ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 2.

УДК 514 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-232-253

Тензор инерции твердого тела на плоскости Лобачевского и в псевдо-евклидовом пространстве

А. Ю. Шуберт

Шуберт Анастасия Юрьевна — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: anastasiia.shubert@math.msu.ru

Аннотация

В работе исследуется тензор инерции твердого тела в трехмерном (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g). Конфигурационное многообразие Q системы — шестимерная группа Ли $\mathrm{E}(V, g) \cong V \rtimes \mathrm{Aut}(V, g)$ движений этого пространства, а кинетическая энергия является квадратичной формой $T(\boldsymbol{w}, a)$ на алгебре Ли $\mathfrak{e}(V, g) \cong V + \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, g)$. Это позволяет определить симметрический оператор $J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ со свойством $T(0, a) = \frac{1}{2}(Ja, a)$, называемый (ковариантным) тензором инерции твердого тела. Для его вычисления введено «псевдо-евклидово векторное произведение» $[,]_g$ в (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g) и с помощью этой операции построен изоморфизм $\mu : V \to \mathfrak{g}$. Доказано, что при этом изоморфизме построенная операция $[,]_g$ преобразуется в скобку Ли на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а скалярное произведение — в форму Киллинга–Картана с точностью до скалярного множителя. Получены явные формулы для операции $[,]_g$.

С помощью построенной операции $[,]_g$ определен оператор $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \mu\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{g}$ мгновенного вращения с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} \in V$, и для любой точки $\boldsymbol{q} \in V$ определены ее вектор мгновенной скорости $\boldsymbol{v} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g \in V$, вектор кинетического момента $\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})} = [\boldsymbol{q}, m\boldsymbol{v}]_g \in V$ и оператор инерции $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V$, $\boldsymbol{\omega} \mapsto \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})}$. Доказаны симметричность оператора инерции $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ и формула $T^{(\boldsymbol{q})} = \frac{1}{2}g(\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$ для кинетической энергии точки.

Изучены геометрические свойства оператора инерции $\widehat{J}$ для одноточечных и многоточечных тел. В частности, в псевдо-евклидовом случае ограничение соответствующей квадратичной формы на внутренность светового конуса неотрицательно. Построены примеры 2- и 3-точечных тел, показывающие, что других ограничений на сигнатуру оператора инерции нет. Найдены все возможные сигнатуры для оператора инерции $\widehat{J}$ твердого тела в трехмерном псевдо-евклидовом пространстве. Доказано, что для тел, расположенных внутри светового конуса (например, для «тарелок» на плоскости Лобачевского), оператор инерции имеет сигнатуру $(-, +, +)$ или $(0, +, +)$. Для тел, расположенных снаружи светового конуса, возможны сигнатуры $(-, s, -)$ для всех $s \in \{0, +, -\}$. Остальные сигнатуры $(-, +, 0)$ и $(-, 0, 0)$ также реализуются 2- и 3-точечными телами.

Ключевые слова: тензор инерции, твердое тело, псевдо-евклидово пространство, плоскость Лобачевского, сигнатура, изоморфизм.

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:

Шуберт А. Ю. Тензор инерции твердого тела на плоскости Лобачевского и в псевдоевклидовом пространстве // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 232–253.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 24-71-10100. Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 514 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-232-253

Inertia tensor of a rigid body on the Lobachevsky plane and in pseudo-Euclidean space

A. Yu. Shubert

Shubert Anastasiia Yurievna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: anastasiia.shubert@math.msu.ru

