

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 1.

УДК 512.548

СТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ПОЛУАБЕЛЕВЫХ n -АРНЫХ ГРУПП

Н. А. Щучкин (г. Волгоград)

Аннотация

Теория n -арных групп возникла как обобщение теории обычных (бинарных) групп. Многие определения из теории групп имеют n -арный аналог в теории n -арных групп. Например, n -арными аналогами абелевой группы являются абелева и полуабелева n -арные группы. n -арная группа $\langle G, f \rangle$ называется полуабелевой, если в ней верно тождество

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(x_n, x_2, \dots, x_{n-1}, x_1).$$

Если же в n -арной группе $\langle G, f \rangle$ верны тождества

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

для любой подстановки $\sigma \in S_n$, то ее называют абелевой.

Имеется тесная связь между группами и n -арными группами. Отметим частный случай теоремы Глускин-Хоссу для полуабелевых n -арных групп. На любой полуабелевой n -арной группе $\langle G, f \rangle$ можно определить абелеву группу $\langle G, + \rangle$, где $a + b = f(a, c, \dots, c, \bar{c}, b)$ для c из G . Тогда для элемента $d = f(c, \dots, c)$ и автоморфизма $\varphi(x) = f(c, x, c, \dots, c, \bar{c})$ группы $\langle G, + \rangle$, верны равенства $\varphi(d) = d$, $\varphi^{n-1}(x) = x$ для любого $x \in G$,

$$f(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \varphi(a_2) + \dots + \varphi^{n-2}(a_{n-1}) + a_n + d.$$

Группу $\langle G, + \rangle$ называют ретрактом n -арной группы $\langle G, f \rangle$ и обозначают $ret_c \langle G, f \rangle$. Верно и обратно: в любой абелевой группе $\langle G, + \rangle$ для выбранных автоморфизма φ и элемента d с указанными выше условиями задается полуабелева n -арная группа $\langle G, f \rangle$. n -арную группу $\langle G, f \rangle$ в этом случае называют (φ, d) -определенной на группе $\langle G, + \rangle$ и обозначают $der_{\varphi, d} \langle G, + \rangle$.

Пусть $\langle G, f \rangle = der_{\varphi, d} \langle G, + \rangle$ – полуабелева n -арная группа. Для каждого автоморфизма φ' группы $\langle G, + \rangle$, сопряженного автоморфизму φ , на группе $\langle G, + \rangle$ рассмотрим эндоморфизм $\mu_{\varphi'}(x) = x + \varphi'(x) + \dots + \varphi'^{n-2}(x)$. $Im \mu_{\varphi'}$ – образ этого эндоморфизма. Пусть $\varphi' = \theta \circ \varphi \circ \theta^{-1}$. Тогда для каждого такого автоморфизма θ имеем смежный класс $\theta(d) + Im \mu_{\varphi'}$ по подгруппе $Im \mu_{\varphi'}$. Набор $\{\theta(d) + Im \mu_{\varphi'} \mid \theta \in Aut \langle G, + \rangle\}$ всех таких смежных классов назовем определяющим набором множеств для n -арной группы $\langle G, f \rangle$. Доказано, что полуабелевы n -арные группы $\langle G, f \rangle = der_{\varphi, d} \langle G, + \rangle$ и $\langle G, f' \rangle = der_{\psi, q} \langle G, + \rangle$ изоморфны тогда и только тогда, когда автоморфизмы φ и ψ сопряжены в группе автоморфизмов группы $\langle G, + \rangle$ и определяющие наборы множеств этих n -арных групп одинаковые с точностью до перестановки.

В работе изучаются конечные полуабелевы n -арные группы. Показано, что любая полуабелева n -арная группа $\langle G, f \rangle$ порядка $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ изоморфна прямому произведению $\langle G_1, f_1 \rangle \times \langle G_2, f_2 \rangle \times \dots \times \langle G_k, f_k \rangle$ n -арных p_i -групп $\langle G_i, f_i \rangle$ порядков $|G_i| = p_i^{\alpha_i}$, где p_i – различные простые числа. Это разложение определено однозначно.

Опираясь на указанное разложение конечной полуабелевой n -арной группы в прямое произведение примарных полуабелевых n -арных групп и на его единственность, мы приходим к основному утверждению о конечных полуабелевых n -арных группах: всякая конечная полуабелева n -арная группа изоморфна прямому произведению примарных полуабелевых n -арных групп. Любые два таких разложения имеют по одинаковому числу

множителей и примарные множители в этих разложениях по одному и тому же простому числу имеют одинаковые инварианты.

Доказана основная теорема о строении конечных абелевых n -арных групп: всякая конечная абелева n -арная группа изоморфна прямому произведению примарных абелевых полупростых n -арных групп. Любые два таких разложения имеют по одинаковому числу множителей каждого порядка и по каждому простому делителю порядка этой n -арной группы произведения примарных множителей в этих разложениях имеют одинаковые инварианты.

Ключевые слова: n -арная группа, прямое произведение, автоморфизм.

Библиография: 18 названий.

THE STRUCTURE OF FINITE SEMIABELIAN n -ARY GROUPS

N. A. Shchuchkin (Volgograd)

Abstract

The theory of n -ary groups emerged as a generalization of the theory of ordinary (binary) groups. Many definitions of group theory have n -ary analogue in the theory of n -ary groups. For example, n -ary analogs of abelian groups are abelian and semiabelian n -ary group. n -ary group $\langle G, f \rangle$ is called semiabelian if it is true identity

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(x_n, x_2, \dots, x_{n-1}, x_1).$$

If in the n -ary group $\langle G, f \rangle$ is true identities

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

for any permutation $\sigma \in S_n$, then it is called abelian.

There is a close connection between groups and n -ary groups. We note special case of Gluskin-Hosszu Theorem for semiabelian n -ary groups. On any semiabelian n -ary group $\langle G, f \rangle$ it is possible to define an abelian group $\langle G, + \rangle$, where $a + b = f(a, c, \dots, c, \bar{c}, b)$ for c from G . Then for the element $d = f(c, \dots, c)$ and automorphism $\varphi(x) = f(c, x, c, \dots, c, \bar{c})$ of group $\langle G, + \rangle$, is true equalities $\varphi(d) = d$, $\varphi^{n-1}(x) = x$ for any $x \in G$,

$$f(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \varphi(a_2) + \dots + \varphi^{n-2}(a_{n-1}) + a_n + d.$$

Group $\langle G, + \rangle$ is called the retract of n -ary groups $\langle G, f \rangle$ and denoted by $ret_c \langle G, f \rangle$. And the opposite is true: in any abelian group $\langle G, + \rangle$ for selected automorphism φ and element d with the above conditions are set semiabelian n -ary group $\langle G, f \rangle$. n -ary group $\langle G, f \rangle$ in this case, called (φ, d) -derived from the group $\langle G, + \rangle$ and denoted by $der_{\varphi, d} \langle G, + \rangle$.

Let $\langle G, f \rangle = der_{\varphi, d} \langle G, + \rangle$ – semiabelian n -ary group. For every automorphism φ' of group $\langle G, + \rangle$, which is conjugate to the automorphism φ , on the group $\langle G, + \rangle$ we consider the endomorphism $\mu_{\varphi'}(x) = x + \varphi'(x) + \dots + \varphi'^{n-2}(x)$. $Im \mu_{\varphi'}$ – image of this endomorphism. Let $\varphi' = \theta \circ \varphi \circ \theta^{-1}$. Then, for each such automorphism θ have coset $\theta(d) + Im \mu_{\varphi'}$ of the subgroup $Im \mu_{\varphi'}$. Collection $\{\theta(d) + Im \mu_{\varphi'} \mid \theta \in Aut \langle G, + \rangle\}$ all such cosets we call defining collection of sets for n -ary group $\langle G, f \rangle$. It is proved that semiabelian n -ary group $\langle G, f \rangle = der_{\varphi, d} \langle G, + \rangle$ и $\langle G, f' \rangle = der_{\psi, q} \langle G, + \rangle$ are isomorphic iff automorphisms φ and ψ are conjugate in group of automorphisms of group $\langle G, + \rangle$ and defining collection of sets for these n -ary groups is equal up to permutation.

We study the finite semiabelian n -ary groups. It is shown that any semiabelian n -ary group $\langle G, f \rangle$ of order $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ is isomorphic to the direct product $\langle G_1, f_1 \rangle \times \langle G_2, f_2 \rangle \times \dots \times \langle G_k, f_k \rangle$ n -ary p_i -groups $\langle G_i, f_i \rangle$ of orders $|G_i| = p_i^{\alpha_i}$, where p_i – distinct primes. This decomposition is uniquely determined.

