ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16. Выпуск 4.

УДК 512.579

О ГАМИЛЬТОНОВОМ ЗАМЫКАНИИ НА КЛАССЕ АЛГЕБР С ОДНИМ ОПЕРАТОРОМ

В. Л. Усольцев (г. Волгоград)

Аннотация

В работе изучаются гамильтоново простые алгебры и решетки гамильтоново замкнутых подалгебр в классе алгебр с одним оператором. Результаты, полученные для алгебр с произвольной основной сигнатурой, используются для описания гамильтоново простых алгебр и решеток гамильтоново замкнутых подалгебр в классе унаров с мальцевской операцией, определенной В. К. Карташовым. Унаром с мальцевской операцией называется алгебра, сигнатура которой состоит из мальцевской операции и унарной операции, действующей как эндоморфизм относительно первой операции.

Универсальная алгебра A называется гамильтоновой, если носитель любой ее подалгебры является классом некоторой конгруэнции алгебры A. А. Г. Пинус определил понятие гамильтонова замыкания на произвольной универсальной алгебре. А именно, гамильтоновым замыканием $\overline{B}$ подалгебры B универсальной алгебры A называется наименьшая подалгебра алгебры A, включающая в себя B и являющаяся классом некоторой конгруэнции алгебры A. Подалгебра B универсальной алгебры A называется гамильтоново замкнутой, если $\overline{B} = B$. Совокупность всех гамильтоново замкнутых подалгебр алгебры A, пополненная пустым множеством, образует решетку относительно включения. Универсальная алгебра A называется гамильтоново простой, если гамильтоново замыкание любой ее неодноэлементной непустой подалгебры совпадает с A.

Получены необходимые условия гамильтоновой простоты для произвольных алгебр с оператором, все основные операции которых имеют положительную арность и являются идемпотентными. Для таких алгебр построены семейства подалгебр, образующих цепи в их решетках гамильтоново замкнутых подалгебр. В случае, когда унарный редукт алгебры связен, необходимые условия гамильтоновой простоты получены для алгебр с оператором, имеющих произвольную основную сигнатуру. Показано также, что эти условия не являются достаточными. Для произвольной алгебры с оператором, все основные операции которой идемпотентны, получены необходимые условия того, что ее решетка гамильтоново замкнутых подалгебр является цепью.

Найдены необходимые и достаточные условия гамильтоновой простоты для унаров с мальцевской операцией, определенной В. К. Карташовым.

Получено описание строения решеток гамильтоново замкнутых подалгебр для алгебр данного класса. Для таких решеток найдены необходимые и достаточные условия их дистрибутивности и модулярности, а также условия, при которых решетка является цепью. Описано строение атомов и коатомов этих решеток.

Ключевые слова: гамильтоново замыкание подалгебры, гамильтоново простая алгебра, решетка гамильтоново замкнутых подалгебр, алгебра с операторами, мальцевская операция

Библиография: 22 названия.

ON HAMILTONIAN CLOSURE ON CLASS OF ALGEBRAS WITH ONE OPERATOR

V. L. Usol'tsev (Volgograd)

Abstract

In this article we study Hamiltonian simple algebras and lattices of Hamiltonian closed subalgebras in class of algebras with one operator. Obtained for algebras with arbitrary basic signature results are used for the description of Hamiltonian simple algebras and lattices of Hamiltonian closed subalgebras from class of unars with Mal'tsev operation that by V. K. Kartashov were defined. Unar with Mal'tsev operation is an algebra with one Mal'tsev operation $p(x, y, z)$ and one unary operation acting as endomorphism with respect to operation $p(x, y, z)$.

Universal algebra A is called Hamiltonian if every subuniverse of A is a block of some congruence of the algebra A. A. G. Pinus defined a Hamiltonian closure on an arbitrary universal algebra. Precisely, the Hamiltonian closure $\overline{B}$ of a subalgebra B of a universal algebra A is the smallest subalgebra of algebra A containing B that coincides with some block of some congruence on algebra A. Subalgebra B of universal algebra A is called Hamiltonian closed if $\overline{B} = B$. Set of all Hamiltonian closed subalgebras of algebra A with added empty set is lattice with respect to inclusion. A universal algebra A is called a Hamiltonian simple algebra if $\overline{B} = A$ for each non-empty and non-one-element subalgebra B of A.

We found necessary conditions of Hamiltonian simplicity for arbitrary algebras with one operator and idempotent basic operations of positive arity. For these algebras families of their subalgebras forming chains with respect to inclusion in their lattices of Hamiltonian closed subalgebras are constructed. We also found necessary conditions of Hamiltonian simplicity for arbitrary algebras with one operator and with connected unary reduct. It is showed these conditions are not sufficient. For arbitrary algebras with one operator and idempotent basic operations necessary conditions of their lattice of Hamiltonian closed subalgebras is chain are obtained.

We found necessary and sufficient conditions of Hamiltonian simplicity for unars with Mal'tsev operation that by V. K. Kartashov were defined. The structure of lattices of Hamiltonian closed subalgebras for algebras from this class is described. For these lattices necessary and sufficient conditions of their distributivity and modularity are obtained. We also found necessary and sufficient conditions when a lattice of Hamiltonian closed subalgebras of algebras from given class is a chain. The structure of atoms and coatoms of such lattices is described.

Keywords: Hamiltonian closure of a subalgebra, Hamiltonian simple algebra, lattices of Hamiltonian closed subalgebras, algebra with operators, Mal'tsev operation

Bibliography: 22 titles.

1. Введение

В работе [1] А. Г. Пинус вводит понятие гамильтонова замыкания на универсальных алгебрах — некоторой операции замыкания на решетке $SubA$ подалгебр алгебры A, связанной со свойством гамильтоновости.

Свойство гамильтоновости для универсальных алгебр было введено в рассмотрение Б. Чакань [2] и К. Шода [3], как естественное обобщение понятия гамильтоновой группы.

Универсальная алгебра A называется *гамильтоновой*, если носитель любой ее подалгебры является классом некоторой конгруэнции алгебры A. Многообразие алгебр называется гамильтоновым, если любая его алгебра гамильтонова. Гамильтоновыми являются, в частности, абелевы группы, модули, унарные алгебры.

Гамильтоновы алгебры и многообразия изучались в ряде работ (см., например, [4] – [7]). В [4] показано, что если декартов квадрат алгебры гамильтонов, то сама алгебра абелева. В той же работе доказано, что из гамильтоновости многообразия следует его абелевость, а для локально конечных многообразий свойства абелевости и гамильтоновости эквивалентны. В [5] гамильтоновы многообразия характеризуются с помощью строгих мальцевских условий. Е. В. Киш [6] охарактеризовал гамильтоновы алгебры в терминах полиномиальных функций. В [7] описаны гамильтоновы алгебры в классах абелевых полугрупп, конечных и абелевых группоидов с единицей, а также доказано, что любая конечная абелева квазигруппа является гамильтоновой.