Abstract

The paper studies the inertia tensor of a rigid body in three-dimensional (pseudo-)Euclidean space (V, g). The configuration manifold Q of the system is the six-dimensional Lie group $\mathrm{E}(V, g) \cong V \rtimes \mathrm{Aut}(V, g)$ of isometries of this space, and the kinetic energy is a quadratic form $T(\boldsymbol{w}, a)$ on the Lie algebra $\mathfrak{e}(V, g) \cong V + \mathfrak{g}$ where $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, g)$. This allows one to define a symmetric operator $J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ with the property $T(0, a) = \frac{1}{2}(Ja, a)$, referred to as the (covariant) inertia tensor of the rigid body. To compute this tensor, a "pseudo-Euclidean vector cross product" $[,]_g$ is introduced in the (pseudo-)Euclidean space (V, g), and an isomorphism $\mu : V \to \mathfrak{g}$ is constructed using this operation. It is proved that this isomorphism transforms the operation $[,]_g$ into the Lie bracket on the Lie algebra $\mathfrak{g}$, and the scalar product into the Cartan–Killing form, up to a scalar factor. Explicit formulas for the operation $[,]_g$ are obtained.

Using the operation $[,]_g$, the operator $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \mu\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{g}$ of instantaneous rotation with angular velocity $\boldsymbol{\omega} \in V$ is defined. For any point $\boldsymbol{q} \in V$, the vector $\boldsymbol{v} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g \in V$ of instantaneous velocity, the vector $\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})} = [\boldsymbol{q}, m\boldsymbol{v}]_g \in V$ of angular momentum and the inertia operator $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V$, $\boldsymbol{\omega} \mapsto \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})}$, are defined. The symmetricity of the inertia operator $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ is proved, along with the formula $T^{(\boldsymbol{q})} = \frac{1}{2}g(\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$ for the kinetic energy of the point.

Geometric properties of the inertia operator $\widehat{J}$ are studied for single- and multi-point bodies. In particular, in the pseudo-Euclidean case, the restriction of the corresponding quadratic form to the interior of the light cone is shown to be non-negative. Examples of two- and three-point bodies are constructed showing that there are no additional restrictions on the signature of the inertia operator. All possible signatures of the inertia operator $\widehat{J}$ for a rigid body in three-dimensional pseudo-Euclidean space are found. It is proved that, for bodies located within the light cone (e.g., "plates" in the Lobachevsky plane), the inertia operator has a signature of $(-, +, +)$ or $(0, +, +)$. For bodies located outside the light cone, signatures of $(-, s, -)$ are possible for all $s \in \{0, +, -\}$. The remaining signatures $(-, +, 0)$ and $(-, 0, 0)$ are also realized by two- and three-point bodies.

Keywords: inertia tensor, rigid body, pseudo-Euclidean space, Lobachevsky plane, signature, isomorphism.

Bibliography: 28 titles.

For citation:
Shubert, A. Yu. 2025, "Inertia tensor of a rigid body on the Lobachevsky plane and in pseudo-Euclidean space" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 232–253.

1. Введение

Задача о движении твердого тела в евклидовом пространстве является классической [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Конфигурационным многообразием этой динамической системы является группа движений E(3) трехмерного евклидова пространства, тесно связанная с группой Ли

SO(3). Более общая постановка приводит к задаче о движении твердого тела на различных группах Ли. Свойства групп и алгебр Ли [8], их линейных представлений [9] и характеров представлений [10] полезны для изучения симметрий движений твердого тела [11], а также для изучения изоморфизмов между задачами о движении твердого тела в разных пространствах [12].

Представляет интерес изучение задач механики в неевклидовых пространствах [13, 14, 15, 16, 17] и в пространствах постоянной кривизны [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25].