Based on the above decomposition of finite semiabelian n -ary groups into a direct product of primary semiabelian n -ary groups and for its uniqueness, we come to the main assertion about finite semiabelian n -ary groups: Any semiabelian finite n -ary group is isomorphic to the direct

product of primary semiabelian n -ary groups. Any two these decompositions have the same number of factors and primary factors in these decompositions on a the same prime number have the same invariants.

It is proved the main theorem on the structure of finite abelian n -ary groups: Any finite abelian n -ary group is isomorphic to the direct product of primary abelian semicyclic n -ary groups. Any two these decompositions have the same number of factors of each order and for each prime divisor of the order of n -ary group the primary factors in these decompositions have the same invariants.

Keywords: n -ary group, direct product, automorphism.

Bibliography: 18 titles.

1. Введение

Алгебру $\langle G, f \rangle$ с одной n -арной операцией f ($n \geq 3$) называют n -арной квазигруппой, если в ней для всех $j = 1, \dots, n$ разрешимо и имеет единственное решение каждое из уравнений

$$f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) = b$$

для любых $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n, b$ из G . Частным случаем понятия n -арной квазигруппы является n -арная группа, которая является обобщением понятия группы на n -арный случай. n -арная квазигруппа $\langle G, f \rangle$ называется n -арной группой, если в ней выполняется обобщенный закон ассоциативности

$$f(f(a_1, \dots, a_n), a_{n+1}, \dots, a_{2n-1}) = f(a_1, \dots, a_i, f(a_{i+1}, \dots, a_{i+n}), a_{i+n+1}, \dots, a_{2n-1})$$

для всех $i = 1, \dots, n-1$ (см. стр. 52, [1]). Теория n -арных групп изучалась в работах [2], [3], [4]. Более глубокое изложение теории n -арных групп можно найти в монографиях [5], [6], [7].

Теория n -арных групп существенно отличается от теории групп. Например, в n -арной группе нейтральный элемент может и не существовать (в отличие от единицы в группе), а значит, отсутствует и обратимость элемента. В n -арной группе n -арным аналогом групповых единицы и обратимости служит следующее определение. Для любого элемента a из n -арной группы $\langle G, f \rangle$ решение уравнения

$$f(\underbrace{a, \dots, a}_{n-1}, x) = a$$

обозначают через $\bar{a}$ и называют косым элементом для a . Получаем в n -арной группе $\langle G, f \rangle$ унарную операцию $\bar{}$. Отметим некоторые свойства этой операции, которые нам понадобятся дальше (см., например, [6]). В n -арной группе $\langle G, f \rangle$

1) для любых $x, y \in G$ верны равенства

$$f(y, \underbrace{x, \dots, x}_{n-3}, \bar{x}, x) = y, \quad f(x, \bar{x}, \underbrace{x, \dots, x}_{n-3}, y) = y;$$

2) любой гомоморфизм φ n -арной группы $\langle G, f \rangle$ сохраняет унарную операцию $\bar{}$, т.е. для любого $x \in G$ верно равенство

$$\varphi(\bar{x}) = \overline{\varphi(x)}.$$

n -арными аналогами абелевой группы являются абелева и полуабелева n -арные группы. n -арная группа $\langle G, f \rangle$ называется полуабелевой, если в ней верно тождество

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(x_n, x_2, \dots, x_{n-1}, x_1).$$

Если же в n -арной группе $\langle G, f \rangle$ верны тождества $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ для любой подстановки $\sigma \in S_n$, то ее называют абелевой. Ясно, что любая абелева n -арная группа является полуабелевой, обратно неверно.

В данной работе мы остановимся на изучении конечных полуабелевых n -арных групп. Наша основная цель заключается в том, чтобы найти полную систему свойств (инвариантов) класса конечных полуабелевых n -арных групп и класса конечных абелевых n -арных групп, которая остается неизменной при изоморфизме n -арных групп в этом классе (по аналогии как в классе конечных абелевых групп инвариантами являются порядки элементов базиса конечной абелевой группы).

2. Некоторые сведения из теории полуабелевых n -арных групп

Имеется тесная связь между группами и n -арными группами. Отметим частный случай основных результатов работ [8], [9] для полуабелевых n -арных групп. На любой полуабелевой n -арной группе $\langle G, f \rangle$ можно определить абелеву группу $\langle G, + \rangle$, где сложение действует по правилу:

$$a + b = f(a, \underbrace{c, \dots, c}_{n-3}, \bar{c}, b)$$

для фиксированного элемента c из G . Тогда для элемента $d = f(\underbrace{c, \dots, c}_n)$ и отображения $\varphi(x) = f(c, x, \underbrace{c, \dots, c}_{n-3}, \bar{c})$, которое является автоморфизмом группы $\langle G, + \rangle$, верны равенства

$$\varphi(d) = d, \quad \varphi^{n-1}(x) = x \quad \text{для любого } x \in G, \quad (1)$$

$$f(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \varphi(a_2) + \dots + \varphi^{n-2}(a_{n-1}) + a_n + d. \quad (2)$$

Элемент c является нулем в группе $\langle G, + \rangle$. Группу $\langle G, + \rangle$ называют ретрактом n -арной группы $\langle G, f \rangle$ и обозначают $\text{ret}_c \langle G, f \rangle$. Известно [8], [9], что любые два ретракта одной и той же n -арной группы изоморфны. Отметим, что для абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$ автоморфизм φ будет тождественным (по первому свойству косого элемента, см. выше).

Верно и обратно: в любой абелевой группе $\langle G, + \rangle$ для выбранных автоморфизма φ и элемента d с условиями (1) задается полуабелева n -арная группа $\langle G, f \rangle$, где f действует по правилу (2). n -арную группу $\langle G, f \rangle$ в этом случае называют (φ, d) -определенной на группе $\langle G, + \rangle$ и обозначают $\text{der}_{\varphi, d} \langle G, + \rangle$. Заметим (см. [10]), что n -арная группа $\langle G, f \rangle$, (φ, d) -определенная на абелевой группе $\langle G, + \rangle$, является абелевой тогда и только тогда, когда $\varphi = 1_G$ — тождественный автоморфизм. Например, n -арные группы, (φ, d) -определенные на группах первого и второго порядков, могут быть только абелевыми.

Кроме того, верны равенства

$$\langle G, + \rangle = \text{ret}_c \text{der}_{\varphi, d} \langle G, + \rangle, \quad \langle G, f \rangle = \text{der}_{\varphi, d} \text{ret}_c \langle G, f \rangle \quad [11]. \quad (3)$$

Среди всех полуабелевых n -арных групп выделим полуциклические, у которых ретракт является циклической группой [6]. На циклической группе $\langle (a), + \rangle$ порядка k задается полуциклическая n -арная группа $\langle (a), f \rangle = \text{der}_{\varphi, la} \langle (a), + \rangle$ с n -арной операцией

$$f(s_1 a, \dots, s_n a) = (s_1 + s_2 m + s_3 m^2 + \dots + s_{n-1} m^{n-2} + s_n + l) a,$$

где автоморфизм φ задается числом m , взаимно простым с k , $0 \leq m, l < k$, $lm \equiv l \pmod{k}$ и показатель m по модулю k делит $n - 1$ (см. предложение 1, [12]). Договоримся дальше вместо автоморфизма φ писать число m при определении полуциклической n -арной группы. Любая

конечная полуциклическая n -арная группа порядка k изоморфна n -арной группе $\langle(a), f\rangle = \text{der}_{m,la}\langle(a), +\rangle$, где $l \mid \text{НОД}(1 + m + m^2 + \dots + m^{n-2}, k)$ (см. теорему 2, [12]). При $m = 1$ имеем абелеву полуциклическую n -арную группу $\langle(a), f\rangle = \text{der}_{1,la}\langle(a), +\rangle$. А если еще $l = 1$, то получим циклическую (порожденную одним элементом) n -арную группу $\text{der}_{1,a}\langle(a), +\rangle$.

3. Изоморфизмы полуабелевых n -арных групп

Имеется критерий изоморфизма полуабелевых n -арных групп.

ТЕОРЕМА 1. [13] *Полуабелевы n -арные группы*

$$\langle G, f \rangle = \text{der}_{\varphi,d}\langle G, + \rangle \quad \text{и} \quad \langle G', f' \rangle = \text{der}_{\varphi',d'}\langle G', + \rangle$$

изоморфны тогда и только тогда, когда найдутся групповой изоморфизм σ из $\langle G, + \rangle$ в $\langle G', + \rangle$ и элемент $u \in G'$ такие, что

$$\sigma(d) = u + \varphi'(u) + \dots + \varphi'^{n-2}(u) + d', \quad (4)$$

$$\sigma \circ \varphi(x) = \varphi' \circ \sigma(x) \quad \text{для любого } x \in G. \quad (5)$$

Заметим, что ретракты изоморфных полуабелевых n -арных групп изоморфны (следует из теоремы 1). Обратно неверно, т.е. полуабелевы n -арные группы, имеющие изоморфные ретракты, могут быть и не изоморфны. Найдем условия изоморфизма полуабелевых n -арных групп, (φ, d) -определенных на одной и той же группе $\langle G, + \rangle$.

