ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 3.

УДК 517.968 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-44-57

Интегральные уравнения дробного порядка с переменным внешним коэффициентом и монотонной нелинейностью[1]

С. Н. Асхабов

Асхабов Султан Нажмудинович — доктор физико-математических наук, Чеченский государственный университет имени А. А. Кадырова (г. Грозный).
e-mail: askhabov@yandex.ru

Аннотация

При достаточно легко обозримых ограничениях на нелинейности, без предположения, что они удовлетворяют условию Липшица, методом монотонных (по Браудеру – Минти) операторов доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решения для трех различных классов неоднородных нелинейных интегральных уравнений, в которые операторы дробного (по Риману – Лиувиллю) интегрирования с переменным внешним коэффициентом входят линейно или нелинейно, либо эти операторы содержат нелинейность под знаком интеграла (уравнения типа Гаммерштейна). В последнем случае существование и единственность решения установлены без условия коэрцитивности на нелинейность. Во всех случаях важную роль играют найденные в работе условия при которых операторы дробного интегрирования с переменным внешним коэффициентом действуют непрерывно из вещественных пространства Лебега $L_p(a,b)$ в сопряженные с ними пространства и являются строго положительными. Доказанные теоремы в рамках пространства $L_2(a,b)$ охватывают соответствующие линейные уравнения с интегралами дробного порядка. Из полученных оценок, в частности, непосредственно вытекает, что при условиях доказанных теорем соответствующие однородные линейные и нелинейные интегральные уравнения имеют лишь тривиальное (нулевое) решение.

Приведены следствия, иллюстрирующие основные результаты.

Ключевые слова: интегральные уравнения дробного порядка, монотонная нелинейность, оценки решений.

Библиография: 22 названий.

Для цитирования:
Асхабов, С. Н. Интегральные уравнения дробного порядка с переменным внешним коэффициентом и монотонной нелинейностью // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 3, с. 44–57.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FEGS-2023-0003)

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 3.

UDC 517.968 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-3-44-57

Integral equations of fractional order with a variable external coefficient and monotonic nonlinearity

S. N. Askhabov

Askhabov Sultan Nazhmudinovich — doctor of physical and mathematical sciences, Kadyrov Chechen State University (Grozny).
e-mail: askhabov@yandex.ru

Abstract

Under reasonably easy-to-observe restrictions on the nonlinearities, without assuming that they satisfy the Lipschitz condition, global theorems on the existence, uniqueness, and estimates of the solution for three different classes of inhomogeneous nonlinear integral equations are proved by the method of monotone (in the sense of Browder – Minty) operators. In these equations, the operators of fractional (in the sense of Riemann – Liouville) integration with a variable external coefficient enter linearly or nonlinearly, or these operators contain a nonlinearity under the sign of the integral (Hammerstein-type equation). In the latter case, the existence and uniqueness of the solution are established without the coercivity condition on the nonlinearity. In all cases, the conditions found in the work under which the fractional integration operators with a variable external coefficient act continuously from the real Lebesgue space $L_p(a,b)$ to the spaces conjugate to them and are strictly positive play an important role. The proved theorems within the framework of the space $L_2(a,b)$ cover the corresponding linear equations with integrals of fractional order. From the obtained estimates, in particular, it directly follows that under the conditions of the proved theorems, the corresponding homogeneous linear and nonlinear integral equations have only a trivial (zero) solution.

Keywords: fractional-order integral equations, monotone nonlinearity, solution estimates.

Bibliography: 22 titles.

For citation:
Askhabov, S. N. 2025, “Integral equations of fractional order with a variable external coefficient and monotonic nonlinearity” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 44–57.

1. Введение

Многие задачи современной математики, физики, биологии и других областей естествознания приводят к линейным и нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра дробного порядка. Такие уравнения возникают, в частности, в моделях динамики в пористых средах и популяционной генетики, при описании процессов теплообмена и распространения ударных волн в газонаполненных трубах, в задачах гидроаэродинамики и аномальной диффузии и других (подробнее см. (см. монографии [1–3], а также статьи [4–7]). В данной работе в вещественных пространствах Лебега $L_p(a,b)$, $1 < p < \infty$, рассматриваются нелинейные уравнения, содержащие операторы левостороннего W^{α}_{a+} и правостороннего W^{α}_{b-} дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегрирования порядка $\alpha > 0$ с переменным внешним коэффициентом $w(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$(W^{\alpha}_{a+}u)(x) = \frac{w(x)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\,, \quad (W^{\alpha}_{b-}u)(x) = \frac{w(x)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^b \frac{u(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}\,, \quad x \in (a,b)\,,$$

где $0 < \alpha < 1$ и $\Gamma(\alpha)$ есть гамма-функция Эйлера. Найдены условия на функцию (коэффициент) $w(x)$, параметры α и p при которых операторы W^{α}_{a+} и W^{α}_{b-} действуют непрерывно из пространства $L_p(a,b)$, $1 < p < \infty$, в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a,b)$, $p' = p/(p-1)$, и являются строго положительными.

При этих условиях методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решения для трех различных классов неоднородных нелинейных интегральных уравнений, в которые операторы W^{α}_{a+} и W^{α}_{b-} входят линейно или нелинейно, либо эти операторы содержат нелинейность под знаком интеграла (уравнения типа Гаммерштейна). В последнем случае существование и единственность решения установлена без условия коэрцитивности на нелинейность. Из полученных оценок, в частности, непосредственно вытекает, что при условиях доказанных теорем соответствующие однородные нелинейные интегральные уравнения имеют лишь тривиальное (нулевое) решение. Доказанные теоремы в рамках пространства $L_2(a,b)$ охватывают соответствующие линейные уравнения с интегралами дробного порядка.