В работе изучается тензор инерции твердого тела в трехмерном (псевдо-)евклидовом пространстве $(V,g)=(\mathbb{R}^3,g)$. Конфигурационное многообразие Q твердого тела в пространстве (V,g) есть 6-мерная группа Ли $\mathrm{E}(V,g)\cong V\rtimes \mathrm{Aut}(V,g)$ движений пространства (V,g) (лемма 1), аналогично евклидову случаю [4, §28 A]. Кинетическая энергия твердого тела есть левоинвариантная (псевдо-)риманова метрика на этой группе Ли (лемма 2) и, тем самым, однозначно определяется своим значением в единице группы, т.е. является квадратичной формой $T(\boldsymbol{w},a)$ на алгебре Ли $\mathfrak{e}(V,g)\cong V+\mathfrak{aut}(V,g)$ этой группы Ли. Эту квадратичную форму мы выражаем через квадратичную форму $T(a)=T(0,a)$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{aut}(V,g)$ группы Ли $\mathrm{G}=\mathrm{Aut}(V,g)$, т.е. сводим ее вычисление к случаю волчка (лемма 3). Это позволяет определить симметрическую билинейную форму J на $\mathfrak{g}$, отвечающую этой квадратичной форме, называемую (ковариантным) тензором инерции твердого тела (определение 3 и следствие 1).

Для вычисления тензора инерции твердого тела построена кососимметрическая билинейная операция «псевдо-евклидова векторного произведения»

$$[,]_g : V\times V\to V$$

в трехмерном (псевдо-)евклидовом пространстве (V,g) (определение 4), задающая структуру алгебры Ли на пространстве V (теорема 1). С помощью этой операции построен изоморфизм

$$\mu: V\to\mathfrak{g}=\mathfrak{aut}(V,g),\qquad \mu\boldsymbol{\omega}=\widetilde{\boldsymbol{\omega}}:\boldsymbol{a}\mapsto[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{a}]_g,$$

между пространством векторов V и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Доказано, что этот изоморфизм является изоморфизмом алгебр Ли (теорема 1) и является естественным, т.е. эквивариантен по отношению к заменам базиса в пространстве V и индуцированным заменам базиса в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (теорема 3). Показано, что при этом изоморфизме (псевдо-)евклидово скалярное произведение g на V преобразуется в форму Киллинга–Картана на $\mathfrak{g}$, с точностью до скалярного множителя (теорема 3). Получена явная формула для построенного векторного произведения $[,]_g$ и доказаны его свойства (теорема 1).

С помощью построенной операции $[,]_g$ определены угловая скорость $\boldsymbol{\omega}\in V$ относительно тела, оператор $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}:V\to V$ мгновенного вращения относительно тела с данной угловой скоростью, вектор мгновенной скорости $\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q}]_g$ точки $\boldsymbol{q}\in V$ относительно тела, вектор кинетического момента $\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})}=[\boldsymbol{q},m\boldsymbol{v}]_g$ относительно тела для точки $\boldsymbol{q}$. Определен оператор

$$\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}:V\to V,\qquad \boldsymbol{\omega}\mapsto\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})}=[\boldsymbol{q},m\boldsymbol{v}]_g=[\boldsymbol{q},m[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q}]_g]_g,$$

для точки $\boldsymbol{q}\in V$ массы m. Другими словами, $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}=-m(\mu\boldsymbol{q})^2$ (следствие 3). Доказана симметричность этого оператора относительно (псевдо-)евклидова скалярного произведения и получена формула $T^{(\boldsymbol{q})}=\frac{1}{2}(\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_g$ для кинетической энергии точки (следствия 3 и 4). Это позволило определить оператор инерции точки как указанный симметрический оператор $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$. В качестве следствий определен оператор инерции $\widehat{J}:V\to V$ любого твердого тела, получены аналогичная формула для его кинетической энергии (теорема 2) и явные формулы для матрицы оператора инерции $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ точки (следствия 5 и 6 и теорема 4).

В §7 изучается оператор инерции $\widehat{J}$ для одноточечных и многоточечных тел. Так, в теореме 4 установлены геометрические свойства оператора инерции $\widehat{J}^{(\mathbf{q})}$ одноточечного тела: ограничение соответствующей квадратичной формы на прямую $\langle\boldsymbol{q}\rangle$ равно нулю, а ее ограничение на плоскость $\langle \boldsymbol{q}\rangle^\perp$, касательную к сфере в точке $\boldsymbol{q}$, пропорционально ограничению метрики g на эту плоскость с коэффициентом пропорциональности $\eta m r^2$, где m — масса точки, $r^2 = g(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})$. В случае $r^2 \neq 0$ это означает, что оператор инерции $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ пропорционален оператору ортогонального проектирования на плоскость $\langle \boldsymbol{q}\rangle^\perp$ с коэффициентом пропорциональности $\eta m r^2$ (теорема 4). В частности, в псевдо-евклидовом случае ограничение указанной квадратичной формы на внутренность светового конуса неотрицательно (теорема 4).