Заметим, что, помимо гамильтоновости, изучается и ряд других свойств, связывающих конгруэнц-классы и подалгебры универсальных алгебр. Обзор таких свойств можно найти в [8].

Гамильтоновым замыканием [1] $\overline{B}$ подалгебры B универсальной алгебры A называется наименьшая подалгебра алгебры A, включающая в себя B и являющаяся классом некоторой конгруэнции алгебры A.

Подалгебра B универсальной алгебры A называется *гамильтоново замкнутой* [1], если $\overline{B} = B$. Таким образом, все подалгебры гамильтоновой алгебры гамильтоново замкнуты. Заметим, что подалгебры с таким свойством рассматривались в работе [9] и были названы *нормальными*.

Совокупность всех гамильтоново замкнутых подалгебр алгебры A обозначается через $Sub_H A$. Чтобы обеспечить возможность рассматривать ее как решетку относительно теоретико-множественного включения, в [1] решетка $Con A$ конгруэнций алгебры A формально пополняется пустым отношением. Оно рассматривается как конгруэнция с единственным конгруэнц-классом: пустым множеством. Тогда пустая подалгебра алгебры A (в случае ее вхождения в $Sub A$) гамильтоново замкнута, и является нулем решетки $Sub_H A$. Далее везде будем считать пустое множество подалгеброй.

В [1] также вводится в рассмотрение свойство, в некотором смысле противоположное гамильтоновости — гамильтонова простота.

Универсальная алгебра A называется *гамильтоново простой*, если гамильтоново замыкание любой ее неодноэлементной (непустой) подалгебры совпадает с A. Гамильтоново простыми (но не простыми) являются, например, любые недвухэлементные булевы алгебры.

В настоящей работе изучаются гамильтоново простые алгебры и решетки гамильтоново замкнутых подалгебр в классе алгебр с одним оператором. Результаты, полученные для алгебр с произвольной основной сигнатурой, используются для описания гамильтоново простых алгебр и решеток гамильтоново замкнутых подалгебр в классе унаров с мальцевской операцией, определенной В. К. Карташовым в [18].

Алгеброй с операторами (см. [10], §13) называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций. Другими словами, операторы перестановочны с любой основной операцией.

Алгебры с операторами естественным образом связаны с другим классом универсальных алгебр — *унарами*, то есть, алгебрами с одной унарной операцией (см., напр., [11] – [13]). Если f — унарная операция из сигнатуры Ω, то унар $\langle A, f\rangle$ называется *унарным редуктом* алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. Мы используем аппарат теории унаров для изучения алгебр с операторами в терминах их унарных редуктов.

Мальцевской операцией называется тернарная операция $d(x, y, z)$, удовлетворяющая тождествам Мальцева

$$d(x, y, y) = d(y, y, x) = x. \tag{1}$$

Алгебрам с мальцевской операцией (как сигнатурной, так и термальной) уделяется значительное внимание в современной универсальной алгебре и ее приложениях (см., например, [15], [16]).

Мальцевская операция $d(x, y, z)$ называется *функцией Пиксли*, если она удовлетворяет тождествам Пиксли $d(y, y, x) = d(x, y, y) = d(x, y, x) = x$ [17].

Унаром с мальцевской операцией [18] называется алгебра $\langle A, d, f\rangle$ с унарной операцией f и тернарной операцией d, на которой выполняются тождества Мальцева (1) и тождество перестановочности $f(d(x, y, z)) = d(f(x), f(y), f(z))$.

В [18] показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно так задать тернарную операцию p, что алгебра $\langle A, p, f\rangle$ становится унаром с мальцевской операцией. Эта операция определяется следующим образом. Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента $z \in A$ через $f^n(z)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу z; $f^0(z) = z$.

Положим

$$M_{x,y} = \{n \in \mathrm{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\},$$

а также $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$, и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x, y, z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leqslant k(y, z) \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \qquad (2)$$

Простые и псевдопростые алгебры $\langle A, p, f\rangle$ из класса, введеного в рассмотрение в [18], были полностью описаны в [21]. В [14] было получено полное описание строго простых алгебр, в [22] — полиномиально полных, а в [19] — гамильтоновых алгебр данного класса.

2. Основные определения и конструкции

Через $SubA$ обозначается решетка подалгебр алгебры A, через $ConA$ — решетка ее конгруэнций. Класс конгруэнции θ, порожденный элементом x, обозначается через $[x]\theta$. Алгебра называется *простой*, если она имеет в точности две конгруэнции (единичную $\bigtriangledown$ и нулевую $\bigtriangleup$). Через N обозначается множество натуральных чисел.

Через N_5 и M_3 обозначаются решетки, называемые *пентагоном* и *диамантом* соответственно (см. [20, с. 87]).

Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар. Для любых чисел $n > 0$, $m \geqslant 0$ положим

$$C_n^m = \langle a | f^m(a) = f^{n+m}(a)\rangle.$$

Унар C_n^0 называется *циклом длины* n. Элемент a унара называется *циклическим*, если подунар, порожденный этим элементом, является циклом.

Элемент a унара называется *периодическим*, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$, и *непериодическим*, в противном случае. Через $T(A)$ и $D(A)$ обозначаются, соответственно, множества периодических и непериодических элементов унара A. Унар $\langle A, f\rangle$ называется *периодическим*, если $A = T(A)$, и *унаром без кручения*, если $A = D(A)$. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geqslant 1$, называется *глубиной элемента* a и обозначается через $t(a)$. *Глубиной* $t(A)$ *унара* A

называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$. Если множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограничено, то говорят, что унар имеет бесконечную глубину.

Объединение двух непересекающихся унаров B и C называется их *суммой* и обозначается через $B + C$. Унар $\langle A, f\rangle$ называется *связным*, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ при некоторых $n, m \geqslant 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется *компонентой связности* унара A. Через F_1 обозначается свободный однопорожденный унар.

Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется *неподвижным*, если $f(a) = a$. Связный унар с неподвижным элементом называется *корнем*.

Пусть $\langle A, f\rangle$ является корнем. Тогда через D_m обозначается его подунар, состоящий из всех элементов с глубиной, не превосходящей m. Если $t(A)$ конечна, то $0 \leqslant m \leqslant t(A)$; в противном случае, $0 \leqslant m < t(A)$.

Пусть $n \in N$. Через σ_n обозначается конгруэнция алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ с оператором $f \in \Omega$, определенная как $\mathrm{Ker} f^n$. Определение корректно, так как операция f является эндоморфизмом алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. Положим также $\sigma_0 = \triangle$.

В [21] на унаре $\langle A, f\rangle$ определено бинарное отношение σ:

$$x \sigma y \Leftrightarrow \exists n > 0\ (f^n(x) = f^n(y)),$$

и показано, что оно является конгруэнцией любой алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ с оператором $f \in \Omega$.