Следует отметить, что операторы дробного интегрирования с переменными внешним и внутренним коэффициентами вида:

$$(G^{\alpha}_{a+}u)(x) = \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{g(t)\,u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\,, \quad (G^{\alpha}_{b-}u)(x) = \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^b \frac{g(t)\,u(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}\,, \quad x \in (a,b)\,,$$

изучались во многих работах (см., например, статьи [8], [9] и приведенные в них библиографические ссылки), в которых получены критерии их ограниченности и компактности как операторов действующих из одних пространств Лебега $L_p(0,\infty)$ в другие пространства $L_q(0,\infty)$. В работах [11], [12] были найдены условия при которых операторы вида G^{α}_{a+} и G^{α}_{b-} являются положительными в пространствах Лебега $L_p(a,b)$ и $L_p(0,\infty)$. Вопрос о положительности операторов W^{α}_{a+} и W^{α}_{b-}, когда имеется только внешний переменный коэффициент $w(x)$, оказался более трудным для исследования. С этим вопросом тесно связана задача найти условия на функцию $w(x)$ и параметры α, p при которых операторы вида W^{α}_{a+} и W^{α}_{b-} действуют непрерывно из пространств Лебега в сопряженные с ними пространства. Следует отметить, что в случае пространства $L_2(a,b)$ вопрос о положительности различных классов операторов дробного интегродифференцирования детально изучен в монографии А.М. Нахушева [12], в которой, в частности, обобщаются некоторые результаты Ф. Трикоми [13], С. Геллерстедта и других авторов.

2. Строгая положительность операторов дробного интегрирования

Приведем сначала необходимые для изложения основных результатов определения, обозначения и вспомогательные факты (см., например, [14], [15]).

Пусть X есть вещественное рефлексивное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и X^* - сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle f, u\rangle$ значение линейного непрерывного функционала $f \in X^*$ на элементе $u \in X$. В частности, если X есть гильбертово пространство, то $\langle f, u\rangle$ совпадает со скалярным произведением (f, u).

Пусть $u, v \in X$ - произвольные элементы. Оператор $A : X \to X^*$ (т.е. действующий из X в X^*) называется:

монотонным, если $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0$;

строго монотонным, если $\langle Au - Av, u - v\rangle > 0$ при $u \neq v$;

коэрцитивным, если $\langle Au, u\rangle \geq \gamma(\|u\|)\cdot\|u\|$, где $\gamma(s)$ – вещественная функция неотрицательного аргумента такая, что $\gamma(s)\to\infty$ при $s\to\infty$ или если

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|}=\infty;$$

хеминепрерывным, если вещественная функция $s\to\langle A(u+s\cdot v), w\rangle$ непрерывна на $[0,1]$ при любых фиксированных $u, v, w\in X$.

Если A - *линейный* оператор, то определение монотонного и строго монотонного оператора совпадает, соответственно, с определением *положительного и строго положительного* оператора [13].

Обозначим через $\|\cdot\|_p$ обычную норму в пространстве Лебега $L_p(a,b)$, $1\leq p\leq\infty$. Известно, что операторы левостороннего I^α_{a+} и правостороннего I^α_{b-} дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегрирования порядка $\alpha>0$:

$$\big(I^\alpha_{a+}u\big)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\,,\quad \big(I^\alpha_{b-}u\big)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b\frac{u(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}\,,\quad x\in(a,b)\,,$$

действуют ограниченно из $L_p(a,b)$ в $L_p(a,b)$ при любом $p\geq 1$ [15, с. 48] и являются строго положительными в $L_2(a,b)$ [12, с. 45], причем

$$\|I^\alpha_{a+}u\|_p\leq\frac{(b-a)^\alpha}{\alpha\cdot\Gamma(\alpha)}\|u\|_p,\quad \|I^\alpha_{b-}u\|_p\leq\frac{(b-a)^\alpha}{\alpha\cdot\Gamma(\alpha)}\|u\|_p, \tag{1}$$

$$\big(I^\alpha_{a+}u,u\big)=\big(I^\alpha_{b-}u,u\big)\geq 0\quad\forall u\in L_2(a,b)\,,\ \ \big(I^\alpha_{a+}u,u\big)=\big(I^\alpha_{b-}u,u\big)>0\quad\forall u\neq 0. \tag{2}$$

Обозначим через $\|A\|_{X\to Y}$ норму линейного оператора A, действующего ограничено из банахова пространства X в банахово пространство Y. В частности, если $X=L_p(a,b)$, а $Y=L_q(a,b)$, то будем писать $\|A\|_{p\to q}$.

Лемма 1. *Если $0<\alpha<1$, то операторы I^α_{a+} и I^α_{b-} действуют непрерывно из $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$ и являются строго положительными, причем $\forall u\in L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ выполняются неравенства:*

$$\|I^\alpha_{a+}u\|_{2/(1-a)}\leq n(\alpha)\cdot\|u\|_{2/(1+\alpha)},\quad \|I^\alpha_{b-}u\|_{2/(1-a)}\leq n(\alpha)\cdot\|u\|_{2/(1+\alpha)}, \tag{3}$$

где

$$n(\alpha)=\|I^\alpha_{a+}\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)}=\|I^\alpha_{b-}\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)} \tag{4}$$

есть норма этих операторов.

Доказательство. То, что оператор I^α_{a+} действует ограниченно из $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ в $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$ и является строго положительным подробно доказано в [10, Лемма 1]. Для оператора I^α_{b-} доказательство вполне аналогично. Осталось доказать равенства (4). Обозначим для удобства $A=I^\alpha_{a+}$, $X=L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ и $Y=L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$. Из формулы дробного интегрирования по частям (2.20) [15] непосредственно вытекает, что $A^*=I^\alpha_{b-}$. Так как $X^*=L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$ и $A:X\to Y$, а $A^*:Y^*\to X^*$, то по известной теореме 6 [16, с. 247], имеем $\|A\|_{X\to Y}=\|A^*\|_{Y^*\to X^*}$, то есть $\|I^\alpha_{a+}\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)}=\|I^\alpha_{b-}\|_{2/(1+\alpha)\to 2/(1-\alpha)}$ – что и требовалось доказать.