Последнее свойство обобщено на все твердые тела в псевдо-евклидовом пространстве, а именно: мы показываем, что для почти всех твердых тел главные моменты инерции корректно определены и первый главный момент инерции отрицателен (определение 6, теорема 5 (C)). Доказано, что первый главный момент инерции всегда неположителен, и описаны все твердые тела, у которых он равен нулю или некорректно определен (теорема 5 и предложение 2 (iii)); в случае, когда он равен нулю, два других главных момента инерции совпадают и неотрицательны. Построены примеры двухточечных и трехточечных тел, показывающие, что других ограничений на сигнатуру оператора инерции нет. Так, в предложении 1 рассмотрены тела в псевдо-евклидовом пространстве, все точки которых расположены внутри светового конуса (например, «тарелка» на плоскости Лобачевского). Доказано, что для таких тел ковариантный тензор инерции J неотрицательно определен, а оператор инерции $\widehat{J}$ имеет сигнатуру $(-,+,+)$ или $(0,+,+)$. В предложении 2 приведены примеры двухточечных тел, расположенных снаружи светового конуса, для которых оператор инерции $\widehat{J}$ имеет сигнатуры $(-,s,-)$ для всех $s \in \{0,+,-\}$. Остальные сигнатуры $(-,+,0)$ и $(-,0,0)$ также реализуются 2- и 3-точечными телами.

Автор выражает благодарность Е. А. Кудрявцевой за постановку задачи, полезные обсуждения и постоянное внимание к работе, А. А. Ошемкову за ценные комментарии о симметрических операторах в псевдо-евклидовом случае, а также анонимным рецензентам за полезные замечания, способствовавшие улучшению изложения.

2. Основные определения

Пусть $V = \mathbb{R}^3$ и $g : V \times V \to \mathbb{R}$ — невырожденная симметрическая билинейная форма на V, которая задается матрицей

$$G = \operatorname{diag}(\eta, 1, 1) = \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad \eta = \pm 1,$$

по отношению к стандартному базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ пространства V. Базис пространства V будем называть *ортонормированным*, если по отношению к этому базису форма g задается указанной матрицей. Билинейная форма g порождает линейный оператор

$$\varphi_g : V \to V^*, \tag{1}$$

такой, что $\varphi_g(\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ для всех $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in V$. Допуская некоторую вольность обозначений, будем иногда обозначать оператор φ_g через g (это не приводит к путанице, так как матрицы формы g и оператора φ_g по отношению к любому базису совпадают).

Билинейную форму g будем называть *евклидовым* или *псевдо-евклидовым скалярным произведением* (при $\eta = +1$ и -1 соответственно) и обозначать $g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})_g = (\varphi_g \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in V$. Здесь через $(\,,) : V^* \times V \to \mathbb{R}$ обозначено спаривание ковекторов и векторов, т.е. $(\varphi_g \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ есть значение ковектора $\varphi_g \boldsymbol{a} \in V^*$ на векторе $\boldsymbol{b} \in V$. Пусть $|\boldsymbol{q}|_g = \sqrt{(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})_g}$ — длина вектора $\boldsymbol{q} \in V$ в смысле (псевдо-)евклидова скалярного произведения.

Грубо говоря, твердое тело — это система материальных точек $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n \in V$, связанных соотношениями вида $|\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j|_g = r_{ij} = \mathrm{const}$. Пусть m_i — масса i-й точки тела.