Пусть B — подунар произвольного унара $\langle A, f\rangle$. Через θ_B обозначается конгруэнция унара $\langle A, f\rangle$, определенная по правилу [13]: условие $x \theta_B y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in B$.

3. Алгебры с одним оператором

Лемма 1. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$, унарный редукт $\langle A, f\rangle$ которой является связным унаром с неподвижным элементом. Тогда алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ может иметь не более одной нульарной операции.*

Доказательство. Пусть $a, b \in \Omega$ — различные нульарные операции алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. Так как оператор f является эндоморфизмом относительно основных операций, то $f(a) = a$ и $f(b) = b$, что противоречит связности унара $\langle A, f\rangle$. $\square$

Предложение 1. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$, унарный редукт $\langle A, f\rangle$ которой является связным унаром с неподвижным элементом. Тогда для всех $m < t(A)$ подунар D_m унара $\langle A, f\rangle$ является гамильтоново замкнутой подалгеброй алгебры $\langle A, \Omega\rangle$.*

Доказательство. Пусть $0 \leqslant m < t(A)$, $n > 0$, $x_1, \ldots, x_n \in D_m$, $\varphi \in \Omega$ — основная n-арная операция алгебры A, a — неподвижный элемент унара $\langle A, f\rangle$. Обозначим элемент $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ через v. Тогда $f^m(v) = f^m(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) =$

$\varphi(f^m(x_1), \ldots, f^m(x_n))$. Поскольку $x_1, \ldots, x_n \in D_m$, то $t(x_1) \leqslant m$, ..., $t(x_n) \leqslant m$. Отсюда, $f^m(x_1) = \ldots = f^m(x_n) = a$. Тогда $f^m(v) = \varphi(a, a, \ldots, a)$. В то же время, элемент $\varphi(a, a, \ldots, a)$ совпадает с неподвижным элементом a, поскольку $f(\varphi(a, a, \ldots, a)) = \varphi(f(a), f(a), \ldots, f(a)) = \varphi(a, a, \ldots, a)$. Отсюда, $f^m(v) = a$ и, значит, $t(v) \leqslant m$, то есть, $v \in D_m$.

Пусть $e \in \Omega$ — нульарная операция алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. Тогда $f(e) = e$, то есть, $e = a \in D_m$. При этом, по лемме 1, алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ не имеет нульарных операций, отличных от e.

Таким образом, D_m — подалгебра алгебры $\langle A, \Omega\rangle$.

Докажем, что $D_m = [a]\sigma_m$. Пусть $x \in D_m$. Тогда $t(x) \leqslant m$. Отсюда, $f^m(x) = a = f^m(a)$, что влечет $x\sigma_m a$ и $x \in [a]\sigma_m$. Пусть теперь $x \in [a]\sigma_m$. Тогда $f^m(x) = f^m(a) = a$, откуда $t(x) \leqslant m$ и $x \in D_m$. Таким образом, $\overline{D_m} = D_m$. □

Следствие 1. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$, унарный редукт $\langle A, f\rangle$ которой является связным унаром с неподвижным элементом. Если алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ является гамильтоново простой, то $t(A) \leqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $t(A) > 1$. По предложению 1, D_1 — гамильтоново замкнутая подалгебра алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. Так как $t(A) > 1$, то D_1 — неодноэлементная собственная подалгебра в $\langle A, \Omega\rangle$. □

Замечание 1. *Необходимое условие гамильтоновой простоты алгебры $\langle A, \Omega\rangle$, приведенное в следствии 1, не является достаточным.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру $\langle A, d, f\rangle$ с тернарной операцией d и оператором f, заданными следующим образом: $A = \{a, b, c\}$, $f(a) = a$, $f(b) = a$, $f(c) = a$, $d(a, b, c) = d(c, b, a) = a$, $d(a, c, b) = d(b, a, c) = d(b, c, a) = d(c, a, b) = b$ и $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(x, y, x) = x$ для любых $x, y, \in A$.

Из определений операций d и f следует, что для унара $\langle A, f\rangle$ выполняется условие $t(A) \leqslant 1$, а подмножество $\{a, c\}$ множества A является подалгеброй алгебры $\langle A, d, f\rangle$. Непосредственная проверка показывает, что отношение $\theta_{\{a,c\}}$ на унаре $\langle A, f\rangle$ является конгруэнцией на $\langle A, d, f\rangle$, имеющей класс $\{a, c\}$. Таким образом, $\langle A, \Omega\rangle$ не является гамильтоново простой. □

Предложение 2. *Пусть произвольная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ с оператором $f \in \Omega$ имеет идемпотентные основные операции только положительной арности и несвязный унарный редукт $\langle A, f\rangle$, содержащий компоненту связности B, имеющую неподвижный элемент. Тогда компонента B и любой ее подунар вида D_m, где $0 \leqslant m < t(B)$, являются гамильтоново замкнутыми подалгебрами алгебры $\langle A, \Omega\rangle$.*

Доказательство. В случае, когда B одноэлементна, утверждение очевидно, поэтому далее считаем, что $|B| > 1$. Докажем, что B — подалгебра алгебры $\langle A, \Omega\rangle$.

Так как B — компонента связности, то множество B замкнуто относительно операции f. Пусть $n > 0$, $x_1, \ldots, x_n \in B$ и $\varphi \in \Omega$ — основная n-арная операция алгебры A. Так как $\langle B, f\rangle$ — корень, то он содержит неподвижный элемент a. Обозначим через m наибольшую из глубин элементов $x_1, \ldots, x_n$. Тогда $f^m(x_1) = \ldots = f^m(x_n) = a$. С учетом идемпотентности операции φ, имеем $f^m(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) = \varphi(f^m(x_1), \ldots, f^m(x_n)) = \varphi(a, a, \ldots, a) = a$. Тогда $t(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) \leqslant m$, откуда $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in B$.

Покажем теперь, что множество B является классом конгруэнции $\sigma \in \in Con\langle A, \Omega\rangle$. Пусть $x \in B$. Обозначим $t(x)$ через n. Отсюда, $f^n(x) = a = f^n(a)$, что влечет $x\sigma a$, откуда $B \subseteq [a]\sigma$. Пусть теперь $x \in [a]\sigma$. Тогда $f^n(x) = f^n(a)$ для некоторого $n \geqslant 0$. Учитывая, что $f^n(a) = a$, получаем $f^n(x) = a$, откуда $x \in B$. Окончательно, $B = [a]\sigma$. Тогда $\overline{B} = B$.

