ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16. Выпуск 4.

УДК 511.9.

ПОКАЗАТЕЛЬ СХОДИМОСТИ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ПОЛНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СУММ[1]

В. Н. Чубариков (г. Москва)

Аннотация

В данной работе найдено точное значения показателя сходимости среднего значения полных рациональных арифметических сумм для арифметической функции, удовлетворяющей функциональному уравнению гауссова типа.

В частности, многочлены Бернулли удовлетворяют этому уравнению. Подобный результат справедлив для полных рациональных тригонометрических сумм (Хуа Ло-кен, 1952).

Вывод основного результата работы проводится элементарным методом. Мы обязаны И. М. Виноградову за демонстрацию плодотворных результатов и выгоды этого метода.

Полные рациональные арифметические суммы являются аналогами осцилляторных интегралов от периодических функций, например, тригонометрических функций. В 1978 г. были получены подобные результаты для точного значения показателя сходимости тригонометрического интеграла (Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков).

Для многомерной проблемы в настоящее время удается получить только верхние и нижние оценки показателя сходимости соответствующих сумм и интегралов.

Ключевые слова: теорема Гаусса умножения для гамма-функции Эйлера, полные рациональные арифметические суммы, функциональное уравнение по полной системе вычетов по модулю натурального числа, многочлены Бернулли.

Библиография: 19 названий.

THE RATE OF CONVERGENCE OF THE AVERAGE VALUE OF THE FULL RATIONAL ARITHMETIC SUMS

V. N. Chubarikov (Moscow)

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № НК 13-01-00835

Abstract

In this paper the exact value of a index of convergence for the mean-value of the complete rational arithmetical for the arithmetical function, satisfying the functional equation of Gaussian type, is found. In particular, the Bernoulli's polynomials satisfy for this functional equation.

A similar result holds for the complete rational trigonometric sums (Hua Loo-keng, 1952). The deduction of the main result of the paper leads of the elementary method. We owe to I. M. Vinogradov for the demonstration of fruitful results and profit of it.

The complete rational arithmetic sums are the analogue the oscillatory integral of a periodic function, for example, trigonometric functions. In 1978 similar results for the exact value of the index of convergence of the trigonometric integral were obtained (G. I. Arkhipov, A. A. Karatsuba, V. N. Chubarikov).

In nowadays for a multivariate problem there are successful to get only upper and lower estimates for the index of convergence of appropriate sums and integrals.

Keywords: the Gauss theorem of a multiplication for the Euler gamma-function, complete rational arithmetical sums, a functional equation on a complete system of residues by modulo of natural number, the Bernulli polynomials.

Bibliography: 19 titles.

1. Введение

Настоящую статью автор посвящает Владимиру Петровичу Платонову к его семидесятипятилетию.

Пусть s — натуральное число, $F(x)$ — периодическая функция с периодом 1, которая для любого натурального числа m и a — взаимно простого с m, при любых вещественных x удовлетворяет следующему функциональному уравнению

$$m^{1-s}F(mx) = F(x) + F\left(x + \frac{a}{m}\right) + \dots + F\left(x + \frac{a(m-1)}{m}\right). \quad (1)$$

Подобное уравнение было найдено Гауссом для гамма-функции Эйлера и соответствующее утверждение было названо теоремой умножения. При $0 \leq x < 1$ соотношение (1) выполняется для многочленов Бернулли $B_s(x)$, которые при $s \geq 1$ можно определить так:

$$B_0(x) = 1, B_s'(x) = sB_{s-1}(x), \int_0^1 B_s(x)\,dx = 0,$$

причем

$$B_s(x) = -\frac{s!}{(2\pi i)^s} \sum_{|\nu|\geq 1} \frac{e^{2\pi i\nu x}}{\nu^s}, B_s(1-x) = (-1)^s B_s(x),$$

где при $s = 1$ сумма ряда понимается как главное значение по Коши.

Кроме того, при $s = 1$ уравнению (1) удовлетворяет функция F вида

$$F(x) = \ln\left(1 - e^{2\pi i x}\right) = \ln|2\sin \pi x| - i\pi\rho(x),$$

где $\rho(x) = 0,5 - \{x\}$. В дальнейшем будем предполагать еще, что $F(x)$ — ограниченная функция, т.е. найдется $C > 0$ такое, что для всех вещественных x имеем $F(x) \leq C$. Пусть также $F(x)$ является кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной на периоде, т.е. $F(x)$ удовлетворяет условиям утверждения теоремы Дирихле о разложении функции в сходящийся ряд Фурье.

Пусть, далее, p — нечетное простое число, l — натуральное число. Назовем полной рациональной арифметической суммой $S(F)$ сумму вида

$$S(F) = S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right) = \sum_{x=1}^{p^l} F\left(\frac{f(x)}{p^l}\right), \tag{2}$$

где $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами $a_n, \ldots, a_1$, свободный коэффициент a_0 — вещественное число и $(a_n, \ldots, a_1, p) = 1$.

