, если в S выполняется тождество $xy = x + y$, то есть операции сложения и умножения полукольца S совпадают.

Полумодулем над полукольцом S , или просто S -полумодулем, называется коммутативная полугруппа $\langle A, + \rangle$ вместе с отображением $S \times A \rightarrow A$, $(s, a) \rightarrow sa$, обладающим следующими свойствами (для любых $s, t \in S$ и $a, b \in A$):

- (1) $(s + t)a = sa + ta$;
- (2) $s(a + b) = sa + sb$;
- (3) $(st)a = s(ta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Мы дали определение S -полумодуля A в широком смысле слова, не предполагая наличия нуля 0 и единицы 1 в полукольце S и существования нуля 0 в коммутативной полугруппе A , но даже если таковые в S и A имеются, то для S -полумодуля A не требуется выполнение следующих условий ($\forall s \in S, \forall a \in A$):

- (4) $1a = a$ (унитарность),
- (5) $0a = 0$,
- (6) $s0 = 0$.

Если S — полукольцо с 0 и 1 и A — коммутативная полугруппа с 0, то S -полумодуль A назовем S -полумодулем в узком смысле, если он дополнительно удовлетворяет условиям (4)–(6).

Отображение $f : A \rightarrow B$ S -полумодуля A в S -полумодуль B называется S -гомоморфизмом, если $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и $f(sx) = sf(x)$ для любых $x, y \in A$ и $s \in S$. Если S -гомоморфизм S -полумодулей является взаимно однозначным отображением, то он называется S -изоморфизмом. S -изоморфные полумодули обладают одними и теми же абстрактными свойствами.

Пусть e — центральный мультипликативный идемпотент полукольца S , то есть $ee = e$ и $es = se$ для всех $s \in S$. На любом S -полумодуле A элемент e действует как идемпотентный S -гомоморфизм $e : A \rightarrow A$ по правилу: $e(x) = ex$ для всех $x \in A$. Такой S -гомоморфизм e назовем *ретракцией* S -полумодуля A ; его образ $e(A)$ будет подполумодулем S -полумодуля A , состоящим в точности из неподвижных элементов x , $x \in A$, отображения e ($ex = x$). В ряде случаев подполумодуль $e(A)$ однозначно определяет сам S -полумодуль A . В частности это происходит тогда, когда $S = \{e\}$ — одноэлементное полукольцо, $\langle A, \leq \rangle$ — полурешетка, $\forall x \in A \ ex \leq x$ или $\forall x \in A \ x \leq ex$.

2. Общий подход

Далее $\{e\}$ — одноэлементное полукольцо, которое можно назвать *тривиальным полукольцом*; в нем $e + e = e = ee$.

Для полумодуля A над тривиальным полукольцом множество $eA = \{ex : x \in A\}$ назовем *e -множеством*. Поскольку коммутативная полугруппа $\langle A, + \rangle$ может допускать различные структуры полумодулей над тривиальным полукольцом, то полугруппа A имеет, в общем случае, различные e -множества в качестве подмножеств. Так как $ex + ex = (e + e)x = ex$ для любого элемента x полумодуля A над полукольцом $\{e\}$, то $\langle eA, + \rangle$ является полурешеткой — подполурешеткой полурешетки $I(A)$ всех идемпотентов полугруппы $\langle A, + \rangle$ как ее подполугруппы. Возможны строгие включения $eA \subset I(A) \subset A$.

Полумодуль A над тривиальным полукольцом будем называть *e -полумодулем*, если $\langle A, + \rangle$ является полурешеткой. Отметим, что ретракции на полурешетках являются изотонными отображениями.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Элемент e является одновременно нулем и единицей тривиального полукольца $\{e\}$. Поэтому все полумодули в узком смысле над тривиальным полукольцом суть одноэлементные e -полумодули, изоморфные друг другу.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Произвольная коммутативная полугруппа $\langle A, + \rangle$ с тождественным действием e на A ($\forall x \in A \ e x = x$) будет (унитарным) полумодулем над тривиальным полукольцом тогда и только тогда, когда A — полурешетка.