Для подунаров унара $\langle B, f\rangle$, имеющих вид D_m, где $0 \leqslant m < t(B)$, рассуждения аналогичны доказательству предложения 1, за исключением того, что $\varphi(a, a, \ldots, a) = a$ следует из идемпотентности операции φ. □

Следствие 2. *Если произвольная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ с оператором $f \in \Omega$, имеющая идемпотентные основные операции только положительной арности и несвязный унарный редукт $\langle A, f\rangle$, является гамильтоново простой, то унар $\langle A, f\rangle$ не содержит неодноэлементных компонент связности, имеющих неподвижный элемент.*

Замечание 2. *Необходимое условие гамильтоновой простоты алгебры $\langle A, \Omega\rangle$, приведенное в следствии 2, не является достаточным.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру $\langle A, d, f\rangle$ с тернарной операцией d и оператором f, заданными следующим образом: $A = \{a, b, c\}$, $f(a) = a$, $f(b) = b$, $f(c) = c$, $d(a, b, c) = d(c, b, a) = a$, $d(a, c, b) = d(b, a, c) = d(b, c, a) = d(c, a, b) = b$ и $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(x, y, x) = x$ для любых $x, y, \in A$.

Из определений операций d и f следует, что унар $\langle A, f\rangle$ несвязен, операция d идемпотентна, а подмножество $\{a, c\}$ множества A является подалгеброй алгебры $\langle A, d, f\rangle$. Непосредственная проверка показывает, что отношение $\theta_{\{a,c\}}$ на унаре $\langle A, f\rangle$ является конгруэнцией на $\langle A, d, f\rangle$, имеющей класс $\{a, c\}$. Таким образом, $\langle A, \Omega\rangle$ не является гамильтоново простой. □

Предложение 3. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$ и идемпотентными основными операциями. Если решетка $Sub_H\langle A, \Omega\rangle$ является цепью, то унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ содержит не более одного одноэлементного подунара.*

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ содержит одноэлементные подунары B и C. Так как основные операции алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ идемпотентны, то B и C являются ее подалгебрами, причем, очевидно, гамильтоново замкнутыми. При этом, B и C не сравнимы в $Sub_H\langle A, \Omega\rangle$. □

4. Унары с мальцевской операцией

Далее везде через $\langle A, p, f\rangle$ будем обозначать алгебру с оператором f и мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу (2). Заметим, что в силу (2), любой подунар унарного редукта $\langle A, f\rangle$ этой алгебры является ее подалгеброй. Пустое множество также будем считать подалгеброй в $\langle A, p, f\rangle$. Через $Sub_H A$ обозначается решетка гамильтоново замкнутых подалгебр алгебры $\langle A, p, f\rangle$.

Лемма 2. *Пусть $\theta \in Con\langle A, p, f\rangle$, $\theta \neq \bigtriangledown$, $a, b \in A$. Тогда из условия $a\theta b$ следует, что $k(a, b) < \infty$.*

Доказательство. Пусть $k(a, b) = \infty$. Предположим, что $a\theta b$. Так как $\theta \neq \bigtriangledown$, то найдется элемент $c \notin [b]\theta$. Поскольку $k(c, a) \leqslant \infty = k(a, b)$, то из (2) имеем $p(c, a, b) = b$. С другой стороны, $p(c, a, a) = c$ и, следовательно, $b\theta c$, что противоречит выбору элемента c. □

Лемма 3. *Пусть унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ несвязен, $\theta \in Con\langle A, p, f\rangle$ и $\theta \neq \bigtriangledown$. Тогда любой класс конгруэнции θ содержится в некоторой компоненте связности унара $\langle A, f\rangle$.*

Доказательство. Пусть K — произвольный класс конгруэнции θ. Обозначим его порождающий элемент через b. Поскольку $b \in A$, то $b \in B$ для некоторой компоненты связности B унара $\langle A, f\rangle$. Если класс K одноэлементен, то утверждение леммы очевидно.

Пусть K неодноэлементен. Тогда он содержит такой элемент $a \in A$, что $a \neq b$. Предположим, что $a \notin B$. Тогда a содержится в компоненте связности, отличной от B. Последнее влечет $k(a, b) = \infty$. По лемме 2, имеем $(a, b) \notin \theta$, что противоречит условию $a, b \in K$. □

Следствие 3. *Пусть унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ несвязен. Тогда гамильтоново замыкание любой подалгебры B алгебры $\langle A, p, f\rangle$, унарный редукт $\langle B, f\rangle$ которой также несвязен, совпадает с A.*

Лемма 4. *Пусть $\langle A, f\rangle$ — связный унар, имеющий неодноэлементный подунар C, на котором операция f инъективна, причем C содержится в любом подунаре унара $\langle A, f\rangle$. Тогда алгебра $\langle A, p, f\rangle$ является гамильтоново простой.*

Доказательство. Если подунар C — несобственный, то операция f инъективна на A. По теореме 2 [21], алгебра $\langle A, p, f\rangle$ является простой, а, следовательно, и гамильтоново простой.

Пусть теперь подунар C — собственный. Предположим, что алгебра $\langle A, p, f\rangle$ не является гамильтоново простой. Тогда для некоторой неодноэлементной подалгебры B алгебры $\langle A, p, f\rangle$ имеем $\overline{B} \neq A$. Очевидно, унарный редукт $\langle B, f\rangle$ подалгебры B является подунаром унара $\langle A, f\rangle$. По условию, $C \subseteq B$ и, следовательно, $C \subseteq \overline{B}$. Так как подунар C неодноэлементен, то найдутся несовпадающие элементы $a, b \in C \subseteq \overline{B}$. Обозначим через θ конгруэнцию алгебры

$\langle A, p, f \rangle$, для которой $\overline{B}$ является конгруэнц-классом. Тогда $a\theta b$. В то же время, поскольку $\overline{B} \neq A$, то $\theta \neq \bigtriangledown$. Отсюда, $(c, b) \notin \theta$ для некоторого элемента $c \in A$. Поскольку элементы a и b различны и операция f инъективна, то $k(a, b) = \infty$, откуда $p(c, a, b) = b$. С другой стороны, $p(c, a, a) = c$ и, следовательно, $b\theta c$, что противоречит выбору элемента c. □

Лемма 5. *Пусть $\langle A, f \rangle$ — несвязный унар, не содержащий неодноэлементных компонент связности, имеющих неподвижные элементы. Тогда алгебра $\langle A, p, f \rangle$ является гамильтоново простой.*

Доказательство. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ удовлетворяет условиям леммы. Предположим, что алгебра $\langle A, p, f \rangle$ не является гамильтоново простой. Тогда для некоторой неодноэлементной подалгебры B алгебры $\langle A, p, f \rangle$ имеем $\overline{B} \neq A$. Так как $\overline{B}$ является классом некоторой конгруэнции $\theta \in Con\langle A, p, f \rangle$, то из $\overline{B} \neq A$ следует, что $\theta \neq \bigtriangledown$.