Средним значением $\sigma_p = \sigma_p(2k)$ полной рациональной арифметической суммы $S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right)$ назовем выражение вида

$$\sigma_p = 1 + \sum_{l=1}^{+\infty} A(p^l),$$

где

$$A(p^l) = \sum_{a_n=0}^{p^l-1} \cdots \sum_{\substack{a_1=0 \\ (a_n,\ldots,a_1,p)=1}}^{p^l-1} \int_0^1 \left| p^{-l} S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right)\right|^{2k} d\alpha_0, \quad f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + \alpha_0.$$

В настоящей статье мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Ряд $\sigma_p = \sigma_p(2k)$ сходится при $2k > 0,5n(n+1)+1$ и расходится при $2k \leq 0,5n(n+1)+1$.*

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть p — простое число, $g(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, a — корень кратности m сравнения $g(x) \equiv 0 \pmod p$, и пусть u — наибольшая степень числа p, делящая все коэффициенты многочлена $h(x) = g(px + a)$. Тогда число корней сравнения*

$$p^{-u} h(x) \equiv 0 \pmod p$$

с учетом их кратностей не превосходит m.

Доказательство. См., например, в [6], с. 55, лемма 2.

Лемма 2. *Пусть p — простое число, $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, $(a_n, \ldots, a_1, p) = 1$, и пусть u — наивысшая степень числа p, делящая все коэффициенты многочлена $g(x) = f(\lambda+px)-f(\lambda)$. Тогда имеем $1 \le u \le n$.*

Доказательство. См., например, [6], с. 56, лемма 3.

Пусть p — простое число, $l \ge 2$ — натуральное число, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $(a_n, \ldots, a_1, p) = 1$. Рассмотрим сначала случай, когда p превосходит степень многочлена f, т.е. $p > n$. Представим сумму $S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right)$ в виде

$$S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right) = \sum_{\xi=1}^{p} S_\xi, \quad S_\xi = \sum_{\substack{x=1 \\ x\equiv\xi \pmod p}}^{p^l} F\left(\frac{f(x)}{p^l}\right). \tag{3}$$

Имеем следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $f'(\xi) \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда $S_\xi = F\left(\frac{f(\xi)}{p}\right)$.*

Доказательство. Имеем

$$S_\xi = \sum_{\substack{y=1 \\ y\equiv\xi \pmod p}}^{p^{l-1}} \sum_{z=0}^{p-1} F\left(\frac{f(y+p^{l-1}z)}{p^l}\right) = \sum_{\substack{y=1 \\ y\equiv\xi \pmod p}}^{p^{l-1}} \sum_{z=0}^{p-1} F\left(\frac{f(y)}{p^l} + \frac{f'(y)z}{p}\right). \tag{4}$$

Воспользуемся функциональным уравнением (1). Найдем

$$S_\xi = \sum_{\substack{y=1 \\ y\equiv\xi \pmod p}}^{p^{l-1}} F\left(\frac{f(y)}{p^{l-1}}\right).$$

Повторяя эту процедуру, получим

$$S_\xi = \sum_{\substack{y=1 \\ y\equiv\xi \pmod p}}^{p^{l-2}} F\left(\frac{f(y)}{p^{l-2}}\right) = \cdots = \sum_{\substack{y=1 \\ y\equiv\xi \pmod p}}^{p} F\left(\frac{f(y)}{p}\right) = F\left(\frac{f(\xi)}{p}\right).$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть $f'(\xi) \equiv 0 \pmod p$. Тогда*

$$S_\xi = \sum_{\substack{y=1 \\ y\equiv\xi \pmod p}}^{p^{l-1}} pF\left(\frac{f(y)}{p^l}\right) = p\sum_{y=1}^{p^{l-2}} F\left(\frac{f(\xi+py)}{p^l}\right).$$

Доказательство. Находим

$$S_\xi = \sum_{\substack{y=1\\ y\equiv\xi \pmod p}}^{p^{l-1}} \sum_{z=0}^{p-1} F\left(\frac{f(y)}{p^l}+\frac{f'(y)z}{p}\right) =$$

$$= p \sum_{\substack{y=1\\ y\equiv\xi \pmod p}}^{p^{l-1}} F\left(\frac{f(y)}{p^l}\right) = p\sum_{y=1}^{p^{l-2}} F\left(\frac{f(\xi+py)}{p^l}\right).$$

Лемма доказана. □

3. Вывод теоремы об оценке суммы при $p > n$.