Приведем разнообразные примеры полумодулей над тривиальным полукольцом, не являющихся, вообще говоря, e -полумодулями.

ПРИМЕР 1. Пусть $\langle A, + \rangle$ — коммутативная полугруппа и a — ее идемпотент. Положив $ex = a$ для всех $x \in A$, получаем полумодуль A над тривиальным полукольцом.

ПРИМЕР 2. Пусть даны коммутативный моноид $\langle B, +, 0 \rangle$ и полурешетка $\langle C, + \rangle$. Рассмотрим их прямое произведение $A = B \times C$ со следующим действием e на A : $e(b, c) = (0, c)$ для любых $b \in B, c \in C$. Тогда имеем полумодуль A над тривиальным полукольцом, при этом $eA = \{(0, c) : c \in C\} \cong C$.

ПРИМЕР 3. Возьмем любые неидемпотентную коммутативную полугруппу $\langle B, + \rangle$ и полурешетку $\langle C, + \rangle$. Пусть $A = (B \times C) \cup C$ — полугруппа с коммутативной операцией сложения $+$, совпадающей с исходными аддитивными операциями на $B \times C$ и на C и такой, что $(b, c) + d = c + d$ при всех $b \in B, c, d \in C$. Положим $e(b, c) = c = ec$ для любых $b \in B, c \in C$. В результате получим полумодуль A над тривиальным полукольцом $\{e\}$, не являющийся e -полумодулем.

ПРИМЕР 4. Возьмем неодноэлементную коммутативную полугруппу $\langle B, + \rangle$ с тождеством $x + y = \theta$, где θ — фиксированный элемент из B , и полурешетку $\langle C, + \rangle$ с нулем θ . Рассмотрим коммутативную полугруппу $A = B \cup C$ с операцией сложения $+$, продолжающей операции на B и C и такую, что $b + c = c$ для всех $b \in B, c \in C$. Полагая $eb = \theta$ и $ec = c$ для любых $b \in B$ и $c \in C$, получаем полумодуль A над тривиальным полукольцом, также не являющийся e -полумодулем.

ПРИМЕР 5. Пусть $\langle A, + \rangle$ — коммутативная полугруппа с тождеством $4x = 2x$. Положим $ea = 2a = a + a$ для любого элемента $a \in A$. Имеем полумодуль A над тривиальным полукольцом, причем $eA = I(A)$ — множество всех идемпотентов полугруппы $\langle A, + \rangle$. Полумодуль A не будет e -полумодулем, если $\langle A, + \rangle$ не полурешетка.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Рассмотрим трехэлементные идемпотентные полукольца $S_1 = \{0, e, 1\}$, где $e + 1 = 1$, и $S_2 = \{0, e, 1\}$, где $e + 1 = e$. Полукольцо S_1 представляет собой трехэлементную цепь $0 < e < 1$, а полукольцо S_2 является идемпотентным моно-полукольцом. В работе [1] рассматривались S_1 -полумодули и S_2 -полумодули в узком смысле, фактически совпадающие с e -полумодулями с нулем с условием $\forall x \in A \ ex \leq x$ и, соответственно, с условием $\forall x \in A \ x \leq ex$.

Приведенные замечания и примеры показывают, что при изучении полумодулей над тривиальным полукольцом целесообразно ограничиться исследованием e -полумодулей.

3. Ретракции цепей

В этом пункте исследуются e -полумодули A в случае цепей $\langle A, \leq \rangle$, то есть ретракции цепей A . Напомним, что *цепь* — это линейно упорядоченное множество. Легко видеть, что цепи являются дистрибутивными решетками. Заметим также, что изотонные отображения цепей являются решеточными гомоморфизмами.

Непустое выпуклое подмножество цепи A будем называть *промежуток* на A .

Напомним понятие дискретной цепи.