Далее нам понадобится следующая лемма, являющаяся известным вариантом второй теоремы о среднем (см., например, [17, с. 414]). Для удобства её формулировки, следуя [17, с. 387], обозначим через $\mathcal{R}[a,b]$ множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$.

Лемма 2 (Формула Бонне). *Если $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ и g – неотрицательная и невозрастающая на отрезке $[a,b]$ функция, то найдется точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь операторы W_{a+}^α и W_{b-}^α с переменным внешним коэффициентом $w(x)$. Будем всюду предполагать, что функция $w(x)$ удовлетворяет условию:

$$w(x) \text{ непрерывна, неотрицательна и не возрастает на отрезке } [a,b], \text{ причем } w(a) > 0. \tag{6}$$

Лемма 3. *Пусть $0 < \alpha < 1$ и выполнено условие (6). Тогда операторы W_{a+}^α и W_{b-}^α действуют непрерывно из $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ в $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$ и являются строго положительными, причем для любого $u \in L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ выполняются неравенства:*

$$\|W_{a+}^\alpha u\|_{2/(1-a)} \le w(a)\cdot n(\alpha)\cdot\|u\|_{2/(1+\alpha)}, \quad \|W_{b-}^\alpha u\|_{2/(1-a)} \le w(a)\cdot n(\alpha)\cdot\|u\|_{2/(1+\alpha)}, \tag{7}$$

$$\langle W_{a+}^\alpha u, u\rangle \ge 0,\ \langle W_{b-}^\alpha u, u\rangle \ge 0 \quad \text{и} \quad \langle W_{a+}^\alpha u, u\rangle > 0,\ \langle W_{b-}^\alpha u, u\rangle > 0 \quad \text{при} \quad u \ne 0, \tag{8}$$

где число $n(\alpha)$ определено в (4).

Доказательство. Рассмотрим оператор W_{a+}^α. Пусть $u \in L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$. Так как, в силу условия (6), $w(x) \le w(a)$ для любого $x \in [a,b]$, то используя первую оценку из (3), имеем

$$\|W_{a+}^\alpha u\|_{2/(1-a)} \le w(a)\cdot\|I_{a+}^\alpha u\|_{2/(1-a)} \le w(a)\cdot n(\alpha)\cdot\|u\|_{2/(1+\alpha)}, \tag{9}$$

то есть оператор W_{a+}^α действует непрерывно из $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ в $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$ и справедливо первое неравенство из (7).

Докажем положительность оператора W_{a+}^α. Рассмотрим в пространстве $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ квадратичную форму:

$$\langle W_{a+}^\alpha u, u\rangle = \int\limits_a^b \left(\frac{w(x)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right)u(x)dx. \tag{10}$$

Так как, в силу неравенства Гельдера и оценки (9),

$$\left|\langle W_{a+}^\alpha u, u\rangle\right| \le w(a)\cdot n(\alpha)\cdot\|u\|_{2/(1+\alpha)}^2,$$

то выражение $\langle W_{a+}^\alpha u, u\rangle$ представляет собой непрерывный функционал в пространстве $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$.

Пусть $u \in C_0^\infty[a,b]$, т.е. $u(x)$ есть бесконечно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ финитная функция, то есть равная нулю в окрестности концов этого отрезка. Тогда очевидно (см., например, [15, с. 56]), что функция

$$f(x) = \frac{u(x)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \tag{11}$$

интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то есть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Так как для функций (11) и $g(x) = w(x)$ выполнены все требования леммы 2, то по формуле Бонне (5) существует число $\xi \in [a,b]$ такое, что

$$\int\limits_a^b \left(\frac{u(x)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right)w(x)dx = w(a)\int\limits_a^\xi \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right)u(x)dx. \tag{12}$$

В работе А.М. Нахушева [18] показано, что правая часть равенства (12) неотрицательна для любой функции $u \in \mathcal{R}[a,b]$, причем она строго положительна, если $u \neq 0$. Но тогда, очевидно, что эти два утверждения тем более справедливы для любой функции $u \in C_0^\infty[a,b]$. Поэтому, в силу равенств (10) и (12), имеем:

$$\langle W_{a+}^\alpha u, u\rangle \geq 0 \quad \forall u \in C_0^\infty[a,b] \quad \text{и} \quad \langle W_{a+}^\alpha u, u\rangle > 0 \quad \text{при} \quad u \neq 0. \tag{13}$$

Так как множество $C_0^\infty[a,b]$ плотно в $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ и, в силу неравенства (11), выражение $\langle W_{a+}^\alpha u, u\rangle$ представляет собой непрерывный функционал в $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$, то по теореме Банаха оба неравенства из (13) справедливы и для любой функции $u \in L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$. Значит, W_{a+}^α есть строго положительный оператор в пространстве $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ и для оператора W_{a+}^α выполнены неравенства (8).

В случае оператора W_{b-}^α доказательство аналогично.

В связи с леммой 3 заметим, что если в условии (6) $w(a) = 0$, то $w(x) = 0$ для любого $x \in [a,b]$ и, следовательно, в этом случае операторы W_{a+}^α и W_{b-}^α являются нулевыми (в смысле определения данного в [16, с. 234]). Требование непрерывности функции $w(x)$ в условии (6), как и предположение, что $w(a) > 0$, также существенно для справедливости леммы 3 поскольку, например, для функции $w(x)$ такой, что $w(a) = 1$ и $w(x) = 0$ при $x > a$ операторы W_{a+}^α и W_{b-}^α являются нулевыми и, следовательно, не являются строго положительными. Отметим, что эта функция удовлетворяет всем условиям, накладываемым на функцию $g(x)$ в лемме 2.