Преобразуем сумму $S(F)$ из формулы (3). Найдем

$$S(F) = S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right) = \sum_{v=1}^{p} S_v = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{\xi} S_\xi, \quad \Sigma_2 = \sum_{\substack{v=1\\ v\neq\xi}}^{p} S_v,$$

причем ξ пробегает по всем различным решениям сравнения $f'(\xi) \equiv 0 \pmod p$.

Применяя леммы 3 и 4, получим

$$\Sigma_1 = p\sum_{\xi}\sum_{y=1}^{p^{l-2}} F\left(\frac{f(\xi+py)}{p^l}\right),$$

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{v=1\\ v\neq\xi}}^{p} F\left(\frac{f(v)}{p}\right) = \sum_{v=1}^{p} F\left(\frac{f(v)}{p}\right) + \theta C n, \quad |\theta| \leq 1.$$

Преобразуем далее Σ_1. Имеем

$$\Sigma_1 = p\sum_{\xi}\sum_{y=1}^{p^{l-2}} F\left(\frac{f(\xi+py)-f(\xi)}{p^l}+\frac{f(\xi)}{p^l}\right).$$

Так как $f'(\xi) \equiv 0 \pmod p$, то по лемме 2 находим $f(\xi+py)-f(\xi) = p^{u_1} f_1 y$ и $u_1 \geq 2$, причем коэффициенты многочлена $f_1(y)$ в совокупности просты с p. Если же $l < u_1$, то сумму Σ_1 оценим тривиально числом слагаемых: $|\Sigma_1| \le Cnp^{l-1}$. Следовательно, при $l \ge u_1$ справедливо соотношение

$$\Sigma_1 = p^{u_1-1}\sum_{\xi}\sum_{v=1}^{p} S_{\xi,v}, \quad S_{\xi,v} = \sum_{\substack{y=1 \\ y\equiv v \pmod p}}^{p^{l-u_1}} F\left(\frac{f_1(y)}{p^{l-u_1}} + \frac{f(\xi)}{p^l}\right).$$

Пусть η корень сравнения $f_1'(\eta) \equiv 0 \pmod p$ и $f_1(\eta+py) - f_1(\eta) = p^{u_2}f_2(y)$, где многочлен $f_2(y)$ имеет коэффициенты в совокупности простые с p. При $u_1 \le l \le u_1+u_2$, оценивая тривиально $S_{\xi,\eta}$, найдем $|\Sigma_1| \le np^{l-2}$.

Пусть, теперь, $l > u_1+u_2$. Тогда представим Σ_1 в виде $\Sigma_1 = \Sigma_{11} + \Sigma_{12}$, где

$$\Sigma_{11} = p^{u_1-1}\sum_{\xi,\eta} S_{\xi,\eta},$$

$$\Sigma_{12} = p^{u_1-1}\sum_{\xi}\sum_{\substack{v=1 \\ v\ne\eta}}^{p} F\left(\frac{f_1(v)}{p} + \frac{f(\xi)}{p^{u_1-1}}\right) = p^{u_1-1}\sum_{v=1}^{p} F\left(\frac{f_1(v)}{p} + \frac{f(\xi)}{p^{u_1-1}}\right) + \\ + \theta_1 Cnp^{u_1-1}, \quad |\theta_1| \le 1.$$

Преобразуем сумму Σ_{11}. Имеем

$$\Sigma_{11} = p^{u_1-1}\sum_{\xi,\eta}\sum_{\substack{y=1 \\ y\equiv\eta \pmod p}}^{p^{l-u_1}} F\left(\frac{f_1(y)}{p^{l-u_1}} + \frac{f(\xi)}{p^l}\right) =$$

$$= p^{u_1-1}\sum_{\xi,\eta}\sum_{z=1}^{p^{l-u_1-1}} F\left(\frac{f_1(\eta+pz)-f_1(\eta)}{p^{l-u_1}} + \frac{f_1(\eta)}{p^{l-u_1}} + \frac{f(\xi)}{p^l}\right) =$$

$$= p^{u_1-1}\sum_{\xi,\eta}\sum_{z=1}^{p^{l-u_1-1}} F\left(\frac{f_2(z)}{p^{l-u_1-u_2}} + \frac{f_1(\eta)}{p^{l-u_1}} + \frac{f(\xi)}{p^l}\right) =$$

$$= p^{u_1+u_2-2}\sum_{\xi,\eta}\sum_{z=1}^{p^{l-u_1-u_2}} F\left(\frac{f_2(z)}{p^{l-u_1-u_2}} + \frac{f_1(\eta)}{p^{l-u_1}} + \frac{f(\xi)}{p^l}\right).$$