Пусть $\langle G, f \rangle = \text{der}_{\varphi,d}\langle G, + \rangle$ — полуабелева n -арная группа. Для каждого автоморфизма φ' группы $\langle G, + \rangle$, сопряженного автоморфизму φ , на группе $\langle G, + \rangle$ рассмотрим эндоморфизм $\mu_{\varphi'}(x) = x + \varphi'(x) + \dots + \varphi'^{n-2}(x)$. Обозначим через $\text{Im } \mu_{\varphi'}$ образ этого эндоморфизма. Пусть φ' получен из φ сопряжением с помощью автоморфизма θ , т.е. $\varphi' = \theta \circ \varphi \circ \theta^{-1}$. Тогда для каждого такого автоморфизма θ имеем смежный класс $\theta(d) + \text{Im } \mu_{\varphi'}$ по подгруппе $\text{Im } \mu_{\varphi'}$. Набор

$$\{\theta(d) + \text{Im } \mu_{\varphi'} \mid \theta \in \text{Aut } \langle G, + \rangle\} \quad (6)$$

всех таких смежных классов назовем определяющим набором множеств для n -арной группы $\langle G, f \rangle$.

ТЕОРЕМА 2. *Полуабелевы n -арные группы*

$$\langle G, f \rangle = \text{der}_{\varphi,d}\langle G, + \rangle$$

и $\langle G, f' \rangle = \text{der}_{\psi,q}\langle G, + \rangle$ изоморфны тогда и только тогда, когда автоморфизмы φ и ψ сопряжены в группе автоморфизмов группы $\langle G, + \rangle$ и определяющие наборы множеств этих n -арных групп одинаковые с точностью до перестановки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для n -арной группы $\langle G, f' \rangle$ пусть определяющим набором множеств будет

$$\{\tau(q) + \text{Im } \mu_{\psi'} \mid \tau \in \text{Aut } \langle G, + \rangle\}. \quad (7)$$

Необходимость. Согласно теореме 1 найдутся автоморфизм σ группы $\langle G, + \rangle$ и элемент $u \in G$ такие, что верны равенства

$$\sigma(d) = u + \psi(u) + \dots + \psi^{n-2}(u) + q, \quad (8)$$

$$\sigma \circ \varphi(x) = \psi \circ \sigma(x) \quad \text{для любого } x \in G. \quad (9)$$

Сопряженность автоморфизмов φ и ψ следует из (9). Из (8) получим $\sigma(d) \in q + Im \mu_\psi$, а значит,

$$\sigma(d) + Im \mu_\psi = q + Im \mu_\psi. \quad (10)$$

Непосредственная проверка показывает, что если автоморфизм ψ получен из автоморфизма φ сопряжением с помощью автоморфизма σ в группе автоморфизмов группы $\langle G, + \rangle$ (т.е. $\psi = \sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}$), то

$$\sigma(Im \mu_\varphi) = Im \mu_\psi. \quad (11)$$

Из (10) и (11) получим

$$\sigma^{-1}(q) + Im \mu_\varphi = d + Im \mu_\varphi. \quad (12)$$

Пусть $\theta(d) + Im \mu_{\varphi'}$ — произвольно выбранное множество из определяющего набора множеств (6) n -арной группы $\langle G, f \rangle$. Выбираем автоморфизм $\theta \circ \sigma^{-1}$, для которого находим $\psi' = (\theta \circ \sigma^{-1}) \circ \psi \circ (\theta \circ \sigma^{-1})^{-1}$, тогда класс смежности $\theta \circ \sigma^{-1}(q) + Im \mu_{\psi'}$ является множеством из определяющего набора множеств (7) n -арной группы $\langle G, f' \rangle$. Тогда верно равенство

$$\theta(d) + Im \mu_{\varphi'} = \theta \circ \sigma^{-1}(q) + Im \mu_{\psi'}. \quad (13)$$

Пусть теперь $\tau(q) + Im \mu_{\psi'}$ — произвольно выбранное множество из определяющего набора множеств (7) n -арной группы $\langle G, f' \rangle$. Выбираем автоморфизм $\tau \circ \sigma$, для которого находим $\varphi' = (\tau \circ \sigma) \circ \varphi \circ (\tau \circ \sigma)^{-1}$, тогда класс смежности $\tau \circ \sigma(d) + Im \mu_{\varphi'}$ является множеством из определяющего набора множеств (6) n -арной группы $\langle G, f \rangle$. Тогда верно равенство

$$\tau(q) + Im \mu_{\psi'} = \tau \circ \sigma(d) + Im \mu_{\varphi'}. \quad (14)$$

Из верности равенств (13) и (14) получим совпадение определяющих наборов множеств n -арных групп $\langle G, f \rangle$ и $\langle G, f' \rangle$.

Достаточность. Согласно условию, найдется автоморфизм σ группы $\langle G, + \rangle$ такой, что $\psi = \sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}$ и смежный класс $\sigma(d) + Im \mu_\psi$ будет лежать в определяющем наборе множеств (6) n -арной группы $\langle G, f \rangle$. С другой стороны, в силу равенства определяющих наборов множеств (6) и (7), найдется автоморфизм τ , который перестановочен с автоморфизмом ψ , и верно равенство $\tau(q) + Im \mu_\psi = \sigma(d) + Im \mu_\psi$. Тогда автоморфизм τ^{-1} также перестановочен с автоморфизмом ψ . Получим $q + Im \mu_\psi = \tau^{-1} \circ \sigma(d) + Im \mu_\psi$. Тогда для нуля группы $\langle G, + \rangle$ найдется элемент u из G такой, что $\tau^{-1} \circ \sigma(d) = q + u + \psi(u) + \dots + \psi^{n-2}(u)$, кроме того, $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \varphi = \psi \circ \tau^{-1} \circ \sigma$. Тогда по теореме 1 n -арные группы $\langle G, f \rangle$ и $\langle G, f' \rangle$ изоморфны. Теорема доказана. $\square$

Для абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$, $(1_G, d)$ -определенной на абелевой группе $\langle G, + \rangle$, класс сопряженности в группе автоморфизмов группы $\langle G, + \rangle$, где лежит тождественный автоморфизм 1_G , является одноэлементным. На группе $\langle G, + \rangle$ рассмотрим эндоморфизм $\mu_{1_G}(x) = x + 1_G(x) + \dots + 1_G^{n-2}(x) = (n-1)x$. Образом так построенного эндоморфизма будет подгруппа $Im \mu_{1_G} = (n-1)G$. Тогда для каждого автоморфизма θ имеем смежный класс $\theta(d) + (n-1)G$ по подгруппе $(n-1)G$. Набор

$$\{\theta(d) + (n-1)G \mid \theta \in Aut \langle G, + \rangle\}. \quad (15)$$

всех таких смежных классов является определяющим набором множеств для абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Абелевы n -арные группы $\langle G, f \rangle = der_{1_G, d} \langle G, + \rangle$ и $\langle G, f' \rangle = der_{1_G, q} \langle G, + \rangle$ изоморфны тогда и только тогда, когда определяющие наборы множеств этих n -арных групп одинаковые с точностью до перестановки.

4. Конечные полуабелевы n -арные группы

Как и в теории абелевых групп, верна

ТЕОРЕМА 3. *Полуабелева n -арная группа $\langle G, f \rangle$ порядка $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ изоморфна прямому произведению*

$$\langle G_1, f_1 \rangle \times \langle G_2, f_2 \rangle \times \dots \times \langle G_k, f_k \rangle$$

n -арных p_i -групп $\langle G_i, f_i \rangle$ порядков $|G_i| = p_i^{\alpha_i}$, где p_i — различные простые числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На полуабелевой n -арной группе $\langle G, f \rangle$ порядка $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ строим абелеву группу $\langle G, + \rangle = \text{ret}_c \langle G, f \rangle$, которая допускает разложение $\langle G_1, + \rangle \oplus \langle G_2, + \rangle \oplus \dots \oplus \langle G_k, + \rangle$ в прямую сумму своих силовских подгрупп $\langle G_i, + \rangle$. Выбираем автоморфизм φ группы $\langle G, + \rangle$ по правилу $\varphi(x) = f(c, x, \underbrace{c, \dots, c}_{n-3}, \bar{c})$. Ограничение φ_{G_i} является автоморфизмом группы $\langle G_i, + \rangle$ ($i = 1, \dots, k$). Пусть для $d = f(\underbrace{c, \dots, c}_n)$ имеем $d = d_1 + d_2 + \dots + d_k$, где $d_i \in G_i$.