Сечением (X, Y) цепи A называется ее разбиение на непустые подмножества X и Y , такое, что $x < y$ для всевозможных элементов $x \in X$ и $y \in Y$. При этом *разбиение* множества A — это множество Σ его попарно не пересекающихся непустых подмножеств, дающих в объединении само множество A : $\emptyset \neq X \subseteq A$ для любого $X \in \Sigma$; $X \cap Y = \emptyset$ для всех $X \neq Y$ из Σ ; $\bigcup\{X : X \in \Sigma\} = A$. Сечение (X, Y) цепи A называется *скачком*, если множество X обладает наибольшим элементом, а множество Y обладает наименьшим элементом. Цепь, в которой все сечения суть скачки, называется *дискретной*. Хорошо известно, что все дискретные цепи изоморфны подцепям цепи $\mathbb{Z}$ целых чисел с естественным порядком. Следовательно, любая дискретная цепь либо конечна, либо изоморфна цепи $\mathbb{N}$ натуральных чисел, либо изоморфна цепи всех отрицательных целых чисел, либо изоморфна цепи $\mathbb{Z}$.

Пусть e — некоторая ретракция полурешетки A и $B = eA$ — множество всех ее неподвижных элементов. Рассмотрим на полурешетке A отношение равнообразности $\sim$ относительно ее эндоморфизма e : $x \sim y$ означает $ex = ey$ для любых $x, y \in A$. Отношение $\sim$ является конгруэнцией на полурешетке A . Классы $a/\sim = \{x \in A : x \sim a\}$ конгруэнции $\sim$ по всем элементам $a \in A$ являются выпуклыми множествами полурешетки A , так как если $a < x < b$ в A и $ea = eb$, то $ex = ea$. Для каждого элемента $a \in A$ имеем $B \cap (a/\sim) = \{ea\}$, то есть каждый класс $a/\sim$ содержит ровно одну неподвижную точку ea ретракции e полурешетки A .

Опишем строение ретракций цепей.

ТЕОРЕМА 1. *Любая ретракция e произвольной цепи A может быть получена следующим способом. Берем любое разбиение Σ цепи A на промежутки, в каждом промежутке $C \in \Sigma$ выбираем ровно один элемент b_C , а затем полагаем $ea = b_C$ при $a \in C \in \Sigma$; в результате получается ретракция e цепи A с множеством $eA = \{b_C : C \in \Sigma\}$ неподвижных элементов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже показали, что каждая ретракция e цепи A индуцирует исконое разбиение $\Sigma = \{a/\sim : a \in A\}$ цепи A на промежутки $a/\sim$ с фиксированными элементами $ea \in a/\sim$.

Обратно, если дано разбиение Σ цепи A на промежутки и имеется функция выбора $f : \Sigma \rightarrow A$, $f(C) \in C$ для всех $C \in \Sigma$, то отображение $e : A \rightarrow A$, $ea = f(C)$ для любого $a \in C$, определяет ретракцию e цепи A с множеством $\{f(C) : C \in \Sigma\}$ неподвижных элементов. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для всякого непустого подмножества B цепи A справедливы следующие утверждения:*

1) *B является e -множеством тогда и только тогда, когда для любого элемента $a \in A$ множество $\{x \in B : x \leq a\}$ имеет наибольший элемент или множество $\{x \in B : x \geq a\}$ имеет наименьший элемент;*

2) *B является e -множеством единственной ретракции на A тогда и только тогда, когда для любого элемента $a \in A \setminus B$ либо множество $\{x \in B : x \leq a\}$ имеет наибольший элемент, либо множество $\{x \in B : x \geq a\}$ имеет наименьший элемент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть B — e -множество и $a \in A$. Элемент $ea \in B$ принадлежит одному из множеств $\{x \in B : x \leq a\}$, $\{x \in B : x \geq a\}$; в первом случае ea будет наибольшим элементом первого множества, а во втором случае — наименьшим элементом второго множества.

Допустим, что множество B удовлетворяет достаточному условию утверждения 1). Тогда для произвольного элемента $x \in A$ определим ex как наибольший элемент множества $\{b \in B : b \leq x\}$, если таковой существует, или как наименьший элемент множества $\{b \in B : b \geq x\}$ в противном случае. Покажем, что так определенное отображение $e : A \rightarrow A$ будет ретракцией. Ясно, что $B = eA$ и $ee = e$. Остается проверить изотонность e .