По лемме 1 количество наборов корней $\xi,\eta,\ldots$ не превосходит $n-1$ и для каждого такого набора корней однозначно находятся набор показателей $(u_1,u_2,\ldots)$ и число $t = t(\xi,\eta,\ldots)$ такие, что

$$l-u_1-u_2-\cdots-u_t > 1, \quad l-u_1-u_2-\cdots-u_{t+1} \le 1.$$

Отсюда получим

$$S(F)=S\left(\frac{f(x)}{p^l};F\right)=\sum_{\xi,\eta,\dots,\zeta}p^{u_1+\dots+u_t-t}T(u_1,u_2,\dots,u_t)+R,$$

где

$$T(u_1,u_2,\dots,u_t)=\sum_{y=1}^{p^{l-u_1-u_2-\dots-u_t}}F\left(\frac{f(\xi)}{p^l}+\frac{f_1(\eta)}{p^{l-u_1}}+\dots+\frac{f_t(\zeta)}{p^{l-u_1-u_2-\dots-u_t}}+\right.$$
$$\left.+\frac{f_t(\zeta+py)-f_t(\zeta)}{p^{l-u_1-u_2-\dots-u_t}}\right),$$

$$R=\sum_{h=0}^{t-1}p^{u_1+\dots+u_h-h}\sum_{y=1}^{p}F\left(\frac{f(\xi)}{p^{u_1+\dots+u_h}}+\frac{f_1(\eta)}{p^{u_1+\dots+u_{h-1}}}+\dots+\frac{f_h(y)}{p}\right)+$$
$$+\sum_{h=0}^{t-1}\theta_h np^{u_1+\dots u_h-h},\quad |\theta_h|\le 1.$$

Пусть s обозначает наименьшую длину $t=t(\xi,\eta,\dots,\zeta)$. Тогда

$$|S(F)|\le 2Cnp^{l-s}.$$

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $n\ge 3, l\ge 1$ — натуральные числа, $p>n$ — простое число, $f(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, $(a_n,\dots,a_1,p)=1$; и пусть s — наименьшая длина $t=t(\xi,\eta,\dots,\zeta)$, отвечающая цепочке показателей $(u_1,\dots,u_t)$. Тогда справедлива оценка*

$$|S(F)|=\left|S\left(\frac{f(x)}{p^l};F\right)\right|\le 2Cnp^{l-s}.$$

4. Цепочка показателей

Теперь рассмотрим случай малых простых чисел p. Это потребует модификации предыдущих рассмотрений.

Пусть $n\ge 3, l\ge 1$ — натуральные числа, $p\le n$ — простое число, $f(x)= =a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, $(a_n,\dots,a_1,p)=1$.

Первый шаг конструкции. Определим показатель τ_0 из условия

$$p^{\tau_0}\|(na_n,\dots,a_1).$$

Положим $w=[\ln n/\ln p]$. Имеем $\tau_0\le w$. Пусть,далее, ξ — корень сравнения

$$p^{-\tau_0}f'(\xi)\equiv 0 \pmod p.$$

Для этого решения ξ предыдущего сравнения рассмотрим многочлен $f_1(y) = f(y+\xi) = \sum_{s=0}^{n} b_s y^s$. Имеем $f(x) = f_1(x-\xi)$. Отсюда следует,что коэффициенты этих многочленов удовлетворяют соотношениям

$$b_n = a_n,$$
$$b_{n-1} = a_{n-1} + \binom{n}{1} a_n\xi,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$b_s = a_s + \binom{s+1}{s} a_{s+1}\xi + \dots + \binom{n}{s} a_n\xi^{n-s},$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$b_1 = a_1 + \binom{2}{1} a_2\xi + \dots + \binom{n}{1} a_n\xi^{n-1}, \tag{5}$$

или

$$a_n = b_n,$$
$$a_{n-1} = b_{n-1} - \binom{n}{1} b_n\xi,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$a_s = b_s - \binom{s+1}{s} b_{s+1}\xi + \dots + (-1)^{n-s}\binom{n}{s} a_n\xi^{n-s},$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$b_1 = a_1 - \binom{2}{1} a_2\xi + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{1} a_n\xi^{n-1}.$$

Из этих соотношений имеем, что $p^{\tau_0}\|(nb_n, \dots, 2b_2, b_1)$. Подчеркнем, что величина τ_0 одна и та же как для коэффициентов $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$, так и для $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1$.

Первый шаг конструкции завершается тем, что рассматриваются все корни $\xi = \xi_1, \dots, \xi_m, m \leq n$ полиномиального сравнения

$$p^{-\tau_0} f'(\xi) = p^{-\tau_0} b_1 \equiv 0 \pmod p.$$

Далее для каждого корня ξ определяется свой показатель $u_1 = u_1(\xi)$ из следующего условия точной делимости

$$p^{u_1}\|(p^n b_n, \dots, p^2 b_2, p b_1).$$

Если $l-u_1 > 2w+1$, то переходим ко второму шагу. В противном случае цепочка показателей, отвечающая корню ξ будет состоять из одного числа $u_1 = u_1(\xi)$.