Лемма 4. *Если $0 < \alpha < 1$, $2/(1+\alpha) < p < \infty$ и выполнено условие (6), то оператор W_{a+}^α действует непрерывно из $L_p(a,b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a,b)$ и является строго положительным, причем для любого $u \in L_p(a,b)$ выполняются неравенства:*

$$\|W_{a+}^\alpha u\|_{p'} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} w(a) \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_p, \tag{14}$$

$$\langle W_{a+}^\alpha u, u\rangle \geq 0 \quad \text{и} \quad \langle W_{a+}^\alpha u, u\rangle > 0 \quad \text{при} \quad u \neq 0. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $u \in L_p(a,b)$. Применяя неравенство Гельдера с показателями $p(1+\alpha)/2$ и $p(1+\alpha)/[p(1+\alpha)-2]$, имеем

$$\|u\|_{2/(1+\alpha)} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|u\|_p, \tag{16}$$

то есть $u \in L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$. Но тогда, по лемме 3, $W_{a+}^\alpha u \in L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$, причем

$$\|W_{a+}^\alpha u\|_{2/(1-\alpha)} \leq w(a) \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_{2/(1+\alpha)}. \tag{17}$$

Обозначим $v = W_{a+}^\alpha u$. Применяя неравенство Гельдера с показателями $2(p-1)/[p(1-\alpha)]$ и $2(p-1)/[p(1+\alpha)-2]$ (заметим, что оба показателя больше единицы так как неравенство $2(p-1)/[p(1-\alpha)] > 1$ равносильно условию леммы, что $2/(1+\alpha) < p$), имеем

$$\|v\|_{p'} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|v\|_{2/(1-\alpha)}.$$

Следовательно,

$$\|W_{a+}^\alpha u\|_{p'} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|W_{a+}^\alpha u\|_{2/(1-\alpha)}. \tag{18}$$

Используя оценки (16), (17), (18), получаем

$$\|W_{a+}^\alpha u\|_{p'} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} w(a) \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_{2/(1+\alpha)} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} w(a) \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_p,$$

то есть оператор W_{a+}^α действует непрерывно из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$ и справедливо неравенство (14).

Докажем строгую положительность оператора W^{α}_{a+}. Пусть $u \in L_p(a,b)$. Так как, в силу неравенства (16), $u \in L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ и, в силу неравенства (17), $W^{\alpha}_{a+}u \in L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$, то по лемме 3 на основании неравенств (8) для любого $u \in L_p(a,b)$, имеем

$$\langle W^{\alpha}_{a+}u, u\rangle \geq 0 \quad \text{и} \quad \langle W^{\alpha}_{a+}u, u\rangle > 0 \quad \text{при} \quad u \neq 0,$$

то есть оператор W^{α}_{a+} является строго положительным в пространстве $L_p(a,b)$, причем справедливы неравенства (15) – что и требовалось доказать.

Лемма 4 остается справедливой и в случае оператора W^{α}_{b-}.

Из лемм 3 и 4 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $2/(1+\alpha) \leq p < \infty$ и выполнено условие (6). Тогда операторы W^{α}_{a+} и W^{α}_{b-} действуют непрерывно из пространства $L_p(a,b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a,b)$ и строго положительны. При этом для любого $u \in L_p(a,b)$ выполняются неравенства*

$$\|G^{\alpha}_{a+}u\|_{p'} \leq C_1 \cdot \|u\|_p, \quad \|G^{\alpha}_{b-}u\|_{p'} \leq C_1 \cdot \|u\|_p,$$

где

$$C_1 = \begin{cases} w(a) \cdot n(\alpha), & \text{если } p = 2/(1+\alpha), \\ (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} w(a) \cdot n(\alpha), & \text{если } 2/(1+\alpha) < p < \infty, \end{cases}$$

а число $n(\alpha)$ определено в (4).

При исследовании методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна в пространствах Лебега $L_p(a,b)$ приходится рассматривать интегральные операторы, действующие из сопряженного пространства $L_{p'}(a,b)$ в исходное пространство $L_p(a,b)$ в котором разыскиваются решения. В этой связи нам далее понадобится следующая теорема, двойственная теореме 1, которая доказывается на основе аналогов лемм 1–4 (в связи с аналогом леммы 1 заметим, что ограниченное действие операторов I^{α}_{a+} и I^{α}_{b-} из $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$ в $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ и их строгая положительность очевидны, в силу неравенств (1), (2) и непрерывных вложений $L_{2/(1-\alpha)}(a,b) \subset L_2(a,b) \subset L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$).

Теорема 2. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $1 < p \leq 2/(1-\alpha)$ и выполнено условие (6). Тогда операторы W^{α}_{a+} и W^{α}_{b-} действуют непрерывно из пространства $L_{p'}(a,b)$ в сопряженное с ним пространство $L_p(a,b)$ и строго положительны. При этом для любого $u \in L_{p'}(a,b)$ выполняются неравенства*

$$\|W^{\alpha}_{a+}u\|_p \leq C_2 \cdot \|u\|_{p'}, \quad \|W^{\alpha}_{b-}u\|_p \leq C_2 \cdot \|u\|_{p'},$$

где

$$C_2 = \begin{cases} w(a) \cdot (b-a)^{\alpha+(2-p)/p} \big(\alpha \cdot \Gamma(\alpha)\big)^{-1}, & \text{если } 1 < p \leq 2, \\ w(a) \cdot (b-a)^{2-p(1-\alpha)]/p} \cdot n(\alpha), & \text{если } 2 < p \leq 2/(1-\alpha), \end{cases}$$

а число $n(\alpha)$ определено в (4).