Определение 1 (Твердое тело). Твердое тело *в (псевдо-)евклидовом пространстве* (V, g) *задается набором масс* $m_1, \dots, m_n$ *своих материальных точек и набором попарных расстояний между ними. Сам набор точек* $(\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n) = (\boldsymbol{q}_i)_{i=1}^n \in V^n$, *удовлетворяющий такой системе соотношений, называется* конфигурацией, *которая характеризует положение твердого тела в объемлющем пространстве. Конфигурационное многообразие данного тела — это множество* Q *всех его конфигураций.* Волчком *называется твердое тело, одна из точек которого, скажем* $\boldsymbol{q}_1$, *фиксирована.*

Рассмотрим группу Ли $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(V, g) = \{A \in \mathrm{GL}(V) \mid A^*\varphi_g A = \varphi_g\}$, где $A^* : V^* \to V^*$ — оператор, сопряженный оператору $A : V \to V$. Сопоставляя линейным операторам их матрицы по отношению к стандартному базису, получаем изоморфизм

$$\mathrm{G} \cong \{A \in \mathrm{GL}(3) \mid A^T G A = G\}$$

между группами Ли G и $\mathrm{O}(3)$ или $\mathrm{O}(2,1)$ (при $\eta = +1$ и -1).

Пусть $\mathrm{E}(V, g)$ — группа движений (псевдо-)евклидова пространства (V, g). Эту группу можно описать следующим образом. Определим полупрямое произведение $V \leftthreetimes \mathrm{G}$ групп Ли $(V, +)$ и G как группу Ли, являющуюся многообразием $V \times \mathrm{G}$ с операцией $(\boldsymbol{u}, A)\cdot(\boldsymbol{w}, B) = (\boldsymbol{u}+A\boldsymbol{w}, AB)$, где $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in V$, $A, B \in \mathrm{G}$. Сопоставляя элементу $(\boldsymbol{u}, A) \in V \leftthreetimes \mathrm{G}$ блочную 4×4-матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{u} & A \end{pmatrix}$, получаем мономорфизм группы $V \leftthreetimes \mathrm{G}$ в группу $\mathrm{GL}(4)$:

$$V \leftthreetimes \mathrm{G} \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{u} & A \end{pmatrix} \,\middle|\, \boldsymbol{u} \in V,\ A \in \mathrm{G} \right\}, \tag{2}$$

при этом указанная операция в группе $V \leftthreetimes \mathrm{G}$ переходит в умножение блочных матриц в группе $\mathrm{GL}(4)$. Определим действия группы $V \leftthreetimes \mathrm{G}$ на пространстве V и на конфигурационном многообразии Q правилом

$$(\boldsymbol{u}, A)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{q} \in V, \qquad (\boldsymbol{u}, A)(\boldsymbol{q}_i)_{i=1}^n = ((\boldsymbol{u}, A)\boldsymbol{q}_i)_{i=1}^n. \tag{3}$$

Тогда для любых $(\boldsymbol{u}, A)$, $(\boldsymbol{w}, B) \in V \leftthreetimes \mathrm{G}$ и любой точки $\boldsymbol{q} \in V$ имеем

$$(\boldsymbol{u}, A)(\boldsymbol{w}, B)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u} + A(\boldsymbol{w} + B\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{w} + AB\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{w}, AB)\boldsymbol{q},$$

тем самым, введенные действия группы $V \leftthreetimes \mathrm{G}$ на пространствах V и Q являются левыми. При изоморфизме (2) и сопоставлении любой точке $\boldsymbol{q} \in V$ столбца $\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{q} \end{pmatrix}$ действие (3) группы $V \leftthreetimes \mathrm{G}$ на пространстве V преобразуется в умножение матрицы на столбец. Получаем изоморфизм