По лемме 3, $\overline{B}$ содержится в некоторой компоненте связности D унара $\langle A, f \rangle$. Так как B неодноэлементна, то и D является неодноэлементной. Поскольку D связна, то она является либо унаром без кручения, либо периодическим унаром.

В первом случае D имеет такой подунар $C \cong F_1$, что любой подунар унара $\langle D, f \rangle$ содержит C, а значит, $C \subseteq B \subseteq \overline{B}$. При этом, C неодноэлементен и операция f на нем инъективна.

Во втором случае D содержит такой подунар C, изоморфный C_n^0 для некоторого $n \in N$, что любой подунар унара $\langle D, f \rangle$ содержит C, а значит, снова имеем $C \subseteq B \subseteq \overline{B}$. По условию леммы, $n > 1$, то есть C неодноэлементен. Кроме того, операция f на C инъективна.

Далее, с помощью рассуждений, аналогичных проведенным в доказательстве леммы 4, в обоих случаях получаем противоречие. □

Теорема 1. *Алгебра $\langle A, p, f \rangle$ с оператором f, где p — операция, определенная по правилу (2), является гамильтоново простой тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*
(1) $\langle A, f \rangle$ — связный унар без кручения;
(2) $\langle A, f \rangle$ изоморфен C_1^0;
(3) $\langle A, f \rangle$ — связный унар, содержащий подунар, изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$;
(4) $\langle A, f \rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$;
(5) $\langle A, f \rangle$ — несвязный унар, не имеющий неодноэлементных компонент связности, содержащих неподвижный элемент.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\langle A, f \rangle$ — связный унар, не удовлетворяющий условиям (1)–(4) теоремы. Тогда $\langle A, f \rangle$ периодичен, неодноэлементен, содержит подунар, изоморфный C_1^0, и такой элемент $b \in A$, что $t(b) > 1$. Последнее означает, что $t(A) > 1$. По следствию 1 из предложения 1, алгебра $\langle A, p, f \rangle$ не является гамильтоново простой.

Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ несвязен и содержит неодноэлементную компоненту связности, имеющую неподвижный элемент. Из определения (2) следует, что операция p идемпотентна. Тогда алгебра $\langle A, p, f\rangle$ удовлетворяет условиям следствия 2 из предложения 2 и, следовательно, снова не является гамильтоново простой.

Достаточность. Пусть унар $\langle A, f\rangle$ — связный. Если $\langle A, f\rangle \cong C_1^0$, то алгебра $\langle A, p, f\rangle$ одноэлементна, и утверждение теоремы очевидно.

Если $\langle A, f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$, то по теореме 2 [21], алгебра $\langle A, p, f\rangle$ является простой, а, следовательно, и гамильтоново простой.

В случаях, когда $\langle A, f\rangle$ либо является унаром без кручения, либо содержит подунар, изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$, алгебра $\langle A, p, f\rangle$ удовлетворяет условиям леммы 4. Действительно, если $\langle A, f\rangle$ — унар без кручения, то любой его подунар содержит подунар, изоморфный F_1, то есть, неодноэлементный подунар с инъективной операцией. Если же $\langle A, f\rangle$ имеет подунар, изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$, то этот подунар также неодноэлементен, операция f на нем инъективна, и он содержится в любом подунаре унара $\langle A, f\rangle$. По лемме 4, алгебра $\langle A, p, f\rangle$ гамильтоново проста.

Если унар $\langle A, f\rangle$ несвязен, то утверждение теоремы следует из леммы 5. □

Лемма 6. *Пусть унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ не содержит одноэлементных подунаров. Тогда решетка $Sub_H A$ является двухэлементной цепью $\{\emptyset, A\}$.*

Доказательство. Если унар $\langle A, f\rangle$ связен, то, учитывая условия леммы, он либо является унаром без кручения, либо содержит подунар C_n^0 для некоторого $n > 1$. По лемме 4, в этих случаях гамильтоново замыкание любой непустой подалгебры алгебры $\langle A, p, f\rangle$ совпадает с A. Отсюда, поскольку пустая подалгебра гамильтоново замкнута, то $Sub_H A$ — двухэлементная цепь.

Если унар $\langle A, f\rangle$ несвязен, то, с учетом отсутствия в $\langle A, f\rangle$ одноэлементных подунаров, утверждение следует из леммы 5. □

Лемма 7. *Пусть унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ является связным унаром с одноэлементным подунаром. Нетривиальными гамильтоново замкнутыми подалгебрами в $\langle A, p, f\rangle$ являются подалгебры вида D_m, где $0 \leqslant m < t(A)$, и только они.*

Доказательство. Пусть B — произвольная непустая подалгебра алгебры $\langle A, p, f\rangle$. Тогда $\langle B, f\rangle$ — подунар унара $\langle A, f\rangle$.

В случае, когда $t(A) = 0$, утверждение леммы очевидно. Рассмотрим случай, когда $t(A)$ конечна и не равна нулю. В силу конечности $t(A)$, множество глубин элементов в любой системе порождающих подунара $\langle B, f\rangle$ ограничено сверху, а значит, имеет наибольший элемент. Докажем, что наибольшая глубина элементов во всех системах порождающих $\langle B, f\rangle$ одинакова.

Пусть S_1, S_2 — системы порождающих $\langle B, f\rangle$. Обозначим через n и m наибольшие из глубин элементов, входящих в S_1 и S_2 соответственно. Предположим, что $n \neq m$, и без ограничения общности положим $m > n$. Пусть $b \in S_2$ — элемент глубины m. Так как S_1 — система порождающих, то $b = f^d(c)$ для некоторых $c \in S_1$ и $d \geqslant 0$. Отсюда, поскольку $t(c) \leqslant n$, то и $t(b) \leqslant n$, что противоречит условию $m > n$.

Таким образом, во всех системах порождающих подунара $\langle B, f\rangle$ наибольшая глубина элементов совпадает. Обозначим ее через m и докажем, что гамильтоново замыкание подалгебры B алгебры $\langle A, p, f\rangle$ совпадает с D_m. При $m = 0$ это очевидно, поэтому далее считаем, что $m > 0$.

По предложению 1, если $m < t(A)$, то D_m — подалгебра алгебры $\langle A, p, f\rangle$, являющаяся классом некоторой ее конгруэнции. Это же утверждение верно и при $m = t(A)$, так как тогда $D_m = A$. Кроме того, из определения D_m следует, что $B \subseteq D_m$. По определению гамильтонова замыкания, $\overline{B} \subseteq D_m$.

Пусть $x \in D_m$, то есть, $t(x) \leqslant m$. По условию, найдется элемент $b \in B$, для которого $t(b) = m$. Из определения гамильтонова замыкания следует, что $b \in \overline{B}$, $f(b) \in \overline{B}$ и $b\theta f(b)$ для некоторой $\theta \in Con\langle A, p, f\rangle$. Поскольку $m > 0$, то $b \neq f(b)$, откуда $t(f(b)) < t(b)$. По лемме 10 [21], $k(b, f(b)) = t(b) = m$.