Заметим, что при $w(x) = 1$ и $p = 2/(1+\alpha)$ из теоремы 2 непосредственно вытекает неравенство

$$\|I^{\alpha}_{a+}u\|_{2/(1+\alpha)} \leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \|u\|_{2/(1-\alpha)}. \tag{19}$$

В отличие от оценки (3), неравенство (19) не является следствием теоремы Харди-Литтлвуда с предельным показателем [15, с. 64], поскольку при $p = 2/(1+\alpha)$ не для всех $\alpha \in (0,1)$, а только для $\alpha < 1/3$, выполняется условие $p < 1/\alpha$ этой теоремы. Тем не менее, неравенство (19) легко доказать с использованием вложений $L_{2/(1-\alpha)}(a,b) \subset L_2(a,b) \subset L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ и первой оценки из (1).

3. Глобальные теоремы существования и единственности

В данном пункте доказываются глобальные теоремы об однозначной разрешимости для трех различных классов нелинейных уравнений, содержащих оператор дробного интегрирования W^{α}_{a+} с переменным внешним коэффициентом $w(x)$, без ограничений на область существования решения и требования липшицевости нелинейности. Всюду ниже предполагается, что функция $F(x,t)$, определяющая нелинейность рассматриваемых уравнений, определена при $x \in [a,b]$, $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x почти при каждом фиксированном t и почти при всех x непрерывна по t. Обозначим через F оператор суперпозиции (оператор Немыцкого) $Fu = F[x,u(x)]$, порожденный этой функцией $F(x,t)$, а через $L^{+}_{p}(a,b)$ – множество всех неотрицательных функций из $L_p(a,b)$.

Теорема 3. *Пусть $0<\alpha<1$, $2/(1+\alpha) \le p < \infty$ и выполнено условие (6). Если для почти всех $x \in [a,b]$ и всех $t \in \mathbb{R}$ нелинейность $F(x,t)$ удовлетворяет условиям:*
1) $|F(x,t)| \le c(x) + d_1\,|t|^{p-1}$, *где* $c \in L^{+}_{p'}(a,b)$, $d_1>0$;
2) *$F(x,t)$ не убывает по t почти при каждом фиксированном x;*
3) $F(x,t)\cdot t \ge d_2\,|t|^p - D(x)$, *где* $D \in L^{+}_{1}(a,b)$, $d_2>0$;
то при любом $f \in L_{p'}(a,b)$ уравнение

$$F[x,u(x)] + \frac{w(x)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x) \tag{20}$$

имеет единственное решение $u^* \in L_p(a,b)$. Кроме того, если условие 3) выполнено при $D(x)=0$, то справедлива оценка:

$$\|u^*\|_p \le \left(d_2^{-1}\,\|f\|_{p'}\right)^{1/(p-1)}. \tag{21}$$

Доказательство. Запишем данное уравнение (20) в операторном виде: $Au=f$, где $Au = Fu + W^{\alpha}_{a+}u$. Из условий 1)–3) вытекает, что оператор суперпозиции $F: L_p(a,b) \to L_{p'}(a,b)$ непрерывен, монотонен и коэрцитивен. В силу теоремы 1 оператор дробного интегрирования $W^{\alpha}_{a+} : L_p(a,b) \to L_{p'}(a,b)$ непрерывен и строго положителен. Поэтому оператор $A: L_p(a,b) \to L_{p'}(a,b)$ непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, по теореме 2.1 (Браудера-Минти) [14], уравнение $Au=f$, а с ним и данное уравнение (20), имеет единственное решение $u^* \in L_p(a,b)$.

Осталось доказать оценку (21). Так как $Au^*=f$, то используя последовательно условие 3) при $D(x)=0$, положительность оператора W^{α}_{a+} и неравенство Гельдера, имеем

$$d_2\cdot\|u^*\|_p^p \le \langle Fu^*,u^*\rangle \le \langle Fu^*,u^*\rangle + \langle W^{\alpha}_{a+}u^*,u^*\rangle = \langle Au^*,u^*\rangle = \langle f,u^*\rangle \le \|f\|_{p'}\cdot\|u^*\|_p\,,$$

откуда легко получаем оценку (21). $\square$

Следствие 1. *Пусть $0<\alpha<1$, $\gamma \ge 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда при любом $f \in L_{2n/(2n-1)}(a,b)$ уравнение*

$$u^{2n-1}(x) + \frac{(b-x)^{\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_{2n}(a,b)$, причем $\|u^*\|_{2n} \le \|f\|_{2n/(2n-1)}$.

Рассмотрим теперь другой класс нелинейных интегральных уравнений дробного порядка, соответствующий случаю когда нелинейность находится под знаком интеграла (так называемое уравнение типа Гаммерштейна). В данном случае применить непосредственно теорему Браудера-Минти нельзя, поскольку произведение монотонных операторов не является, вообще говоря, монотонным оператором и поэтому требуется другой подход к исследованию таких классов уравнений. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $1 < p \le 2/(1-\alpha)$ *и выполнено условие (6). Если* $F(x,t)$ *удовлетворяет условиям 1), 3) теоремы 3 и строго возрастает по* t, *то уравнение*

$$u(x) + \frac{w(x)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{F\big[t, u(t)\big]\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x) \tag{22}$$

имеет единственное решение $u^* \in L_p(a,b)$ *при любом* $f \in L_p(a,b)$. *Кроме того, если условия 1) и 3) выполнены при* $c(x) = D(x) = 0$, *то справедлива оценка:*

$$\|u^*\|_p \le d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot \|f\|_p \ . \tag{23}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что оператор F отображает $L_p(a,b)$ на $L_{p'}(a,b)$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Поэтому, в силу леммы 2.1 [2], существует обратный оператор F^{-1}, отображающий $L_{p'}(a,b)$ на $L_p(a,b)$, хеминепрерывный, строго монотонный и такой, что

$$\lim_{\|v\|_{p'} \to \infty} \frac{\langle F^{-1}v, v\rangle}{\|v\|_{p'}} = \infty.$$