Второй шаг. Зафиксируем корень ξ и отвечающий ему показатель $u_1 = u_1(\xi)$. Имеем

$$f(py+\xi) - f(\xi) = p^{u_1} f_1(y), \quad f_1(y) = c_n y^n + \dots + c_1 y,$$

где
$$(c_n, \dots, c_1, p) = 1, \quad p^{u_1} c_s = p^s b_s, \quad s = n, \dots, 1.$$
Пусть $p^{\tau_1} \| (nc_n, \dots, 2c_2, c_1)$. Определим многочлен
$$g_1(y) = f_1(y + \eta) = \sum_{s=0}^{n} d_s y^s.$$

Находим
$$p^{\tau_1} \| (nd_n, \dots, 2d_2, d_1).$$
Пусть, теперь, $\eta = \eta_1, \dots, \eta_r$ корни сравнения
$$p^{-\tau_1} f_1'(\eta) = p^{-\tau_1} d_1 \equiv 0 \pmod{p}.$$
Зафиксируем корень η и найдем показатель $u_2 = u_2(\xi, \eta)$ из условия
$$p^{u_2} \| (p^n d_n, \dots p^2 d_2, p d_1).$$
Если $l - u_1 - u_2 \le 2w + 1$, то цепочка показателей, отвечающая набору корней ξ, η будет состоять из двух чисел u_1, u_2. В противном случае переходим к следующему шагу.

Итак, набору корней $(\xi, \eta, \dots)$ отвечает цепочка показателей $(u_1, u_2, \dots, u_t)$, где длина цепочки $t = t(\xi, \eta, \dots)$ находится из условий
$$l - u_1 - \dots - u_{t-1} > 2w + 1, \quad l - u_1 - \dots - u_t \le 2w + 1.$$

Лемма 5. *Пусть p — простое число, $f(x)$ — многочлен степени n с целыми коэффициентами, взаимно простыми в совокупности с p. Тогда количество наборов показателей $(u_1, u_2, \dots)$ многочлена $f(x)$ не превосходит n.*

Доказательство. См., например, в [6], с. 63, лемма 5.

Лемма 6. *Имеем $n \ge u_1 \ge u_2 \ge u_t \ge 2$.*

Доказательство. См., например, в [6], с. 63, лемма 6.

Лемма 7. *Пусть $n \ge 3, l$ — натуральные числа, p — простое число, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, $(a_n, \dots, a_1, p) = 1$, и пусть s — наименьшая длина $t = t(\xi, \eta, \dots)$ цепочки показателей $u_1, \dots, u_t$, определенная перед формулировкой леммы 5. Тогда для суммы*
$$S(F) = S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right) = \sum_{x=1}^{p^l} F\left(\frac{f(x)}{p^l}\right)$$
имеем оценку
$$|S(F)| \le np^{l-s}.$$

Доказательство. Схема вывода леммы 7 близка к [6], с. 63, теорема 3. Пусть $p^\tau \| (na_n, \dots, 2a_2, a_1)$, т.е. p^τ — наивысшая степень числа p, делящая наибольший общий делитель чисел $na_n, \dots, 2a_2, a_1$. Тогда $\tau \le w = [\ln n/\ln p]$. Если $l \le 2w+1$, то сумму $S(F)$ оценим тривиально $|S(F)| \le Cp^l$. Если же $l > 2w+1$, то рассмотрим различные корни ξ сравнения

$$p^{-\tau} f'(\xi) \equiv 0 \pmod p, \quad 0 \le \xi < p. \tag{6}$$

Далее представим сумму $S(F)$ в виде

$$S(F) = \sum_{v=1}^{p} S_v, \quad S_v = \sum_{\substack{x=1 \\ x \equiv v \pmod p}}^{p^l} F\left(\frac{f(x)}{p^l}\right).$$

Преобразуем сумму S_v с помощью подстановки

$$x = y + p^{l-\tau-1} z,$$

где переменная y пробегает все вычеты по модулю $p^{l-\tau-1}$, а z — все вычеты по модулю $p^{\tau+1}$. Получим

$$S_v = \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv v \pmod p}}^{p^{l-\tau-1}} \sum_{z=0}^{p^{\tau+1}-1} F\left(\frac{f(y)}{p^l} + \frac{zf'(y)}{p^{\tau+1}}\right)$$

Возможны две ситуации: 1) $v \ne \xi$, т.е. v не равно ни одному из корней ξ сравнения (6); 2) для некоторого корня ξ сравнения (6) $v = \xi$.