Возьмем элементы $x < y$ в A . Возможны 4 случая.

Случай 1.1. Пусть ex — наибольший элемент множества $\{b \in B : b \leq x\}$ и ey — наибольшим элементом множества $\{b \in B : b \leq y\}$. Тогда $\{b \in B : b \leq x\} \subseteq \{b \in B : b \leq y\}$, следовательно, $ex \leq ey$.

Случай 1.2. Пусть снова ex — наибольший элемент множества $\{b \in B : b \leq x\}$, но ey будет наименьшим элементом множества $\{b \in B : b \geq y\}$. Тогда $ex < y \leq ey$.

Случай 2.1. Пусть ex — наименьший элемент множества $\{b \in B : b \geq x\}$ и ey — наибольший элемент множества $\{b \in B : b \leq y\}$. Причем, по определению e множество $\{b \in B : b \leq x\}$ не имеет наибольшего элемента. Предположим от противного, что $ey < ex$. Тогда $ey < x < y < ex$. Легко видеть, что в интервале $[ey, ex]$ нет других элементов из множества B кроме ey и ex . Но элемент ey будет наибольшим элементом множества $\{b \in B : b \leq x\}$. Полученное противоречие показывает, что $ex \leq ey$.

Случай 2.2. Пусть ex — наименьший элемент множества $\{b \in B : b \geq x\}$ и ey — наименьшим элементом множества $\{b \in B : b \geq y\}$. Тогда $\{b \in B : b \geq y\} \subseteq \{b \in B : b \geq x\}$, значит, $ex \leq ey$.

Утверждение 2) вытекает из утверждения 1). $\square$

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы все непустые подмножества цепи A являлись e -множествами, необходимо и достаточно, чтобы A была дискретной цепью.*

Отметим, что теорема 2 впервые доказана в [4, теорема 2] в несколько ином виде и другим способом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть цепь A удовлетворяет необходимому условию предложения. Рассмотрим произвольное сечение (B, C) цепи A . Множество B является e -множеством некоторой ретракции e . При этом множество C будет множеством всех подвижных точек ретракции e . Предположим, что $es \leq b$ для некоторых элементов $s \in C$ и $b \in B$. Поскольку $b < c$, то $b \leq es$. Откуда $es = b$. Следовательно, при любом $s \in C$ элемент es служит наибольшим элементом множества B . Двойственным образом множество C обладает наименьшим элементом. Тем самым, сечение (B, C) будет скачком. И цепь A — дискретная.

Обратно, пусть дана дискретная цепь A . Фиксируем в ней непустое подмножество B . Возьмем элемент $a \in A$ и рассмотрим множество $\{x \in B : x < a\}$. Если $\{x \in B : x < a\} = \emptyset$, то множество $B = \{x \in B : x \geq a\}$ ограничено снизу и, стало быть, имеет наименьший элемент. Если $\{x \in B : x < a\} \neq \emptyset$, то множества $\{x \in B : x < a\}$ и $\{x \in B : x \geq a\}$ образуют сечение дискретной цепи A , являющееся скачком. Для завершения доказательства остается применить утверждение 1) предложения 1. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Подмножество B дискретной цепи A будет e -множеством одной-единственной ретракции на этой цепи тогда и только тогда, когда B является промежутком.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — дискретная цепь. По теореме 2 всякое непустое подмножество B в A будет e -множеством.

Если B не выпукло, то найдутся такие элементы $b < c$ в B и $a \in A \setminus B$, что $b < a < c$. В дискретной цепи A интервал $[b, c]$ конечен. Значит, множество $\{x \in B : x \leq a\}$ имеет наибольший элемент, а множество $\{x \in B : a \leq x\}$ имеет наименьший элемент. В силу утверждения 2) предложения 1 множество B будет e -множеством, по крайней мере, двух ретракций.

Если же B является промежутком в A , то для него выполняется достаточное условие утверждения 2) предложения 1. Поэтому B будет e -множеством единственной ретракции цепи A . $\square$

4. Ретракции специального вида

Рассмотрим некоторые виды ретракций e -полумодулей A .