Поэтому, с учетом теоремы 2 имеем, что оператор $A = F^{-1} + W^\alpha_{a+}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Браудера-Минти. Значит, уравнение $F^{-1}v + G^\alpha_{a+}v = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_{p'}(a,b)$. Но тогда $u^* = F^{-1}v^* \in L_p(a,b)$ является решением уравнения $u + W^\alpha_{a+}Fu = f$, т.е. данного уравнения (22). В самом деле, так как $F^{-1}v^* + W^\alpha_{a+}v^* = f$, то, в силу доказанного в лемме 2.1 [2, с. 21] равенства $F\,F^{-1}\psi = \psi \quad \forall \psi \in L_{p'}(a,b)$, имеем

$$u^* + W^\alpha_{a+}Fu^* = F^{-1}v^* + W^\alpha_{a+}F\,F^{-1}v^* = F^{-1}v^* + W^\alpha_{a+}v^* = f \ . \tag{24}$$

Докажем единственность решения уравнения (22). В самом деле, если допустить противное, что уравнение (22) имеет два различных решения u_1 и u_2, т.е. $u_1 + W^\alpha_{a+}Fu_1 = f$ и $u_2 + W^\alpha_{a+}Fu_2 = f$, то придем к противоречию:

$$0 = \langle u_1 + W^\alpha_{a+}Fu_1 - u_2 - W^\alpha_{a+}Fu_2, Fu_1 - Fu_2\rangle =$$

$$= \langle u_1 - u_2, Fu_1 - Fu_2\rangle + \langle W^\alpha_{a+}(Fu_1 - Fu_2), Fu_1 - Fu_2\rangle > 0$$

так как в силу строгого возрастания функции $F(x,t)$ по t и теоремы 2, оба последних слагаемых в правой части строго положительны.

Осталось доказать оценку нормы решения. Используя условия 1) и 3) (с учетом, что $c(x) = D(x) = 0$), положительность оператора W^α_{a+}, равенство (24) и неравенство Гельдера, имеем

$$d_2\|u^*\|_p^p \le \langle u^*, Fu^*\rangle \le \langle u^*, Fu^*\rangle + \langle W^\alpha_{a+}Fu^*, Fu^*\rangle = \langle f, Fu^*\rangle \le \|f\|_p\|Fu^*\|_{p'} \le d_1\|f\|_p\|u^*\|_p^{p-1},$$

откуда легко получаем доказываемую оценку.

Следствие 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $\gamma \ge 0$ *и* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда при любом* $f \in L_{2n/(2n-1)}(a,b)$ *уравнение*

$$u(x) + \frac{(b-x)^\gamma}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{u^{1/(2n-1)}(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_{2n/(2n-1)}(a,b)$, *причем* $\|u^*\|_{2n/(2n-1)} \le \|f\|_{2n/(2n-1)}$.

Замечание 1. *Используя результаты работы Х. Брезиса и Ф. Браудера [19] (см. также теорему 3.2 [20] и комментарии после неё), существование и единственность решения в теореме 4 (без оценки нормы решения) можно доказать при условиях 1) и 2), не предполагая выполнение условия коэрцитивности 3).*

Рассмотрим, наконец, класс нелинейных интегральных уравнений, соответствующий случаю когда оператор дробного интегрирования входит в уравнение нелинейно. Обратим внимание на то, что в этом случае ограничения на нелинейность подбираются таким образом, чтобы соответствующий оператор суперпозиции (оператор Немыцкого) действовал непрерывно из сопряженного пространства $L_{p'}(a,b)$ в исходное пространство $L_p(a,b)$, в котором разыскиваются решения, и был строго монотонным и коэрцитивным.

Теорема 5. *Пусть $0<\alpha<1$, $2/(1+\alpha)\le p<\infty$ и выполнено условие (6). Если для почти всех $x\in[a,b]$ и всех $t\in\mathbb{R}$ нелинейность $F(x,t)$ удовлетворяет условиям:*
4) $|F(x,t)|\le g(x)+d_3\cdot|t|^{1/(p-1)}$, *где* $g\in L_p^+(a,b)$, $d_3>0$;
5) $F(x,t)$ *строго возрастает по* t *почти при каждом фиксированном* x;
6) $F(x,t)\cdot t\ge d_4\cdot|t|^{p/(p-1)}-D(x)$, *где* $D\in L_1^+(a,b)$, $d_4>0$;
то уравнение

$$u(x)+F\left[x,\frac{w(x)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right]=f(x) \tag{25}$$

имеет единственное решение $u^*\in L_p(a,b)$ при любом $f\in L_p(a,b)$. Кроме того, если в условиях 4) и 6) $g(x)=0$ и $D(x)=0$, то:

$$\|u^*-f\|_p\le\left[d_3^p\cdot d_4^{-1}\cdot C_1\cdot\|f\|_p\right]^{1/(p-1)}, \tag{26}$$

где число $C_1>0$ определено в теореме 1.

Доказательство. Из теоремы 1 и условий 4)–6) вытекает, соответственно, что оператор $W^\alpha_{a+}:L_p(a,b)\to L_{p'}(a,b)$ непрерывен и строго положителен, а оператор $F:L_{p'}(a,b)\to L_p(a,b)$ непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, по лемме 2.1 [2], существует хеминепрерывный, строго монотонный обратный оператор $F^{-1}:L_p(a,b)\to L_{p'}(a,b)$ и выполняется условие коэрцитивности (2.1а) [2, с. 20]. Запишем уравнение (25) в операторном виде: $u+F\,W^\alpha_{a+}u=f$. Полагая в нем $u=f-v$ приходим к уравнению $F\big(W^\alpha_{a+}f-W^\alpha_{a+}f\big)$. Применив к обеим частям последнего уравнения оператор F^{-1}, получаем уравнение:

$$\Phi v=0\ ,\qquad \text{где } \Phi v\equiv F^{-1}v+W^\alpha_{a+}v-W^\alpha_{a+}f\ . \tag{27}$$