Рассмотрим случай 1). Пусть $v \ne \xi$, т.е. $p^{-\tau} f'(v) \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда для $y \equiv v \pmod p$ находим

$$\sum_{z=0}^{p^{\tau+1}-1} F\left(\frac{f(y)}{p^l} + \frac{zf'(y)}{p^{\tau+1}}\right) = \sum_{t=1}^{p^\tau} F\left(\frac{f(v+pt)}{p^{l-1}}\right).$$

Отсюда имеем

$$S_v = \sum_{\substack{x=1 \\ x \equiv v \pmod p}}^{p^{l-1}} F\left(\frac{f(x)}{p^{l-1}}\right).$$

Повторим эту процедуру s раз так, чтобы $s = l - 2w$. Получим

$$S_v = \sum_{\substack{x=1 \\ x \equiv v \pmod p}}^{p^{2w}} F\left(\frac{f(x)}{p^{2w+1}}\right).$$

Перейдем к рассмотрению случая 2). После замены переменной $y = \xi + pz$ имеем

$$S_\xi = \sum_{z=1}^{p^{l-1}} F\left(\frac{f(\xi+pz)-f(\xi)}{p^l} + \frac{f(\xi)}{p^l}\right).$$

Полагая

$$f_1(z) = p^{-u_1}(f(\xi+pz)-f(\xi)),$$

где $f_1(z) = c_n z^n + \dots + c_1 z$ — многочлен, коэффициенты которого в совокупности взаимно просты с p, находим

$$S_\xi = p^{u_1-1}\sum_{z=1}^{p^{l-u_1}} F\left(\frac{f_1(z)}{p^{l-u_1}} + \frac{f(\xi)}{p^l}\right).$$

Если $l - u_1 > 2w+1$, то продолжим процедуру далее. Имеем

$$S_\xi = \sum_{v_1=1}^{p} S_{\xi,v_1}, \quad S_{\xi,v_1} = p^{u_1-1}\sum_{\substack{z=1\\ z\equiv v_1 \pmod p}}^{p^{l-u_1}} F\left(\frac{f_1(z)}{p^{l-u_1}} + \frac{f(\xi)}{p^l}\right).$$

Повторим эту процедуру несколько раз до тех пор пока

$$l - u_1 - \dots - u_t > 2w+1, \quad l - u_1 - \dots - u_t - u_{t+1} \le 2w+1.$$

Отсюда получим следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $n \ge 3, l \ge 1$ — натуральные числа, p — простое число, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, $(a_n, \dots, a_1, p) = 1$; и пусть s — наименьшая длина $t = t(\xi, \eta, \dots, \zeta)$, отвечающая цепочке показателей $(u_1, \dots, u_t)$. Тогда справедлива оценка*

$$|S(F)| = \left|S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right)\right| \le 2Cnp^{l-s}.$$

5. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим среднее значение $\sigma_p = \sigma_p(2k)$ полной рациональной арифметической суммы $S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right)$ вида

$$\sigma_p = 1 + \sum_{l=1}^{+\infty} A(p^l),$$

где

$$A(p^l) = \sum_{\substack{a_n=0\\ (a_n,\dots,a_1,p)=1}}^{p^l-1} \cdots \sum_{a_1=0}^{p^l-1} \int_0^1 \left|p^{-l} S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right)\right|^{2k} d\alpha_0, \quad f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + \alpha_0,$$

причем полная рациональная арифметическая сумма $S(F)$ сумма имеет вид

$$S(F) = S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right) = \sum_{x=1}^{p^l} F\left(\frac{f(x)}{p^l}\right),$$

где $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + \alpha_0$ — многочлен с целыми коэффициентами $a_n, \dots, a_1$, свободный коэффициент α_0 — вещественное число и $(a_n, \dots, a_1, p) = 1$.

Оценим сверху сумму $A(p^l)$. Коэффициенты многочлена $f(x)$ изменяются в пределах $0 \le a_n, \dots, a_1 < p^l$ и удовлетворяют условию $(a_n, \dots, a_1, p) = 1$. Разобьем все многочлены на классы K_s, отвечающие любой наперед заданной минимальной длине s цепочки показателей $u_1, \dots, u_s$ при заданных значениях $u_1, \dots u_s$. По теоремам 2 и 3 имеем

$$\left| p^{-l} S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right)\right| \le 2Cnp^{-s}$$

Теперь оценим сверху количество многочленов, принадлежащих классу K_s. Из равенств (5) и определения корней полиномиального сравнения для производной $f(x)$ по модулю p находим

$$|K_s| \le p^A, \quad A = ns - \frac{(u_1 - 1)u_1}{2} - \dots - \frac{(u_s - 1)u_s}{2},$$

где $l - 2w - 1 \le l_1 = u_1 + \dots + u_s \le l$.