Очевидно выполнены условия (1) для каждой пары φ_{G_i}, d_i .

Теперь строим n -арные p_i -группы $\langle G_i, f_i \rangle$, (φ_{G_i}, d_i) -определенные на каждой силовской подгруппе $\langle G_i, + \rangle$. Отображение $\psi : G \rightarrow G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k$, заданное по правилу

$$\psi(g_1 + g_2 + \dots + g_k) = (g_1, g_2, \dots, g_k),$$

является изоморфизмом n -арных групп $\langle G, f \rangle$ и $\langle G_1, f_1 \rangle \times \langle G_2, f_2 \rangle \times \dots \times \langle G_k, f_k \rangle$ (проверяется непосредственно). Теорема доказана.

Как и в группах, разложение в теореме 3 определено однозначно, т.е. верна

ТЕОРЕМА 4. *Если конечная полуабелева n -арная группа $\langle G, f \rangle$ порядка $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ изоморфна двум прямым произведениям*

$$\langle G_1, f_1 \rangle \times \langle G_2, f_2 \rangle \times \dots \times \langle G_k, f_k \rangle, \quad (16)$$

$$\langle G'_1, f'_1 \rangle \times \langle G'_2, f'_2 \rangle \times \dots \times \langle G'_k, f'_k \rangle \quad (17)$$

n -арных p_i -групп $\langle G_i, f_i \rangle$ и $\langle G'_i, f'_i \rangle$ порядков $|G_i| = |G'_i| = p_i^{\alpha_i}$, то $\langle G_i, f_i \rangle \cong \langle G'_i, f'_i \rangle$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$.

Теорема доказывается с использованием теоремы 1.

Заметим, что теоремы 3 и 4 для абелевых n -арных групп доказаны в [14].

Результаты, полученные ниже, дополняют сведения о строении конечных n -арных групп, приведенные в работах [15], [16].

5. Конечные неразложимые полуабелевы n -арные p -группы

В теории конечных полуабелевых n -арных групп известно (Предложение 13, [12]), что примарная полуциклическая n -арная группа не может быть изоморфна прямому произведению каких-нибудь нескольких n -арных групп меньшего порядка, т.е. такие полуциклические n -арные группы являются неразложимыми. Но, в отличие от групп, среди конечных полуабелевых n -арных групп имеются и другие неразложимые n -арные группы. Какие же конечные полуабелевы n -арные p -группы являются неразложимыми, т.е. не могут быть изоморфны прямому произведению каких-нибудь нескольких n -арных групп меньшего порядка? На этот вопрос мы ответим в следующей теореме.

Автоморфизм ψ конечной абелевой p -группы $\langle G, + \rangle$ назовем разложимым, если группу $\langle G, + \rangle$ можно представить в виде прямой суммы

$$\langle G, + \rangle = \langle G_1, + \rangle \oplus \dots \oplus \langle G_k, + \rangle$$

своих собственных подгрупп $\langle G_i, + \rangle$ (не обязательно циклических), так, чтобы ограничение $\psi|_{G_i}$ этого автоморфизма на каждую подгруппу $\langle G_i, + \rangle$ было бы автоморфизмом этой подгруппы. В противном случае назовем такой автоморфизм неразложимым.

ТЕОРЕМА 5. *Конечная полуабелева n -арная p -группа $\langle G, f \rangle$ является разложимой тогда и только тогда, когда автоморфизм φ ретракта $\langle G, + \rangle = \text{ret}_c \langle G, f \rangle$ этой n -арной группы, заданный по правилу $\varphi(x) = f(c, x, \underbrace{c, \dots, c}_{n-3}, \bar{c})$, сопряжен (в группе автоморфизмов этого ретракта) некоторому разложимому автоморфизму.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть полуабелева n -арная группа $\langle G, f \rangle$ порядка p^α изоморфна прямому произведению $\langle H_1, f_1 \rangle \times \dots \times \langle H_k, f_k \rangle$ k полуабелевых n -арных групп $\langle H_i, f_i \rangle$ порядков p^{β_i} , $\beta_i < \alpha$ для всех $i = 1, \dots, k$.

Пусть $\langle H_i, + \rangle = \text{ret}_{c_i} \langle H_i, f_i \rangle$, $i = 1, \dots, k$. На каждом ретракте $\langle H_i, + \rangle$ выбираем элемент $d_i = f_i(\underbrace{c_i, \dots, c_i}_n)$ и автоморфизм $\psi_i(x) = f_i(c_i, x, \underbrace{c_i, \dots, c_i}_{n-3}, \bar{c}_i)$. На группе $\langle H_1, + \rangle \oplus \dots \oplus \langle H_k, + \rangle$ выбираем автоморфизм $\psi(x_1 + \dots + x_k) = \psi_1(x_1) + \dots + \psi_k(x_k)$.

Согласно теореме 1, группы $\langle G, + \rangle = \text{ret}_c \langle G, f \rangle$ и $\langle H_1, + \rangle \oplus \dots \oplus \langle H_k, + \rangle$ изоморфны. Значит, группу $\langle G, + \rangle$ можно разложить в прямую сумму $\langle G_1, + \rangle \oplus \dots \oplus \langle G_k, + \rangle$ своих подгрупп так, чтобы соответствующие прямые слагаемые $\langle G_i, + \rangle$ и $\langle H_i, + \rangle$ ($i = 1, \dots, k$) были изоморфны. Пусть τ_i – изоморфизм из $\langle H_i, + \rangle$ в $\langle G_i, + \rangle$. Тогда $\tau_i \circ \psi_i \circ \tau_i^{-1}$ будет автоморфизмом в группе $\langle G_i, + \rangle$, причем этот автоморфизм удовлетворяет условию $(\tau_i \circ \psi_i \circ \tau_i^{-1})^{n-1}(x) = x$ для любого $x \in G_i$. Кроме того, для элемента $\tau(d_i) \in G_i$ верно равенство $\tau_i \circ \psi_i \circ \tau_i^{-1}(\tau(d_i)) = \tau(d_i)$. Тогда на каждой группе $\langle G_i, + \rangle$ строим полуабелеву n -арную группу

$$\langle G_i, f'_i \rangle = \text{der}_{\tau_i \circ \psi_i \circ \tau_i^{-1}, \tau(d_i)} \langle G_i, + \rangle.$$

На группе $\langle G, + \rangle$ выбираем автоморфизм

$$\theta(x_1 + \dots + x_k) = \tau_1 \circ \psi_1 \circ \tau_1^{-1}(x_1) + \dots + \tau_k \circ \psi_k \circ \tau_k^{-1}(x_k).$$

Заметим, что автоморфизм θ будет разложимым. Тогда по теореме 9 из [11]

$$\langle G_1, f'_1 \rangle \times \dots \times \langle G_k, f'_k \rangle = \text{der}_{\theta, \tau_1(d_1) + \dots + \tau_k(d_k)} \langle G_1, + \rangle \oplus \dots \oplus \langle G_k, + \rangle.$$

Согласно теореме 1 n -арные группы $\langle H_1, f_1 \rangle \times \dots \times \langle H_k, f_k \rangle$ и $\langle G_1, f'_1 \rangle \times \dots \times \langle G_k, f'_k \rangle$ изоморфны. Тогда изоморфны n -арные группы $\langle G, f \rangle$ и $\langle G_1, f'_1 \rangle \times \dots \times \langle G_k, f'_k \rangle$. По теореме 1 есть автоморфизм σ группы $\langle G, + \rangle$ такой, что $\sigma \circ \varphi = \theta \circ \sigma$.