Очевидно, что оператор $\Phi:L_p(a,b)\to L_{p'}(a,b)$ хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен, поскольку

$$\lim_{\|v\|_p\to\infty}\frac{\langle\Phi v,v\rangle}{\|v\|_p}=\infty.$$

Значит, оператор Φ удовлетворяет всем требованиям теоремы Браудера-Минти. Поэтому уравнение (27) имеет единственное решение $v^*\in L_p(a,b)$. Но тогда данное уравнение (25) имеет решение $u^*=f-v^*\in L_p(a,b)$. Покажем, что это решение единственно. Допустим противное, что уравнение (25) имеет два разных решения u_1 и u_2, т.е. $u_1+FW^\alpha_{a+}u_1=f$ и $u_2+FW^\alpha_{a+}u_2=f$. Тогда приходим к противоречию:

$$0=\langle u_1+F\,W^\alpha_{a+}u_1-u_2-F\,W^\alpha_{a+}u_2,W^\alpha_{a+}u_1-W^\alpha_{a+}u_2\rangle=$$

$$=\langle u_1-u_2,W^\alpha_{a+}(u_1-u_2)\rangle+\langle F\,W^\alpha_{a+}u_1-F\,W^\alpha_{a+}u_2,W^\alpha_{a+}u_1-W^\alpha_{a+}u_2\rangle>0$$

так как в силу строгой положительности оператора W^α_{a+} и строгого возрастания функции $F(x,t)$ по t, оба последних слагаемых в правой части строго положительны (заметим, что $W^\alpha_{a+}(u_1-u_2)\ne0$, так как если предположить противное, то получим противоречие: $0=\langle W^\alpha_{a+}(u_1-u_2),u_1-u_2\rangle>0$, в силу строгой положительности оператора W^α_{a+}).

Осталось доказать оценку (26). Воспользуемся доказанными выше равенствами u^*+ $+F\,W^\alpha_{a+}u^*=f$ и $F^{-1}v^*+W^\alpha_{a+}v^*=W^\alpha_{a+}f$, где $u^*=f-v^*$. Положим $\psi=F^{-1}v^*$. Тогда

$F\psi = v^*$. Используя условия 4) и 6) (с учетом, что $g(x) = D(x) = 0$), положительность оператора W^{α}_{a+}, теорему 1 и неравенство Гельдера, имеем

$$d_4 \cdot \|\psi\|^{p'}_{p'} \le \langle F\psi, \psi\rangle = \langle v^*, F^{-1}v^*\rangle \le \langle v^*, F^{-1}v^*\rangle + \langle v^*, W^{\alpha}_{a+}v^*\rangle = \langle v^*, W^{\alpha}_{a+}f\rangle \le$$

$$\le \|v^*\|_p \cdot \|W^{\alpha}_{a+}f\|_{p'} \le \|v^*\|_p \cdot C_1 \cdot \|f\|_p = C_1 \cdot \|f\|_p \cdot \|F\psi\|_p \le C_1 \cdot \|f\|_p \cdot d_3 \cdot \|\psi\|^{p'-1}_{p'} \ ,$$

откуда

$$\|\psi\|_{p'} \le d_3 \cdot d_4^{-1} \cdot C_1 \cdot \|f\|_p \ . \tag{28}$$

Так как

$$\|f - u^*\|_p = \|v^*\|_p = \|F\psi\|_p \le d_3 \cdot \|\psi\|^{p'-1}_{p'} \ ,$$

то, используя оценку (28) с учетом, что $p' - 1 = 1/(p-1)$, получаем

$$\|u^* - f\|_p \le d_3 \cdot \left[d_3 \cdot d_4^{-1} \cdot C_1 \cdot \|f\|_p\right]^{1/(p-1)}$$

- что и требовалось доказать.

Следствие 3. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $\gamma \ge 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда уравнение*

$$u(x) + \left(\frac{(b-x)^{\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right)^{1/(2n-1)} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_{2n}(a,b)$ при любом $f \in L_{2n}(a,b)$, причем

$$\|u^* - f\|_{2n} \le \left(C \cdot \|f\|_{2n}\right)^{1/(2n-1)},$$

где $C = (b-a)^{1+\alpha+\gamma-1/n} n(\alpha)$.

Легко видеть, что теоремы 3–5 остаются справедливыми и в случае оператора W^{α}_{b-}, то есть уравнений с переменным нижним пределом интегрирования. Из оценок (21), (23) и (26) непосредственно вытекает, что при $f(x) = 0$ нелинейные уравнения (20), (22) и (25) имеют лишь тривиальное (нулевое) решение $u^*(x) = 0$.

В заключение отметим, что в рамках пространства $L_2(a,b)$ теоремы 3–5 охватывают и случай соответствующих линейных уравнений с интегралами дробного порядка W^{α}_{a+} и W^{α}_{b-}. Кроме того, следуя работам [20], [21], [22] комбинированием метода монотонных операторов и принципа сжимающих отображений, можно доказать, что решения уравнений (20), (22) и (25) можно найти в пространстве $L_2(a,b)$ методом последовательных приближений пикаровского типа и получить оценки скорости их сходимости.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gorenflo R., Vesella S. Abel integral equations. Analysis and applications. Lecture Notes in Mathematics (Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1991).

2. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки (Физматлит, М., 2009).

3. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications (Cambridg: Univ. Press, 2017).

4. Тихонов А. Н. Об остывании тел при лучеиспускании, следующем закону Stefan'a-Boltzmann'a // Изв. АН СССР (отд. матем. и ест. наук, серия геогр. и геофиз.). 1937. №3. С. 461-479.

5. Zabrejko P., Rogosin S. Nonlinear Abel equation with monotone operators // J. Electrotechn. Math. (Pristina). 1997. №1. P. 53-65.