Если $t(x) < m = t(b)$, то $k(x, b) = t(b)$. По определению (2), $p(x, b, f(b)) = f(b)$. Если же $t(x) = m = t(b)$, то, по лемме 10 [21], $k(x, b) \leqslant t(b)$. Отсюда, снова имеем $p(x, b, f(b)) = f(b)$. Тогда $f(b) = p(x, b, f(b))\theta p(x, b, b) = x$, а, следовательно, $x\theta b$, откуда $x \in \overline{B}$. Отсюда, $D_m \subseteq \overline{B}$ и, окончательно, $\overline{B} = D_m$.

Пусть теперь $t(A)$ бесконечна. Рассуждая, как в случае ее конечности, получаем, что либо во всех системах порождающих подунара $\langle B, f\rangle$ множество глубин их элементов не ограничено, либо все его системы порождающих имеют одну и ту же наибольшую глубину элементов m. Во втором случае, аналогично доказанному выше, $\overline{B} = D_m$.

Пусть множество глубин элементов в некоторой системе порождающих подунара $\langle B, f\rangle$ не ограничено. Предположим, что $\overline{B} \neq A$. Тогда существуют такой элемент $c \in A$, что $c \notin \overline{B}$, и такая конгруэнция $\theta \in ConA$, что $\theta \neq \bigtriangledown$ и $\overline{B}$ — конгруэнц-класс θ. По условию, найдется также такой элемент $b \in B$, что $t(b) > t(c)$. Из последнего, по лемме 10 [21], получаем $k(c, b) = t(b)$. Кроме того, $f(b) \in B$, так как B — подунар в $\langle A, f\rangle$. Поскольку $t(b) > t(c)$, то $t(b) > 0$, откуда $b \neq f(b)$ и $t(f(b)) < t(b)$. Тогда, снова по лемме 10 [21], $k(b, f(b)) = t(b)$. Отсюда, $p(c, b, f(b)) = f(b)$. Учитывая, что $p(c, b, b) = c$, получаем $f(b)\theta c$, что противоречит условию $c \notin \overline{B}$. Отсюда, $\overline{B} = A$.

Таким образом, с учетом предложения 1, нетривиальными гамильтоново замкнутыми подалгебрами в $\langle A, p, f\rangle$ являются подалгебры вида D_m, где $0 \leqslant m < t(A)$, и только они. $\square$

Следствие 4. *Пусть унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ является связным унаром с одноэлементным подунаром. Если $t(A)$ конечна, то решетка $Sub_H A$ является цепью длины $t(A) + 1$. Если же $t(A)$ бесконечна, то ре-*

шетка $Sub_H A$ изоморфна частично упорядоченному множеству $\langle N \cup \{0\}, \leqslant\rangle$ с присоединенной внешней единицей.

Лемма 8. *Пусть унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ несвязен и содержит хотя бы один одноэлементный подунар. Тогда решетка $Sub_H A$ изоморфна кардинальной сумме цепей, пополненной внешними нулем и единицей, где слагаемым суммы взаимно однозначно соответствуют компоненты связности унара $\langle A, f\rangle$, содержащие одноэлементный подунар. Для каждой компоненты связности B с одноэлементным подунаром, соответствующее ей слагаемое кардинальной суммы либо является цепью длины $t(B)$ (в случае, если $t(B)$ конечна), либо изоморфно цепи $\langle N \cup \{0\}, \leqslant\rangle$ с присоединенной внешней единицей (если $t(B)$ бесконечна).*

Доказательство. По следствию 3 из леммы 3, гамильтоновы замыкания всех подалгебр алгебры $\langle A, p, f\rangle$, имеющих несвязный унарный редукт, совпадают с A. Таким образом, далее достаточно рассмотреть подалгебры, унарные редукты которых содержатся в компонентах связности унара $\langle A, f\rangle$.

Пусть B — подалгебра алгебры $\langle A, p, f\rangle$, унарный редукт $\langle B, f\rangle$ которой лежит в некоторой компоненте связности E унара $\langle A, f\rangle$.

В случае, если E не содержит одноэлементный подунар, она имеет подунар C, изоморфный либо F_1, либо C_n^0 для некоторого $n > 1$, то есть, неодноэлементный подунар с инъективной операцией. При этом, $C \subseteq B$. Рассуждая по аналогии с доказательством леммы 4, получаем, что $\overline{B} = A$.

Пусть теперь E имеет одноэлементный подунар. Если $t(E) = n < \infty$, то, как и в лемме 7, получаем, что $\overline{B} = D_i$ для некоторого $0 \leqslant i \leqslant n$. Отсюда, гамильтоновы замыкания всех непустых подалгебр, содержащихся в E, образуют в решетке $Sub_H A$ цепь длины n.

Если же $t(E) = \infty$, то также по аналогии с леммой 7, получаем, что гамильтоновы замыкания всех непустых подалгебр, содержащихся в E, образуют в решетке $Sub_H A$ цепь, изоморфную $\langle N \cup \{0\}, \leqslant\rangle$, пополненную наибольшим элементом E (так как, по предложению 2, E является гамильтоново замкнутой подалгеброй в $\langle A, p, f\rangle$).

Поскольку компоненты связности унара не пересекаются, то совокупность всех нетривиальных гамильтоново замкнутых подалгебр алгебры $\langle A, p, f\rangle$ изоморфна кардинальной сумме цепей, откуда следует утверждение леммы. □

Из лемм 6, 8 и следствия 4 вытекает

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*
(1) Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ не содержит одноэлементных подунаров, то решетка $Sub_H A$ является двухэлементной цепью $\{\emptyset, A\}$.
(2) Пусть унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ является связным унаром с одноэлементным подунаром. Если $t(A)$ конечна, то решетка $Sub_H A$ является цепью длины $t(A)+1$. Если же $t(A)$ бесконечна, то решетка $Sub_H A$ изоморфна частично упорядоченному множеству $\langle N \cup \{0\}, \leqslant\rangle$ с присоединенной внешней единицей.

(3) Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ несвязен и содержит хотя бы один одноэлементный подунар, то решетка $Sub_H A$ изоморфна кардинальной сумме цепей, пополненной внешними нулем и единицей, где слагаемым суммы взаимно однозначно соответствуют компоненты связности унара $\langle A, f\rangle$, содержащие одноэлементный подунар. Для каждой компоненты связности B с одноэлементным подунаром, соответствующее ей слагаемое кардинальной суммы либо является цепью длины $t(B)$ (в случае, если $t(B)$ конечна), либо изоморфно цепи $\langle N \cup \{0\}, \leqslant\rangle$ с присоединенной внешней единицей (если $t(B)$ бесконечна).