Ретракцию e полурешетки A назовем *возрастающей* (*убывающей*), если $x \leq ex$ ($ex \leq x$) для всех элементов $x \in A$. Ретракцию e решетки A назовем *мультипликативной*, если $e(xy) = ex \cdot ey$ для всех $x, y \in A$. Отметим, что ретракции цепей мультипликативны.

Возрастающие ретракции. Пусть e — возрастающая ретракция на полурешетке A и $B = eA$ — множество ее неподвижных элементов. Для произвольного элемента $a \in A$ рассмотрим множество $\{x \in B : x \geq a\}$, заведомо содержащее элемент ea . Для любого элемента $x \in \{x \in B : x \geq a\}$ имеем $x = ex \geq ea$. Значит, элемент ea служит наименьшим элементом множества $\{x \in B : x \geq a\}$. Стало быть, возрастающая ретракция e однозначно определяется своим e -множеством B .

Предположим дополнительно, что A — решетка. Для любых элементов $x, y \in B$ имеем $xy \leq e(xy) \leq e(x)e(y) = xy$, значит, $xy = e(xy) \in B$. Следовательно, B будет подрешеткой решетки A .

Итак, доказаны следующие два предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Всякая возрастающая ретракция на произвольной полурешетке однозначно определяется множеством своих неподвижных элементов.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Множество всех неподвижных элементов любой возрастающей ретракции на произвольной решетке будет ее подрешеткой.*

Рассмотрим далее случай конечных решеток A .

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы подмножество B конечной решетки A являлось e -множеством некоторой возрастающей ретракции e на A , необходимо и достаточно, чтобы B было подрешеткой решетки A , содержащей наибольший элемент t из A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость* установлена в предложении 4, если учесть равенство $et = t$.

Достаточность. Пусть B — подрешетка конечной решетки A и наибольший элемент t решетки A принадлежит B . Для произвольного элемента $x \in A$ определим $e(x) = ex$ как наименьший элемент подрешетки $\{b \in B : b \geq x\}$ решетки A . Как легко видеть, получаем идемпотентное изотонное отображение $e : A \rightarrow A$ с множеством B неподвижных элементов и $x \leq e(x)$ для всех $x \in A$. Остается проверить аддитивность отображения e . Берем произвольные элементы $x, y \in A$. Имеем $x + y \leq ex + ey \leq e(x + y)$. Поскольку $ex + ey \in B$, то $e(x + y) \leq ex + ey$ в силу определения отображения e . Значит, $e(x + y) = ex + ey$ для любых $x, y \in A$. Тем самым, $B = eA$ есть e -множество возрастающей ретракции e на конечной решетке A . $\square$

ПРИМЕР 6. Пусть $A = \{0, a, b, 1\}$ — четырехэлементная булева решетка и $e(x) = x$ при $x = 0, a, 1, e(b) = 1$. Получаем возрастающую ретракцию e на решетке A с множеством неподвижных точек $\{0, a, 1\}$. Поскольку $e(ab) = e(0) = 0$ и $e(a)e(b) = a \cdot 1 = a$, то ретракция e не мультипликативна.

Убывающие ретракции. Пусть дана убывающая ретракция e на полурешетке A , $B = eA$ — множество ее неподвижных элементов. Для произвольного элемента $a \in A$ множество $\{x \in B : x \leq a\}$ содержит элемент ea . Для любого элемента $b \in \{x \in B : x \leq a\}$ имеем $b = eb \leq ea$. Значит, ea является наибольшим элементом множества $\{x \in B : x \leq a\}$. Поэтому убывающая ретракция e однозначно определяется множеством B .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Любая убывающая ретракция на произвольной полурешетке однозначно определяется множеством своих неподвижных элементов.*

ПРИМЕР 7. Пусть $A = \{0, a, b, c, 1\}$ — пятиэлементная дистрибутивная решетка с нулем 0, единицей 1, атомом a и равенствами $bc = a$, $b + c = 1$. Возьмем отображение $e : A \rightarrow A$ с множеством $B = \{0, b, c, 1\}$ неподвижных элементов, для которого $e(a) = 0$. Получаем убывающую ретракцию e решетки A , e -множество B которой не является подрешеткой решетки A . Так как $e(bc) = e(a) = 0$ и $e(b)e(c) = bc = a$, то ретракция e не будет мультипликативной.