Воспользовавшись леммами 5 и 6, получим

$$A \le s\frac{(n+1)n}{2} + n(l - l_1) \le s\frac{(n+1)n}{2} + n(2w+1).$$

Далее, количество многочленов, имеющих заданный набор показателей $(u_1, \dots, u_s)$, не превосходит $l^n p^s$. Следовательно,

$$A(p^l) \le \sum_{s \ge s_0} (2Cn)^{2k} l^n p^{n(2w+1)} p^{s(-2k+0{,}5n(n+1)+1)}, \quad s_0 = \max\left\{1, \frac{l - 2w - 1}{n}\right\}.$$

Отсюда следует, что σ_p сходится при $2k > 0{,}5n(n+1) + 1$.

При $p > n$ ряд σ_p расходится при $2k \le 0{,}5n(n+1) + 1$. При $0 \le a_n < p^n$, $(a_n, p) = 1, \dots, 0 \le a_1 < p, (a_1, p) = 1$, имеем

$$S(F) = \sum_{x=1}^{p^n} F\left(\frac{a_n}{p^n}x^n + \dots + \frac{a_1}{p}x\right) = F(0)p^{n-1}.$$

Поскольку $\sigma_p > \sigma(p)$ и ряд

$$\sigma(p) = \sum_{\substack{a_n=0\\(a_n,p)=1}}^{p^n-1} \dots \sum_{\substack{a_1=0\\(a_1,p)=1}}^{p-1} \sum_{c=0}^{p-1} \left| \sum_{x=1}^{p^n} F\left(\frac{a_n}{p^n}(x+c)^n + \dots + \frac{a_1}{p}(x+c)\right)\right|^{2k}$$

является расходящимся, ряд σ_p также расходится.

6. Заключение

В настоящей работе продолжены исследования по нахождению точного значения показателя сходимости полных рациональных сумм с функцией, удовлетворяющей функциональному уравнению вида (1). Как известно, данному функциональному уравнению удовлетворяют многочлены Бернулли. Представляется интересным вопрос о нахождении всех решений этого функционального уравнения и изучении осцилляционных свойств соответствующих коротких и очень коротких арифметических сумм.

Отметим, что подобный результат имеет место для выщербленных многочленов вида

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_r x^r + \cdots + a_n x_n}{p^l},$$
$$(a_m, a_r, \ldots, a_n, p) = 1, \quad 0 \leq a_m, a_r, \ldots, a_n < p^l,$$

где $1 \leq m < r < \cdots < n, m + r + \cdots + n < \frac{n(n+1)}{2}$.

Среднее значение σ_p' таких многочленов представляется в форме

$$\sigma_p' = 1 + \sum_{l=1}^{+\infty} A_1(p^l), \quad A_1(p^l) = \sum_{a_m=0}^{p^l-1} \sum_{a_r=0}^{p^l-1} \cdots \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_m, a_r, \ldots, a_n, p)=1}}^{p^l-1} \left| p^{-l} S\left(\frac{f(x)}{p^l}; F\right) \right|^{2k}.$$

Справедливо следующее утверждение, что σ_p' сходится при $2k > m + r + \cdots + n$ и расходится при $2k \leq m + r + \cdots + n$.

Еще более интересной является задача об изучении аналогичных свойств для кратных рациональных арифметических сумм. Заметим, что для полной суммы имеет место оценка

$$\left| S\left(\frac{G(x_1, \ldots, x_r)}{q}; F\right) \right| \ll_{n,r} q^{r-1/n} (\tau(q))^{r-1},$$

где $G(x_1, \ldots, x_r)$ — многочлен с целыми коэффициентами, в совокупности простыми с q, причем степень его по каждой переменной не превосходит n. Отсюда находится оценка сверху для показателя сходимости среднего значения кратных полных рациональных сумм. Она имеет вид $nm/2, m = (n+1)^r$. На наш взгляд, задача о точном значении данного показателя сходимости представляет собой большой интерес.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2-е изд., М.: Наука, 1980, 144 с.

2. Hua L.-K. An improvement of Vinogradov's mean-value theorem and several applications// Quart. J. Math. 1949. V.20. P. 48–61.

3. Архипов Г. И. Теорема о среднем значении модуля кратной тригонометрической суммы// Мат. заметки. 1975. Т.17. С. 84–90.

4. Архипов Г. И. Избранные труды. Орел: Изд-во Орловского гос. ун-та, 2013. 464 с.

5. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы//Изв. АН СССР, Сер. мат. 1976, Т.17, №1. С.209–220.

6. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987. 368 с.

7. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39. Berlin, New York, 2004. 554 с.

8. Franel J. Les suites de Farey et le probleme des nombres premiers// Göttinger Nachrichten. 1924, S. 198–201.

9. Landau E. Vorlesungen über Zahlentheorie. Leipzig, 1927 V.2. 240 с.

10. Романов Н. П. Теория чисел и функциональный анализ: сборник трудов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. 478 с.