Следствие 5. *Атомами решетки $Sub_H A$ являются либо одноэлементные подалгебры алгебры $\langle A, p, f\rangle$, либо, в случае их отсутствия, сама алгебра A. Других атомов в $Sub_H A$ нет.*

Следствие 6. *Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ не содержит одноэлементных подунаров, то единственным коатомом решетки $Sub_H A$ является пустая подалгебра. В противном случае, если $\langle A, f\rangle$ связный, то решетка $Sub_H A$ имеет единственный коатом $D_{t(A)-1}$ только при условии $t(A) < \infty$; при $t(A) = \infty$ коатомов в $Sub_H A$ нет. Если же $\langle A, f\rangle$ несвязен, то коатомами $Sub_H A$ являются его компоненты связности, содержащие одноэлементные подунары, и только они.*

Следствия 5 и 6 вытекают непосредственно из теоремы 2.

Следствие 7. *Решетка $Sub_H A$ является цепью тогда и только тогда, когда унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ содержит не более одного одноэлементного подунара.*

Доказательство. Необходимость утверждения вытекает из Предложения 3. Докажем его достаточность.

Если $\langle A, f\rangle$ содержит не более одного одноэлементного подунара, то он либо не имеет одноэлементных подунаров, либо является корнем, либо изоморфен сумме корня и подунара, не содержащего неподвижных элементов. Во всех этих случаях, по теореме 2, $Sub_H A$ является цепью. □

Лемма 9. *Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ имеет подунар, изоморфный $C_1^1 + C_1^0$, то решетка $Sub_H A$ содержит подрешетку N_5.*

Доказательство. Пусть B — подунар унара $\langle A, f\rangle$, изоморфный $C_1^1 + C_1^0$. Положим $B = \{a, b, c\}$ и $f(a) = a$, $f(b) = a$, $f(c) = c$. Так как множество $\{a, b\}$ — подунар в $\langle A, f\rangle$, то оно будет и подалгеброй в $\langle A, p, f\rangle$. Очевидно, $\overline{\{c\}} = \{c\}$ и $\overline{\{a\}} = \{a\} \subset \overline{\{a, b\}}$. Кроме того, $\{c\} \not\subseteq \overline{\{a, b\}}$, так как c и $\overline{\{a, b\}}$ лежат в разных компонентах связности. Таким образом, все элементы множества $S = \{\emptyset, \overline{\{a\}}, \overline{\{a, b\}}, \overline{\{c\}}, A\}$ различны.

Докажем, что S образует подрешетку вида N_5 в $Sub_H A$. Поскольку $\{a, c\}$ — подунар в $\langle A, f\rangle$, то $\{a\} \vee \{c\} = \{a, c\}$ в $SubA$. По следствию 3 из леммы 3, получаем $\overline{\{a\}} \vee \overline{\{c\}} = A$. Аналогично, $\overline{\{a,b\}} \vee \overline{\{c\}} = A$. Остальные соотношения, показывающие, что S замкнуто относительно $\vee$ и $\wedge$, очевидны. $\square$

Лемма 10. *Если унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ имеет подунар, изоморфный $C_1^0 + C_1^0 + C_1^0$, то решетка $Sub_H A$ содержит подрешетку M_3.*

Доказательство. Пусть B — подунар унара $\langle A, f\rangle$, изоморфный $C_1^0 + C_1^0 + C_1^0$. Положим $B = \{a, b, c\}$ и $f(a) = a$, $f(b) = b$, $f(c) = c$.

Как и выше, одноэлементные подунары $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ в B являются гамильтоново замкнутыми подалгебрами алгебры $\langle A, p, f\rangle$, причем, они не сравнимы между собой по включению. Их попарные пересечения пусты, а решеточные суммы, по следствию 3 из леммы 3, совпадают с A. Отсюда, множество $M = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, A\}$ образует подрешетку вида M_3 в $Sub_H A$. $\square$

Теорема 3. *Решетка $Sub_H A$ является дистрибутивной тогда и только тогда, когда унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ либо содержит не более одного одноэлементного подунара, либо изоморфен $C_1^0 + C_1^0$, либо изоморфен $C_1^0 + C_1^0 + B$, где B — произвольный подунар, не имеющий неподвижных элементов.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть унар $\langle A, f\rangle$ содержит более одного одноэлементного подунара, и не изоморфен ни $C_1^0 + C_1^0$, ни $C_1^0 + C_1^0 + B$. Если число одноэлементных подунаров в $\langle A, f\rangle$ составляет 3 и более, то, по лемме 10 и теореме 1 [20, с. 87], $Sub_H A$ не дистрибутивна.

Пусть теперь $\langle A, f\rangle$ содержит в точности два одноэлементных подунара. Так как он не изоморфен ни $C_1^0 + C_1^0$, ни $C_1^0 + C_1^0 + B$, то хотя бы одна из его компонент связности E, содержащая C_1^0, неодноэлементна. Тогда E имеет подунар вида C_1^1, а это означает, что в $\langle A, f\rangle$ содержится подунар, изоморфный $C_1^1 + C_1^0$. По лемме 9 и теореме 1 [20, с. 87], $Sub_H A$ не дистрибутивна.

Достаточность. Следует из теоремы 2 и теоремы 1 [20, с. 87]. $\square$

Теорема 4. *Решетка $Sub_H A$ является модулярной тогда и только тогда, когда унарный редукт $\langle A, f\rangle$ алгебры $\langle A, p, f\rangle$ либо содержит не более одного одноэлементного подунара, либо все его одноэлементные подунары являются компонентами связности.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть унар $\langle A, f\rangle$ содержит более одного одноэлементного подунара и найдется его одноэлементный подунар, не совпадающий с содержащей его компонентой связности. Последнее означает, что для некоторой компоненты связности B унара $\langle A, f\rangle$ существуют такие ее элементы a, b, что $f(a) = a$, $f(b) = a$, то есть, B содержит подунар, изоморфный C_1^1. Поскольку в $\langle A, f\rangle$ содержится более одного одноэлементного подунара, то алгебра $\langle A, p, f\rangle$ удовлетворяет условиям леммы 9, откуда, с учетом теоремы 2 [20, с. 87], $Sub_H A$ не модулярна.