Обратно. На полуабелевой n -арной группе $\langle G, f \rangle$ порядка p^α строим ретракт

$$\langle G, + \rangle = \text{ret}_c \langle G, f \rangle$$

и пусть автоморфизм $\varphi(x) = f(c, x, \underbrace{c, \dots, c}_{n-3}, \bar{c})$, сопряжен с помощью автоморфизма σ в группе

автоморфизмов группы $\langle G, + \rangle$ некоторому разложимому автоморфизму ψ , т.е. $\sigma \circ \varphi = \psi \circ \sigma$. Значит, группу $\langle G, + \rangle$ можно представить в виде прямой суммы $\langle G, + \rangle = \langle G_1, + \rangle \oplus \dots \oplus \langle G_k, + \rangle$ своих подгрупп $\langle G_i, + \rangle$ так, что ограничение $\psi|_{G_i}$ автоморфизма ψ на каждую подгруппу $\langle G_i, + \rangle$ является автоморфизмом этой подгруппы. Пусть порядок каждой подгруппы $\langle G_i, + \rangle$

равен p^{β_i} и $\beta_i < \alpha$. Для элемента $d = \underbrace{f(c, \dots, c)}_n$ полагаем $\sigma(d) = d_1 + \dots + d_k$, $d_i \in G_i$. На каждой группе $\langle G_i, + \rangle$ строим полуабелеву n -арную группу $\langle G_i, f_i \rangle = \text{der}_{\psi_{G_i}, d_i} \langle G_i, + \rangle$. Тогда по теореме 1 n -арные группы $\langle G, f \rangle$ и $\langle G_1, f_1 \rangle \times \dots \times \langle G_k, f_k \rangle$ изоморфны. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. (Предложение 13, [12]). Любая полуциклическая n -арная p -группа является неразложимой.

СЛЕДСТВИЕ 3. (Теорема 8, [14]). Любая конечная абелева n -арная p -группа изоморфна прямому произведению абелевых полуциклических n -арных p -групп.

Если $n - 1$ не делится на простое число p , то все конечные абелевы полуциклические n -арные p -группы будут циклическими (следствие 1, [12]). Поэтому верно

СЛЕДСТВИЕ 4. (следствие 3, [14]). Если p не делит $n - 1$, то каждая конечная абелева n -арная p -группа изоморфна прямому произведению циклических n -арных p -групп.

6. Инварианты конечных полуабелевых n -арных p -групп

Пусть конечная полуабелева n -арная p -группа $\langle G, f \rangle$ (φ, d) -определена на абелевой p -группе $\langle G, + \rangle$ порядка $|G| = p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} \dots p^{\alpha_r}$, которая разлагается в прямую сумму циклических групп, т.е.

$$\langle G, + \rangle = \langle (a_1), + \rangle \oplus \langle (a_2), + \rangle \oplus \dots \oplus \langle (a_r), + \rangle, \quad (18)$$

где $|(a_i)| = p^{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, r$. Выбираем прямую сумму

$$\langle A, + \rangle = \langle Z_{p^{\alpha_1}}, + \rangle \oplus \langle Z_{p^{\alpha_2}}, + \rangle \oplus \dots \oplus \langle Z_{p^{\alpha_r}}, + \rangle \quad (19)$$

аддитивных групп $\langle Z_{p^{\alpha_i}}, + \rangle$ кольца классов вычетов по модулю p^{α_i} и изоморфизмы σ_i из $\langle (a_i), + \rangle$ в $\langle Z_{p^{\alpha_i}}, + \rangle$, действующие по правилу $\sigma_i(s a_i) = s$, $0 \leq s \leq p^{\alpha_i} - 1$.

Система изоморфизмов σ_i индуцирует изоморфизм

$$\sigma : \sigma(s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_r a_r) = s_1 + s_2 + \dots + s_r$$

между группами $\langle G, + \rangle$ и $\langle A, + \rangle$. Изоморфизм σ , в свою очередь, индуцирует изоморфизм σ^* из группы автоморфизмов $\text{Aut} \langle G, + \rangle$ в группу автоморфизмов $\text{Aut} \langle A, + \rangle$, а именно: $\sigma^* : \psi \rightarrow \sigma \circ \psi \circ \sigma^{-1}$, $\psi \in \text{Aut} \langle G, + \rangle$ (см., например, [17], стр. 294). При этом изоморфизме классу сопряженности $\{\psi \mid \psi \text{ сопряжен } \varphi\}$ из $\text{Aut} \langle G, + \rangle$ соответствует класс сопряженности

$$\{\sigma \circ \psi \circ \sigma^{-1} \mid \psi \text{ сопряжен } \varphi \text{ в } \text{Aut} \langle G, + \rangle\} \text{ из } \text{Aut} \langle A, + \rangle. \quad (20)$$

Очевидно, для полуабелевой n -арной группы $\langle A, h \rangle = \text{der}_{\sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}, \sigma(d)} \langle A, + \rangle$ определяющий набор множеств совпадает с набором множеств

$$\{\sigma(\theta(d)) + \text{Im } \mu_{\sigma \circ \varphi' \circ \sigma^{-1}} \mid \theta, \varphi' \in \text{Aut} \langle G, + \rangle, \varphi' = \theta \circ \varphi \circ \theta^{-1}\}. \quad (21)$$

Порядки $|(a_i)| = p^{\alpha_i}$ прямых слагаемых группы $\langle G, + \rangle$, класс сопряженности (20) в группе автоморфизмов группы $\langle A, + \rangle$ и определяющий набор множеств (21) n -арной группы $\langle A, h \rangle$ назовем инвариантами конечной полуабелевой n -арной p -группы $\langle G, f \rangle$, (φ, d) -определенной на абелевой p -группе $\langle G, + \rangle$ порядка $|G| = p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} \dots p^{\alpha_r}$. Тогда из теорем 2 и 1 имеем

СЛЕДСТВИЕ 5. Своими инвариантами конечная полуабелева n -арная p -группа $\langle G, f \rangle$, (φ, d) -определенная на абелевой p -группе $\langle G, + \rangle$ порядка

$$|G| = p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} \dots p^{\alpha_r},$$

определяется с точностью до изоморфизма.

Рассмотрим теперь абелеву n -арную p -группу $\langle G, f \rangle$, $(1_G, d)$ -определенную на абелевой p -группе $\langle G, + \rangle$ порядка $|G| = p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} \dots p^{\alpha_r}$, которая разлагается в прямую сумму циклических групп (18). Выбираем прямую сумму (19) аддитивных групп $\langle Z_{p^{\alpha_i}}, + \rangle$ кольца классов вычетов по модулю p^{α_i} и изоморфизмы σ_i из $\langle (a_i), + \rangle$ в $\langle Z_{p^{\alpha_i}}, + \rangle$, действующие по правилу $\sigma_i(sa_i) = s$, $0 \leq s \leq p^{\alpha_i} - 1$. Вновь система изоморфизмов σ_i индуцирует изоморфизм

$$\sigma : \sigma(s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_r a_r) = s_1 + s_2 + \dots + s_r$$

между группами $\langle G, + \rangle$ и $\langle A, + \rangle$. Для абелевой n -арной группы

$$\langle A, h \rangle = \text{der}_{1_A, \sigma(d)} \langle A, + \rangle$$

определяющий набор множеств совпадает с набором множеств

$$\{\sigma(\theta(d)) + (n-1)A \mid \theta \in \text{Aut}\langle G, + \rangle\}. \quad (22)$$

При определении инвариантов для конечной абелевой n -арной p -группы $\langle G, f \rangle$ класс сопряженности (20) можно не указывать, так как этот класс состоит только из тождественного автоморфизма.

СЛЕДСТВИЕ 6. *Если конечная абелева n -арная p -группа $\langle G, f \rangle$ изоморфна двум прямым произведениям*

$$\langle (a_1), f_1 \rangle \times \langle (a_2), f_2 \rangle \times \dots \times \langle (a_r), f_r \rangle, \quad (23)$$

$$\langle (b_1), f'_1 \rangle \times \langle (b_2), f'_2 \rangle \times \dots \times \langle (b_s), f'_s \rangle \quad (24)$$

абелевых полуциклических n -арных p -групп $\langle (a_i), f_i \rangle$ и $\langle (b_j), f'_j \rangle$, то инварианты прямых произведений (23) и (24) одинаковые, в частности, $r = s$ и порядки $|(a_i)|$ совпадают с порядками $|(b_j)|$ при некотором упорядочении последних.

Если $n-1$ не делится на p , то подгруппа $(n-1)A$ совпадает с группой A , а значит, определяющий набор множеств (22) абелевой n -арной группы

$$\langle A, h \rangle = \text{der}_{1_A, \sigma(d)} \langle A, + \rangle$$

состоит из одного множества A . Поэтому, если конечная абелева n -арная p -группа $\langle G, f \rangle$ изоморфна прямому произведению (23), то инвариантами конечной абелевой n -арной p -группы $\langle G, f \rangle$ при условии, что $n-1$ не делится на p , будут порядки прямых множителей разложения (23) (как в группах), т.е. верно

СЛЕДСТВИЕ 7. *(Теорема 9, [14]) . Если p не делит $n-1$ и конечная абелева n -арная p -группа $\langle G, f \rangle$ изоморфна двум прямым произведениям*

$$\langle (a_1), f_1 \rangle \times \langle (a_2), f_2 \rangle \times \dots \times \langle (a_r), f_r \rangle, \quad (25)$$

$$\langle (b_1), f'_1 \rangle \times \langle (b_2), f'_2 \rangle \times \dots \times \langle (b_s), f'_s \rangle \quad (26)$$

циклических n -арных p -групп $\langle (a_i), f_i \rangle$ и $\langle (b_j), f'_j \rangle$, то $r = s$ и порядки $|(a_i)|$ совпадают с порядками $|(b_j)|$ при некотором упорядочении последних.