11. Greaves G. R. H., Hall R. R., Huxley M. N., Wilson J. C. Multiple Franel Integrals// Mathematika, 1993. V.40. P.51–70.

12. Чубариков В. Н. Об одном кратном тригонометрическом интеграле// Докл. АН СССР. 1976. Т.227, № 6. С. 1308–1310.

13. Чубариков В. Н. О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах// Мат. заметки. 1978. Т.20, № 1. С. 61–68.

14. Чубариков В. Н. О показателе сходимости особого интеграла одной многомерной аддитивной проблемы// Докл. АН СССР. 2015. Т.463, № 5. С. 530.

15. Чубариков В. Н. Арифметические суммы и гауссова теорема умножения// Чебышевский сборник. 2015. Т.16, вып. 2(54). С. 231–253.

16. Чубариков В. Н. Элементарный вывод оценки полной рациональной арифметической суммы от многочлена// Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 3(55). С. 452–461.

17. Чубариков В. Н. Полные рациональные арифметические суммы// Вестник Моск. ун-та. Сер. мат., мех. 2016. Вып. 1. С. 60–61.

18. Чубариков В. Н. Арифметические суммы от значений многочленов// Докл. РАН. 2016. Вып. 466, № 2. С. 1–2.

19. Шихсадилов М. Ш. Об одном классе осцилирующих интегралов, Вестник Моск. ун-та. Сер. мат., мех. 2015. Вып. 5. С. 61–63.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M. Metod trigonometricheskikh summ v teorii chisel.(Russian) [The method of trigonometric sums in the theory of numbers] Second edition. “Nauka”, Moscow, 1980. 144 pp.

2. Hua L.-K. 1949, “An improvement of Vinogradov’s mean-value theorem and several applications”, *Quart. J. Math.* vol. 20, pp. 48–61.

3. Arhipov, G. I. 1975, “A theorem on the mean value of the modulus of a multiple trigonometric sum”, *Mat. Zametki* vol. 17, pp. 143–153.

4. Arkhipov, G. I. 2013, “Izbrannye trudy”, [Selected works], Orl. Gos. Univ., Orel, 464 p. (Russian).

5. Arkhipov, G. I. & Čubarikov, V. N. 1976, “Multiple trigonometric sums”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* vol. 40, no. 1, pp. 209–220.

6. Arkhipov, G. I., Karatsuba A. A. & Čubarikov, V. N., 1987, “Theory of multiple trigonometric sums”, Moscow: Nauka, 368 pp.

7. Arkhipov G. I., Čubarikov V. N. & Karatsuba A. A. 2004, “Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis 39”, *De Gruyter expositions in mathematics*, 554 pp.

8. Franel J. 1924, “Les suites de Farey et le probleme des nombres premiers”, *Göttinger Nachrichten*, pp. 198–201.

9. Landau E. 1927, “Vorlesungen über Zahlentheorie”, Leipzig, vol. 2, p. 240.

10. Romanov, N. P. 2013, “Teorija chisel i funkcional’nyj analiz: sbornik trudov”, [Number theory and functional analysis: collected papers], Tom. Univ., Tomsk, 478 pp. (Russian)

11. Greaves G. R. H., Hall R. R., Huxley M. N. & Wilson J. C. 1993, “Multiple Franel Integrals” *Mathematika*, vol. 40, pp. 51–70.

12. Čubarikov V. N. 1976, "On a multiple trigonometric integral" *Dokl. AN SSSR*, vol. 227, no. 6, pp. 1308–1310.

13. Čubarikov V. N. 1978, "Multiple rational trigonometric sums and multiple integrals", *Mat. Zametki* vol. 20, no. 1, pp. 61–68.

14. Čubarikov V. N. 2015, "Convergence exponent of singular integral in a multidimensional additive problem" *Dokl. RAN*, vol. 463, no. 5, p. 530.

15. Čubarikov V. N. 2015, "The arithmetic sum and gaussian multiplication theorem" *Chebyshevskii Sb.,* vol. 16, no. 2(54), pp. 231–253.

16. Čubarikov V. N. 2015, "Elementary of the complete rational arithmetical sums" *Chebyshevskii Sb.,* vol. 16, no. 3(55), pp. 452–461.

17. Čubarikov V. N. 2016, "Full rational arithmetic sums" *Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat., Mech.*, vol. 1, pp. 60–61.

18. Čubarikov V. N. 2016, "The arithmetic sum of the values of polynomials" *Dokl. RAN*, vol. 466, no. 2, pp. 1–2.

19. Shihsadilov, M. Sh. "A class of oscillatory integrals" *Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat., Mech.*, vol. 5, pp. 61–63.

Механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
Поступило 01.12.2015.