Линейные ретракции. Возьмем произвольную дистрибутивную решетку A с фиксированными элементами a, b . Для любого элемента $x \in A$ положим $ex = a + bx$. Покажем, что *линейная ретракция* e является мультипликативной ретракцией дистрибутивной решетки A .

Если $x \in [a, a + b]$, то $x = a + (a + b)x = a + bx = ex$. Если $x \in A$, то $e(ex) = e(a + bx) = a + b(a + bx) = a + bx = ex$. Поэтому $ee = e$ и $eA = [a, a + b]$.

Для любых элементов $x, y \in A$ имеем:

$$\begin{aligned} e(x + y) &= a + b(x + y) = a + bx + by = (a + bx) + (a + by) = ex + ey, \\ e(xy) &= a + b(xy) = a + bx \cdot by = (a + bx)(a + by) = ex \cdot ey. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть даны дистрибутивная решетка A и ее элементы a, b . Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) линейная ретракция $ex = a + bx$ мультипликативна;
- 2) интервал $[a, a + b]$ служит e -множеством единственной мультипликативной ретракции e , именно, $ex = a + bx$ для всех $x \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) доказано выше.

2) Пусть f — мультипликативная ретракция решетки A , для которой $fA = [a, a + b]$. Для любого элемента $x \in A$ получаем

$$f(x) = a + bf(x) = a + f(b) \cdot f(x) = f(a) + f(bx) = f(a + bx) = a + bx = ex.$$

□

ПРИМЕР 8. Снова рассмотрим пятиэлементную дистрибутивную решетку A из примера 7. Интервал $[a, b] = \{a, b\}$ служит e -множеством двух ретракций: мультипликативной $ex = a + bx$ для всех $x \in A$; не мультипликативной $fx = a$ при $x = 0, a$ и $fx = b$ при $x = b, c, 1$. Заметим, что ретракция f не является ни возрастающей, ни убывающей.

ПРИМЕР 9. Пусть A — произвольная дистрибутивная решетка, $a < b$ — ее элементы, причем, $A = aA \cup [a, b] \cup (b + A)$. Такая решетка A имеет единственную ретракцию e с e -множеством $[a, b]$, именно, $ex = a + bx$. Ретракция e будет возрастающей (убывающей) тогда и только тогда, когда b — наибольший (соответственно, a — наименьший) элемент решетки A .

ДОПОЛНЕНИЕ. Справедливо следующее УТВЕРЖДЕНИЕ: для любого натурального числа n число всех ретракций n -элементной цепи равно F_{2n} — числу Фибоначчи с номером $2n$. Это утверждение может быть доказано на основании теоремы 1 индукцией по n .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вечтомов Е. М., Петров А. А., Шкляев А. П. Конечные полумодули над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. № 3 (66). С. 5–15.
2. Гретцер Г. Общая теория решеток // М.: Мир, 1982. 456 с.
3. Golan J. S. Semirings and their Applications // Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publ., 1999. 382 p.
4. Фофанова Т. С. О ретрактах структуры. Математические заметки. 1970. Т. 7. Вып. 6. С. 687–692.

REFERENCES

1. Vechtomov, E. M., Petrov, A. A., Shklyaev, A. P. 2024, “Finite semimodules over three-element multiplicatively idempotent semirings”, *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no 3 (66), pp. 5–15.
2. Grätzer, G. “General Lattice Theory”, *Moscow: Mir*, 1982. 456 p.
3. Golan, J. S. “Semirings and their Applications”, *Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publ.*, 1999. 382 p.
4. Fofanova, T. S. 1970, “On retracts of structures”, *Mathematical notes*, Vol. 7, Iss. 6, pp. 687–692.

Получено: 11.01.2025

Принято в печать: 27.08.2025