Пусть α — натуральное число. Запишем его в виде суммы

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r, \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r \geq 1. \quad (27)$$

Число всех таких разбиений с $r = 1, 2, \dots$ обозначим через $p(\alpha)$. Известно, что число неизоморфных абелевых групп порядка p^α равно $p(\alpha)$ (см., например, [18]). Для каждого разбиения

$\delta_s(\alpha)$ вида (27) ($s = 1, \dots, p(\alpha)$) имеем единственную (с точностью до изоморфизма) абелеву группу (18). Выбираем прямую сумму (19). Пусть $[\varphi_1]_s, \dots, [\varphi_{in(\delta_s(\alpha))}]_s$ – классы сопряженности автоморфизмов группы $\langle A, + \rangle$, порядки которых делят $n - 1$, где $in(\delta_s(\alpha))$ – число этих классов. Для автоморфизма φ_t из каждого класса сопряженности $[\varphi_t]_s$ ($t = 1, \dots, in(\delta_s(\alpha))$) и для всех элементов d группы $\langle A, + \rangle$, для которых $\varphi_t(d) = d$, находим определяющие наборы множеств. Через $q([\varphi_t]_s, \alpha)$ обозначим количество таких наборов для класса сопряженности $[\varphi_t]_s$.

СЛЕДСТВИЕ 8. Число неизоморфных полуабелевых n -арных групп порядка p^α равно

$$\sum_{s=1}^{p(\alpha)} \sum_{t=1}^{in(\delta_s(\alpha))} q([\varphi_t]_s, \alpha).$$

Среди классов $[\varphi_1]_s, \dots, [\varphi_{in(\delta_s(\alpha))}]_s$ сопряженности автоморфизмов группы $\langle A, + \rangle$, порядки которых делят $n - 1$, имеется класс $[1_A]_s$, состоящий только из тождественного автоморфизма 1_A .

СЛЕДСТВИЕ 9. Число неизоморфных абелевых n -арных групп порядка p^α равно

$$\sum_{s=1}^{p(\alpha)} q([1_A]_s, \alpha).$$

ПРИМЕР 1. Найдём все тернарные группы порядка 3 (с точностью до изоморфизма). Они все будут полуциклическими, так как у них ретракты – циклическая группа порядка 3. Для $\alpha = 1$ имеем одно разбиение (так как $p(1) = 1$): $\delta_1(1) : 3 = 3$.

Фиксируем $n = 3$ и $p = 3$. Для разбиения $\delta_1(1)$ имеем циклическую группу

$$\langle G, + \rangle = \langle (a_1), + \rangle,$$

где $|(a_1)| = 3$. Выбираем аддитивную группу $\langle Z_3, + \rangle$ кольца классов вычетов по модулю 3. Оба автоморфизма из $\text{Aut}\langle Z_3, + \rangle$ имеют порядки, делящие $n - 1 = 2$, это тождественный автоморфизм 1_{Z_3} ; автоморфизм φ_1 , для которого $\varphi_1(1) = 2$. Число классов сопряженности $in(\delta_1(1))$ автоморфизмов группы $\langle Z_3, + \rangle$, порядки которых делят $n - 1 = 2$, равно 2, т.е. $in(\delta_1(1)) = 2$. Оба класса одноэлементные. Для класса сопряженности $[1_{Z_3}]_1$ имеем один определяющий набор множеств, это $\{0, 1, 2\}$. Для класса сопряженности $[\varphi_1]_1$ имеем также один определяющий набор множеств, это $\{0\}$.

Число неизоморфных тернарных групп порядка 3 равно 2. Если $\langle (a_1), + \rangle = \langle Z_3, + \rangle$, то все неизоморфные тернарные группы порядка 3 имеют вид:

$$\text{der}_{1_{Z_3}, 0}\langle Z_3, + \rangle, \quad \text{der}_{\varphi_1, 0}\langle Z_3, + \rangle.$$

Отметим, что среди перечисленных тернарных групп имеется одна абелева тернарная группа, это $\text{der}_{1_{Z_3}, 0}\langle Z_3, + \rangle$, причем, она будет циклической.

ПРИМЕР 2. Найдём все тернарные группы порядка 4 (с точностью до изоморфизма). Они все будут полубелевы, так как у них ретракты – абелевы группы.

Для $\alpha = 2$ имеем $p(2) = 2$ разбиения:

$$\delta_1(2) : 2 = 1 + 1, \quad \delta_2(2) : 2 = 2.$$

Фиксируем $n = 3$ и $p = 2$. Для разбиения $\delta_1(2)$ имеем абелеву группу

$$\langle G, + \rangle = \langle (a_1), + \rangle \oplus \langle (a_2), + \rangle,$$

где $|(a_1)| = |(a_2)| = 2$. Выбираем прямую сумму $\langle A, + \rangle = \langle Z_2, + \rangle \oplus \langle Z_2, + \rangle$, где $\langle Z_2, + \rangle$ – аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю 2. Группа автоморфизмов $\text{Aut}\langle A, + \rangle$ этой группы изоморфна симметрической группе S_3 . Четыре автоморфизма из $\text{Aut}\langle A, + \rangle$ имеют порядки, делящие $n-1=2$, это тождественный автоморфизм 1_A ; автоморфизм φ_1 , для которого $\varphi_1((1,0)) = (0,1)$, $\varphi_1((0,1)) = (1,0)$; автоморфизм φ_2 , для которого $\varphi_2((1,0)) = (1,1)$, $\varphi_2((0,1)) = (0,1)$; автоморфизм φ_3 , для которого $\varphi_3((1,0)) = (1,0)$, $\varphi_3((0,1)) = (1,1)$. Число классов сопряженности $\text{in}(\delta_1(2))$ автоморфизмов группы $\langle A, + \rangle$, порядки которых делят $n-1=2$, равно 2, т.е. $\text{in}(\delta_1(2))=2$. Первый класс сопряженности одноэлементный, он состоит из тождественного автоморфизма 1_A . Второй класс сопряженности содержит три автоморфизма, это $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Для класса сопряженности $[1_A]_1$ имеем два определяющих набора множеств, это $\{(0,0)\}$ и $\{(1,0)\}, \{(0,1)\}, \{(1,1)\}$. Для класса сопряженности $[\varphi_1]_1$ имеем один определяющий набор множеств, это $\{(0,0), (1,0)\}, \{(0,0), (0,1)\}, \{(0,0), (1,1)\}$.

Для разбиения $\delta_2(2)$ имеем абелеву группу $\langle G, + \rangle = \langle (a_1), + \rangle$, где $|(a_1)| = 4$. Выбираем аддитивную группу $\langle Z_4, + \rangle$ кольца классов вычетов по модулю 4. Оба автоморфизма из $\text{Aut}\langle Z_4, + \rangle$ имеют порядки, делящие $n-1=2$. $\text{in}(\delta_2(2))=2$. Оба класса сопряженности одноэлементные. Для класса сопряженности $[1_{Z_4}]_2$ имеем два определяющих набора множеств, это $\{0, 2\}$ и $\{1, 3\}$. Для класса сопряженности $[\psi_1]_2$, где $\psi_1(1) = 3$, имеем два определяющих набора множеств, это $\{0\}$ и $\{2\}$.