6. Grasmair M., Hildrum F. Subgradient-based Lavrentiev regularisation of monotone ill-posed problems // Inverse Problems. 2025. Vol. 41. P. 1-35.

7. Okrasinska-Piociniczak H., Piociniczak J. Numerical method for Volterra equation with a power-type nonlinearity // Applied Mathematics and Computation. 2018. Vol. 337. P. 452–460.

8. Andersen K. F., Sawyer E. T. Weighted norm inequalities for the Riemann-Liouville and Weil fractional integral operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 308, №2. P. 547-558.

9. Прохоров Д. В., Степанов В. Д. Весовые оценки операторов Римана-Лиувилля и приложения // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2003. Т. 243. С. 289-312.

10. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения с интегралами дробного порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2007. Т. 9, №3. С. 9-14.

11. Асхабов С. Н., , Джабраилов А. Л. Нелинейные уравнения с интегралами дробного порядка на полуоси // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2012. Т. 14, №1. С. 28-34.

12. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение (Физматлит, М., 2003).

13. Tricomi F. G. Sull' equazioni integrale di Abel con limiti d'integrazione constanti // Rend. Inst. Lombardo. 1927. Vol. 60, №2. P. 598-604.

14. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgleichungen (Berlin: Akademie-Verlag, 1974).

15. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications (Yverdon: Gordon and Breach Science Publishers, 1993).

16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа (Физматлит, М., 2004).

17. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. — Изд. 4-е, испр. (МЦНМО, М., 2002).

18. Нахушев А. М. Еще раз об одном свойстве оператора Римана-Лиувилля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2001. Т. 5, №2. С. 42-43.

19. Brezis H., Browder F. E. Some new results about Hammerstein equations // Bull. Am. Math. Soc. 1974. Vol. 80. P. 567-572.

20. Askhabov S. N. Nonlinear itegral equations with potential-type kernels on a segment // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 235, №4. P. 375-391.

21. Асхабов С. Н. Приближенное решение нелинейных уравнений с весовыми операторами типа потенциала // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, №4. С. 8-13.

22. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега // Математические заметки. 2015. Т. 97, №5. С. 643-654.

REFERENCES

1. Gorenflo R., Vesella S. Abel integral equations. Analysis and applications. Lecture Notes in Mathematics (Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1991).

2. Askhabov S. N. Nonlinear equations of convolution type. (russian) [Nelineinie uravneniya tipa svertki] (Moscow: Fizmatlit, 2009).

3. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications (Cambridg: Univ. Press, 2017).

4. Tikhonov A. N. 1937, "On the cooling of bodies during radiation, following the law of Stefan'a-Boltzmann'a", *Izvestiya Akad. Nauk SSSR (otdelenie matem. i estestv. nauk, seriya geogr. i geofiz.)*, no. 3, pp. 461-479 (in Russian).

5. Zabrejko P. , Rogosin S. 1997, "Nonlinear Abel equation with monotone operators", *J. Electrotechn. Math. (Pristina)*, no. 1, pp. 53-65.

6. Grasmair M., Hildrum F. 2025, "Subgradient-based Lavrentiev regularisation of monotone ill-posed problems", *Inverse Problems*, vol. 41, pp. 1-35.

7. Okrasinska-Piociniczak H., Piociniczak J. 2018, "Numerical method for Volterra equation with a power-type nonlinearity", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 337, pp. 452–460.

8. Andersen K. F., Sawyer E. T. 1988, "Weighted norm inequalities for the Riemann-Liouville and Weil fractional integral operators", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol.308, no. 2, pp.547-558.

9. Prokhorov D. V., Stepanov V. D. 2003, "Weighted Estimates for the Riemann–Liouville Operators and Applications", *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*, vol. 243, pp. 289–312.

10. Askhabov S. N., 2007, "Nonlinear equations with fractional-order integrals", *Reports of Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences*, vol. 9, no. 3, pp. 9-14.

11. Askhabov S. N., Dzhabrailiv A. L., 2012, "Nonlinear equations with fractional-order integrals on the semi-axis", *Reports of Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences*, vol. 14, no. 1, pp. 28-34.

12. Nakhushev A. M. Drobnoe ischislenie i ego prilogenie [Fractional calculus and its applications] (Moscow: Fizmatlit, 2003).

13. Tricomi F. G. 1927, "Sull' equazioni integrale di Abel con limiti d'integrazione constanti", *Rend. Inst. Lombardo.*, vol. 60, no. 2, pp. 598-604.

14. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgleichungen (Berlin: Akademie-Verlag, 1974).

15. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications (Yverdon: Gordon and Breach Science Publishers, 1993).

16. Kolmogorov A. N. and Fomin S. V. Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis] (Moscow: Fizmatlit, 2004). (in Russian).

17. Zorich V. A. Mathematical Analysis. Part I. — 4th edition, revised (Moscow: MCNMO, 2002).

18. Nakhushev A. M., 2001, “Once again, about one property of the Riemann-Liouville operator”, *Reports of Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences*, vol. 5, no. 2, pp. 42-43.

19. Brezis H., Browder F. E. 1974, “Some new results about Hammerstein equations”, *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 80, pp. 567-572.

20. Askhabov S. N. 2018, “Nonlinear itegral equations with potential-type kernels on a segment”, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 235, no. 4, pp. 375-391.

21. Askhabov S. N. 2011, “Approximate solution of nonlinear equations with weighted potential type operators”, *Ufimskii Matematicheskii Zhurnal*, vol. 3, no. 4, pp. 8-13.

22. Askhabov S. N. 2015, “Nonlinear Convolution-Type Equations in Lebesgue Spaces”, *Matematicheskie Zametki*, vol. 97, no. 5, pp. 643-654.

Получено: 04.05.2025
Принято в печать: 27.08.2025