Достаточность. Следует из теоремы 2 и теоремы 2 [20, с. 87]. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пинус А. Г. Гамильтоново замыкание на универсальных алгебрах // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, N. 3 (325). С. 610–616.
2. Csákány B. Abelian properties of primitive classes of universal algebras // Acta. Sci. Math. 1964. V. 25. P. 202–208.
3. Shoda K. Zur theorie der algebraischen erweiterungen // Osaka Math. Journal. 1952. V. 4. P. 133–143.
4. Kiss E. W., Valeriot M. Abelian algebras and the Hamiltonian property // J. Pure Appl. Algebra. 1993. V. 87. N 1. P. 37–49.
5. Klukovits L. Hamiltonian varieties of universal algebras // Acta. Sci. Math. 1975. V. 37. P. 11–15.
6. Kiss E. W. Each Hamiltonian variety has the congruence extension property // Algebra Universalis. 1981. V. 12. N 2. P. 395–398.
7. Степанова А. А., Трикашная Н. В. Абелевы и гамильтоновы группоиды // Фундам. и приклад. математика. 2009. Т. 15, вып. 7. С. 165–177.
8. Chajda I., Eigenthaler G., Langer H. Congruence classes in universal algebra. Vienna: Heldermann-Verl., 2003. 192 p.
9. Łoś J. Normal subalgebras in universal algebras // Colloquium Mathematicum. 1964. V. 12. Iss. 2. P. 151–153.
10. Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 учебного года. М.: Наука, 1974. 160 с.
11. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories with Applications to Wreath Products and Graphs. Berlin: Walter de Gruyter, 2000. 529 p.
12. Skornyakov L. A. Unars // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1982. V.29. Universal Algebra (Esztergom 1977). P. 735–743.
13. Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$ // Arch. Math. (Basel) 21. 1970. P. 256–264.
14. Усольцев В. Л. О строго простых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, вып. 4(48). С. 196–204.
15. Mudrinski N. Uniform Mal'cev algebras with small congruence lattices // Algebra Universalis. 2014. V. 72. P. 57–69.

16. Булатов А. А. Полиномиальность мальцевских задач CSP // Алгебра и логика. 2006. Т.45, № 6. С. 655-686.

17. Pixley A. F. Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. V.14. N 1. P.105–109.

18. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Универсальная алгебра и ее приложения: тез. докл. межд. семинара, посв. памяти проф. Л. А. Скорнякова. Волгоград, 1999. С. 31–32.

19. Усольцев В. Л. О гамильтоновых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2014. Т. 15, вып. 3(51). С. 100–113.

20. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

21. Усольцев В. Л. Простые и псевдопростые алгебры с операторами // Фундам. и приклад. математика. 2008. Т. 14, вып. 7. С. 189–207.

22. Усольцев В. Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // Уч. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Т. 6(50), ч. 2. С. 229–236.

REFERENCES

1. Pinus, A. G. 2014, "Hamiltonian closure on universal algebras", *Sibirskiy Matematicheskiy Zhurnal*, vol. 55, no. 3(325), pp. 610–616 (Russian); translated in *Siberian Mathematical Journal*, vol. 55, no. 3(325), pp. 498–502. DOI: 10.1134/S0037446614030112

2. Csákány, B. 1964, "Abelian properties of primitive classes of universal algebras", *Acta Scientiarum Mathematicarum*, vol. 25, pp. 202–208 (Russian).

3. Shoda, K. 1952, "Zur theorie der algebraischen erweiterungen", *Osaka Mathematical Journal*, vol. 4, pp. 133–143.

4. Kiss, E. W. & Valeriot, M. 1993, "Abelian algebras and the Hamiltonian property", *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 87, no. 1, pp. 37–49. DOI: 10.1016/0022-4049(93)90067-4

5. Klukovits, L. 1975, "Hamiltonian varieties of universal algebras", *Acta Scientiarum Mathematicarum*, vol. 37, pp. 11–15.

6. Kiss, E. W. 1981, "Each Hamiltonian variety has the congruence extension property", *Algebra Universalis*, vol. 12, no. 2, pp. 395–398. DOI: 10.1007/BF02483899

7. Stepanova, A. A. & Trikashnaya, N. V. 2009, "Abelian and Hamiltonian groupoids", *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, vol. 15, no. 7, pp. 165–177 (Russian); translated in *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 169, issue 5, pp. 671–679. DOI: 10.1007/s10958-010-0068-x

8. Chajda, I., Eigenthaler, G. & Langer, H. 2003, "Congruence classes in universal algebra", *Heldermann Verlag*, Vienna, 192 pp.

9. Łoś, J. 1964, "Normal subalgebras in universal algebras", *Colloquium Mathematicum*, vol. 12, issue 2, pp. 151–153.

10. Kurosh, A. G. 1974, "Obshchaya algebra. Lekcii 1969-1970 uchebnogo goda" [General Algebra. Lectures 1969-1970 Academic Year], *Nauka*, Moscow, 160 pp. (Russian)

11. Kilp, M., Knauer, U. & Mikhalev, A. V. 2000, "Monoids, Acts and Categories with Applications to Wreath Products and Graphs", *Walter de Gruyter*, Berlin, 529 pp.

12. Skornyakov, L. A. 1982, "Unars", *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai*, *Universal Algebra (Esztergom 1977)*, vol. 29, pp. 735–743.

13. Wenzel, G. H. 1970, "Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$", *Archiv der Mathematik*, Basel, vol. 21, pp. 256–264. DOI: 10.1007/BF01220912

14. Usol'tsev, V. L. 2013, "On strictly simple ternary algebras with operators", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 14, issue 4(48), pp. 196–204 (Russian).

15. Mudrinski, N. 2014, "Uniform Mal'cev algebras with small congruence lattices", *Algebra Universalis*, vol. 72, pp. 57–69. DOI: 10.1007/s00012-014-0288-x

16. Bulatov, A. A. 2006, "The property of being polynomial for Mal'tsev constraint satisfaction problems", *Algebra i Logika*, vol. 45, no. 6, pp. 655-686 (Russian); translated in *Algebra and Logic*, vol. 45, no. 6, pp. 371-388. DOI: 10.1007/s10469-006-0035-2

17. Pixley, A. F. 1963, "Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 14, no. 1, pp. 105–109. DOI: 10.1090/S0002-9939-1963-0146104-X

18. Kartashov, V. K. 1999, "On unars with Mal'tsev operation", *Universal'naya algebra i ee prilozheniya: Tezisy soobshcheniy uchastnikov mezhdunarodnogo seminara, posvyashchennogo pamyati prof. Mosk. gos. un-ta L.A. Skornyakova (Universal algebra and application: theses of International workshop dedicated memory of prof. L. A. Skornyakov)*, Volgograd, pp. 31–32. (Russian)

19. Usol'tsev, V. L. 2014, "On Hamiltonian ternary algebras with operators", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 15, issue 3(51), pp. 100–113. (Russian)

20. Grätzer, G. 1978, "General Lattice Theory", *Akademie-Verlag*, Berlin.

21. Usol'tsev, V. L. 2008, "Simple and pseudosimple algebras with operators", *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, vol. 14, no. 7, pp. 189–207 (Russian); translated in *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 164, no. 2, pp. 281-293. DOI: 10.1007/S1095800997306

22. Usol'tsev, V. L. 2012, "On polynomially complete and Abelian unars with Mal'tsev operation *Uchenye Zapiski Orlovskogo Gos. Univ.*, vol. 6(50), part 2, pp. 229–236. (Russian)

Волгоградский государственный социально-педагогический университет.
Получено 12.10.2015.