Число неизоморфных тернарных групп порядка 4 равно 7. Если циклическую группу порядка m обозначить Z_m , то все неизоморфные тернарные группы порядка 4 имеют вид:

$$\begin{aligned} & \text{der}_{1_{Z_2 \times Z_2}, (0,0)} Z_2 \oplus Z_2, \quad \text{der}_{1_{Z_2 \times Z_2}, (1,0)} Z_2 \oplus Z_2, \quad \text{der}_{\varphi_1, (0,0)} Z_2 \oplus Z_2, \\ & \text{der}_{1_{Z_4}, 0} Z_4, \quad \text{der}_{1_{Z_4}, 1} Z_4, \quad \text{der}_{\psi_1, 0} Z_4, \quad \text{der}_{\psi_1, 2} Z_4. \end{aligned}$$

Отметим, что среди перечисленных тернарных групп имеются четыре абелевы тернарные группы, это

$$\text{der}_{1_{Z_2 \times Z_2}, (0,0)} Z_2 \oplus Z_2, \quad \text{der}_{1_{Z_2 \times Z_2}, (1,0)} Z_2 \oplus Z_2, \quad \text{der}_{1_{Z_4}, 0} Z_4, \quad \text{der}_{1_{Z_4}, 1} Z_4,$$

причем, первые две тернарные группы раскладываются в прямое произведение абелевых полуциклических тернарных групп, т.е.

$$\begin{aligned} & \text{der}_{1_{Z_2 \times Z_2}, (0,0)} Z_2 \oplus Z_2 \cong \text{der}_{1_{Z_2}, 0} Z_2 \times \text{der}_{1_{Z_2}, 0} Z_2, \\ & \text{der}_{1_{Z_2 \times Z_2}, (1,0)} Z_2 \oplus Z_2 \cong \text{der}_{1_{Z_2}, 1} Z_2 \times \text{der}_{1_{Z_2}, 0} Z_2. \end{aligned}$$

7. Основная теорема о конечных полуабелевых n -арных группах

Опираясь на разложение конечной полуабелевой n -арной группы в прямое произведение примарных полуабелевых n -арных групп (теорема 3) и на его единственность (теорема 4), а также на следствие 5, мы приходим к следующему основному утверждению о конечных полуабелевых n -арных группах.

ТЕОРЕМА 6. *Всякая конечная полуабелева n -арная группа изоморфна прямому произведению примарных полуабелевых n -арных групп. Любые два таких разложения имеют по одинаковому числу множителей и примарные множители в этих разложениях по одному и тому же простому числу имеют одинаковые инварианты.*

Согласно теореме 6, для любой полуабелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$ порядка $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ имеем изоморфизм

$$\langle G, f \rangle \cong \langle G_1, f_1 \rangle \times \langle G_2, f_2 \rangle \times \dots \times \langle G_k, f_k \rangle,$$

где $\langle G_i, f_i \rangle$ – n -арная p_i -группа порядка $|G_i| = p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, k$, p_i – различные простые числа. Совокупность инвариантов примарных множителей

$$\langle G_i, f_i \rangle,$$

$i = 1, \dots, k$, назовем инвариантами n -арной группы $\langle G, f \rangle$.

Для абелевых n -арных групп, опираясь на теоремы 3 и 4, а также на следствия 3 и 6, мы получим основную теорему о строении конечных абелевых n -арных групп:

ТЕОРЕМА 7. *Всякая конечная абелева n -арная группа изоморфна прямому произведению примарных абелевых полуциклических n -арных групп. Любые два таких разложения имеют по одинаковому числу множителей каждого порядка и по каждому простому делителю порядка этой n -арной группы произведения примарных множителей в этих разложениях имеют одинаковые инварианты.*

СЛЕДСТВИЕ 10. (Теорема 11, [14]) *Всякая конечная абелева n -арная группа, порядок которой взаимно прост с $n - 1$, изоморфна прямому произведению примарных циклических n -арных групп. Любые два таких разложения в этом случае имеют по одинаковому числу множителей каждого порядка.*

Согласно теореме 7, для любой абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$ порядка $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ имеем изоморфизм

$$\begin{aligned} \langle G, f \rangle &\cong \langle G_1, f_1 \rangle \times \langle G_2, f_2 \rangle \times \dots \times \langle G_k, f_k \rangle \cong \\ &\cong \prod_{j=1}^{r_1} \langle (a_{j1}), f_{j1} \rangle \times \prod_{j=1}^{r_2} \langle (a_{j2}), f_{j2} \rangle \times \dots \times \prod_{j=1}^{r_k} \langle (a_{jk}), f_{jk} \rangle, \end{aligned}$$

где $\langle G_i, f_i \rangle$ – n -арная p_i -группа порядка $|G_i| = p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, k$, p_i – различные простые числа. По каждому простому числу p_i имеем разложение n -арной p_i -группы

$$\langle G_i, f_i \rangle \cong \langle (a_{1i}), f_{1i} \rangle \times \langle (a_{2i}), f_{2i} \rangle \times \dots \times \langle (a_{r_i i}), f_{r_i i} \rangle$$

в прямое произведение абелевых полуциклических n -арных p_i -групп $\langle (a_{ji}), f_{ji} \rangle$. Совокупность инвариантов примарных множителей $\langle G_i, f_i \rangle$, $i = 1, \dots, k$, назовем инвариантами абелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$.

В качестве примера перечислим все полуабелевы тернарные группы порядка 12 (см. табл. 1).

Выбрав из таблицы абелевы тернарные группы, мы получим перечисление всех абелевых тернарных групп порядка 12 (см. табл. 2).

8. Заключение

В работе изучались полуабелевы и абелевы n -арные группы. Получены следующие основные результаты:

1) Найдены инварианты полуабелевой и абелевой n -арных групп, заданных на абелевой группе, с помощью которых эти n -арные группы определяются с точностью до изоморфизма (теорема 2 и следствие 1);

2) Доказано разложение конечной полуабелевой n -арной группы в прямое произведение примарных полуабелевых n -арных групп (теорема 3) и его единственность (теорема 4);

3) Доказано разложение конечной абелевой n -арной группы в прямое произведение примарных полуциклических n -арных групп (следствие 3) и его единственность (следствие 6);

Таблица 1: полуабелевы тернарные группы порядка 12

Полуабелевы тернарные группы порядка 12	Инварианты
$der_{1_{Z_2 \oplus Z_2}, (0,0)} Z_2 \oplus Z_2 \times der_{1_{Z_3}, 0} Z_3 \cong$ $\cong der_{1_{Z_2}, 0} Z_2 \times der_{1_{Z_2}, 0} Z_2 \times der_{1_{Z_3}, 0} Z_3,$	$2, 2, [1_{Z_2 \oplus Z_2}]_1, \{0\}; 3, [1_{Z_3}]_1, \{0, 1, 2\}$
$der_{1_{Z_2 \oplus Z_2}, (1,0)} Z_2 \oplus Z_2 \times der_{1_{Z_3}, 0} Z_3 \cong$ $\cong der_{1_{Z_2}, 1} Z_2 \times der_{1_{Z_2}, 0} Z_2 \times der_{1_{Z_3}, 0} Z_3,$	$2, 2, [1_{Z_2 \oplus Z_2}]_1, \{(1, 0)\}, \{(0, 1)\}, \{(1, 1)\};$ $3, [1_{Z_3}]_1, \{0, 1, 2\}$
$der_{\varphi_1, (0,0)} Z_2 \oplus Z_2 \times der_{1_{Z_3}, 0} Z_3$	$2, 2, [\varphi_1]_1, \{(0, 0), (1, 0)\}, \{(0, 0), (0, 1)\},$ $\{0, (0, 0), (1, 1)\}; 3, [1_{Z_3}]_1, \{0, 1, 2\}$
$der_{1_{Z_4}, 0} Z_4 \times der_{1_{Z_3}, 0} Z_3$	$4, [1_{Z_4}]_2, \{0, 2\}; 3, [1_{Z_3}]_1, \{0, 1, 2\}$
$der_{1_{Z_4}, 1} Z_4 \times der_{1_{Z_3}, 0} Z_3$	$4, [1_{Z_4}]_2, \{1, 3\}; 3, [1_{Z_3}]_1, \{0, 1, 2\}$
$der_{\psi_1, 0} Z_4 \times der_{1_{Z_3}, 0} Z_3$	$4, [\psi_1]_2, \{0\}; 3, [1_{Z_3}]_1, \{0, 1, 2\}$
$der_{\psi_1, 2} Z_4 \times der_{1_{Z_3}, 0} Z_3$	$4, [\psi_1]_2, \{2\}; 3, [1_{Z_3}]_1, \{0, 1, 2\}$
$der_{1_{Z_2 \oplus Z_2}, (0,0)} Z_2 \oplus Z_2 \times der_{\varphi_1, 0} Z_3 \cong$ $\cong der_{1_{Z_2}, 0} Z_2 \times der_{1_{Z_2}, 0} Z_2 \times der_{\varphi_1, 0} Z_3,$	$2, 2, [1_{Z_2 \oplus Z_2}]_1, \{0\}; 3, [\varphi_1]_1, \{0\}$
$der_{1_{Z_2 \oplus Z_2}, (1,0)} Z_2 \oplus Z_2 \times der_{\varphi_1, 0} Z_3 \cong$ $\cong der_{1_{Z_2}, 1} Z_2 \times der_{1_{Z_2}, 0} Z_2 \times der_{\varphi_1, 0} Z_3,$	$2, 2, [1_{Z_2 \oplus Z_2}]_1, \{(1, 0)\}, \{(0, 1)\}, \{(1, 1)\};$ $3, [\varphi_1]_1, \{0\}$
$der_{\varphi_1, (0,0)} Z_2 \oplus Z_2 \times der_{\varphi_1, 0} Z_3$	$2, 2, [\varphi_1]_1, \{(0, 0), (1, 0)\}, \{(0, 0), (0, 1)\},$ $\{0, (0, 0), (1, 1)\}; 3, [\varphi_1]_1, \{0\}$
$der_{1_{Z_4}, 0} Z_4 \times der_{\varphi_1, 0} Z_3$	$4, [1_{Z_4}]_2, \{0, 2\}; 3, [\varphi_1]_1, \{0\}$
$der_{1_{Z_4}, 1} Z_4 \times der_{\varphi_1, 0} Z_3$	$4, [1_{Z_4}]_2, \{1, 3\}; 3, [\varphi_1]_1, \{0\}$
$der_{\psi_1, 0} Z_4 \times der_{\varphi_1, 0} Z_3$	$4, [\psi_1]_2, \{0\}; 3, [\varphi_1]_1, \{0\}$
$der_{\psi_1, 2} Z_4 \times der_{\varphi_1, 0} Z_3$	$4, [\psi_1]_2, \{2\}; 3, [\varphi_1]_1, \{0\}$

Таблица 2: абелевы тернарные группы порядка 12

Абелевы тернарные группы порядка 12	Инварианты
$der_{1_{Z_2 \oplus Z_2}, (0,0)} Z_2 \oplus Z_2 \times der_{1_{Z_3}, 0} Z_3 \cong$ $\cong der_{1_{Z_2}, 0} Z_2 \times der_{1_{Z_2}, 0} Z_2 \times der_{1_{Z_3}, 0} Z_3,$	$2, 2, [1_{Z_2 \oplus Z_2}]_1, \{0\}; 3, [1_{Z_3}]_1, \{0, 1, 2\}$
$der_{1_{Z_2 \oplus Z_2}, (1,0)} Z_2 \oplus Z_2 \times der_{1_{Z_3}, 0} Z_3 \cong$ $\cong der_{1_{Z_2}, 1} Z_2 \times der_{1_{Z_2}, 0} Z_2 \times der_{1_{Z_3}, 0} Z_3,$	$2, 2, [1_{Z_2 \oplus Z_2}]_1, \{(1, 0)\}, \{(0, 1)\}, \{(1, 1)\};$ $3, [1_{Z_3}]_1, \{0, 1, 2\}$
$der_{1_{Z_4}, 0} Z_4 \times der_{1_{Z_3}, 0} Z_3$	$4, [1_{Z_4}]_2, \{0, 2\}; 3, [1_{Z_3}]_1, \{0, 1, 2\}$
$der_{1_{Z_4}, 1} Z_4 \times der_{1_{Z_3}, 0} Z_3$	$4, [1_{Z_4}]_2, \{1, 3\}; 3, [1_{Z_3}]_1, \{0, 1, 2\}$

4) Найден признак разложимости конечной примарной полуабелевой n -арной группы в прямое произведение n -арных групп меньшего порядка (теорема 5);

5) Показано, что всякая конечная полуабелева n -арная группа изоморфна прямому произведению примарных полуабелевых n -арных групп. Любые два таких разложения имеют по одинаковому числу множителей и примарные множители в этих разложениях по одному и тому же простому числу имеют одинаковые инварианты (теорема 6);

6) Доказано, что всякая конечная абелева n -арная группа изоморфна прямому произведению примарных абелевых полуциклических n -арных групп. Любые два таких разложения имеют по одинаковому числу множителей каждого порядка и по каждому простому делителю порядка этой n -арной группы произведения примарных множителей в этих разложениях имеют одинаковые инварианты.

Пункты 5) и 6) являются главными результатами данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969–1970 уч. г. М.: Наука, 1974. 158 с.

2. Dornte W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff // Math. Zeitschr. 1928. 29. P. 1–19.
3. Post E. L. Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. 48. P. 208–350.
4. Сушкевич А. К. Теория обобщенных групп. Харьков–Киев: Хозтехиздат, 1937. 157 с.
5. Русаков С. А. Алгебраические n -арные системы. Минск.: Навука і техника, 1992. 264 с.
6. Гальмак А. М. n -арные группы. Часть I. Гомель.: Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, 2003. 195 с.
7. Гальмак А. М. n -арные группы. Часть 2. Минск.: Издательский центр БГУ, 2007. 325 с.
8. Глускин Л. М. Позиционные оперативы // Мат. сборник. 1965. Т. 68 (110), № 3. С. 444–472.
9. Hosszu M. On the explicit form of n -group operations // Publ. Math. 1963. V. 10. № 1–4. P. 88–92.
10. Glazek K., Michalski J., Sierocki A. I. On evaluation of some polyadic groups // Contributions to General Algebra 3, Proc. Conf., Vienna. 1985. P. 159–171.
11. Щучкин Н. А. Прямое произведение n -арных групп // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, Выпуск 2. С. 101–121.
12. Щучкин Н. А. Полуциклические n -арные группы // Известия ГГУ им. Скорины. 2009. 3 (54). С. 186–194.
13. Dudek W. A., Michalski J. On retracts of polyadic groups // Demonstratio Math. 1984. 17. P. 281–301.
14. Бощенко А. П., Щучкин Н. А. Конечные абелевы n -арные группы // Чебышевский сборник. 2011. Т. XII, Выпуск 2(38). С. 5–14.
15. Гальмак А. М. Полуабелевы n -арные группы с идемпотентами // Веснік ВДУ ім. П. М. Машэрава. 1999. 2 (12). С. 56–60.
16. Dudek W. A. Remarks to Glazek's results on n -ary groups // Discussiones Mathematicae. General Algebra and Applications. 2007. 27. P. 199–233.
17. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: "Мир" 1977. 415 с.
18. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977. 495 с.

REFERENCES

1. Kurosh, A. G. 1974, "General algebra, Lectures 1969–1970", Nauka, Moscow, 158 pp. (Russian)
2. Dornte, W. 1928, "Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff", Math. Zeitschr. 29, pp. 1–19.
3. Post, E. L. 1940, "Polyadic groups", Trans. Amer. Math. Soc. 48, pp. 208–350.
4. Sushkevitch, A. K. 1937, "Theory of generalized groups", Chostechizdat, Charkov–Kiev, 221 pp. (Russian)
5. Rusakov, S. F. 1992, "Algebraic n -ary systems", Nuvuka i technika, Minsk, 264 pp. (Russian)

6. Gal'mak, A. M. 2003, " n -ary groups", Part I, Gomel university, Gomel, 195 pp. (Russian)
7. Gal'mak, A. M. 2007, " n -ary groups", Part 2, Publishing center of BSU, Minsk, 325 pp. (Russian)
8. Gluskin, L. M. 1965, "Positional oeratives", Math. collection, V.68 (110), No 3, pp. 444–472. (Russian)
9. Hosszu, M. 1963, "On the explicit form of n -group operacions", Publ. Math. 10, pp. 88–92.
10. Glazek, K., Michalski, J. & SierockiA, I. 1985, "On evaluation of some polyadic groups", Contributions to General Algebra 3, Proc. Conf., Vienna. pp. 159–171.
11. Shchuchkin, N. A. 2014, "Direct product of n -ary groups", Chebyshev's collection, vol. 15, issue 2, pp. 101–121. (Russian)
12. Shchuchkin, N. A. 2009, "Semicyclic n -ary groups", Izv. Gomel State Univ. 3(54), pp. 186–194. (Russian)
13. Dudek, W. A. & Michalski, J. 1984, "On retracts of polyadic groups", Demonstratio Math., 17, pp. 281–301.
14. Boshchenko, A. P. & Shchuchkin, N. A. 2011, "Finite abelian n -ary groups", Chebyshev's collection, 2(38), pp. 5–14. (Russian)
15. Gal'mak, A. M. 1999, "Semiabelian n -ary groups of idempotentes", Vestnik VDU, 2 (12), pp. 56–60. (Russian)
16. Dudek, W. A. 2007, "Remarks to Glazek's results on n -ary groups", Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications, 27, pp. 199–233.
17. Fuchs, L. 1973, "Infinite abelian groups", vol. 2. New and London, 415 pp.
18. Kostrikin, A. I. 1977, "Input in algebra", Nauka, Moscow, 495 pp. (Russian)

Волгоградский государственный социально-педагогический университет.

Поступило 29.10.2015.

Принято в печать 11.03.2016 г.