$$\mathrm{E}(V, g) \cong V \leftthreetimes \mathrm{G}.$$

Определение 2. *Пусть в пространстве* V *задана система координат, жестко связанная с телом (т.е. заданы точка* $O \in V$ *— начало координат — и «ортогональный» репер в этой точке). Пусть* $\boldsymbol{q}_i^\circ \in V$ *—* i*-я точка тела в этой системе координат,* $(\boldsymbol{q}_i^\circ)_{i=1}^n$ *— конфигурация (определение 1) в этой системе координат. При движении описать изменение координат точек тела* $\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{q}_i(t)$ *относительно неподвижной системы координат можно формулой* $\boldsymbol{q}_i = (\boldsymbol{u}, A)\boldsymbol{q}_i^\circ = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{q}_i^\circ$, $i = 1, \dots, n$, *где* $(\boldsymbol{u}, A) = (\boldsymbol{u}(t), A(t)) \in V \leftthreetimes \mathrm{G}$ *— оператор перехода между подвижной (т.е. жестко связанной с телом) и неподвижной системами координат в момент времени* t. *Любой вектор* $\boldsymbol{a} \in V$ *будем обозначать через* $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)^T$. *В частности, радиус-вектор точки* $\boldsymbol{q} \in V$ *в теле имеет вид* $\boldsymbol{q} = (q^1, q^2, q^3)^T \in V$.

Лемма 1 (см. [4, §28 A] в случае евклидова пространства). Конфигурационное многообразие Q твердого тела *в трехмерном (псевдо-)евклидовом векторном пространстве* (V,g) *является 6-мерным многообразием, гомеоморфным группе Ли* $V \rightthreetimes \mathrm{G} \cong \mathrm{E}(V,g)$, *а в случае волчка — 3-мерным многообразием, диффеоморфным группе Ли* $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(V,g)$, *если только тело не является плоским, содержит три точки не на одной прямой и ограничение скалярного произведения g на плоскость, проходящую через эти три точки, невырождено.*

Доказательство. Достаточно построить отображение $Q \to V \rightthreetimes \mathrm{G}$, согласованное с построенным левым действием группы $V \rightthreetimes \mathrm{G}$ на Q, т.е. такое, что если $\boldsymbol{q} \mapsto (\boldsymbol{u}, A)$, то $(\boldsymbol{w}, B)\boldsymbol{q} \mapsto (\boldsymbol{w}, B) \cdot (\boldsymbol{u}, A)$. В случае евклидовой метрики $G = \mathrm{diag}(1,1,1)$ это сделано в [4, §28 A]. В псевдо-евклидовом случае в качестве правого ортонормированного репера, связанного с телом, берется ортонормированный репер $\boldsymbol{e}_1 \uparrow\uparrow \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_3$, $\boldsymbol{e}_2 \uparrow\uparrow \boldsymbol{u}_2 - \frac{g(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)}{g(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_1)}\boldsymbol{u}_1$ плоскости, содержащей данные три точки $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ (здесь $|\boldsymbol{u}_1|_g \neq 0$ для подходящей нумерации точек, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3$), и дополняется вектором $\boldsymbol{e}_3$ длины 1 или i, ортогональным этой плоскости. При этом третий вектор линейно независим с первыми двумя в силу невырожденности ограничения метрики на эту плоскость. $\square$

3. Движение в подвижной системе координат. Тензор инерции

В случае волчка конфигурационное многообразие Q в силу леммы 1 есть 3-мерная группа Ли $Q = \mathrm{G} = \mathrm{Aut}(V,g)$, и соответствующая алгебра Ли

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V,g) = \{a \in \mathfrak{gl}(V) \mid a^*\varphi_g^* + \varphi_g a = 0\} = \{\varphi_g^{-1} a_{\mathrm{eucl}} \mid a_{\mathrm{eucl}}^* + a_{\mathrm{eucl}} = 0\} \tag{4}$$

изоморфна алгебре Ли $\{a \in \mathrm{Mat}(3\times 3) \mid a^T G + Ga = 0\}$, т.е. либо алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$ кососимметрических матриц, либо $\mathfrak{so}(2,1)$. Последнее равенство в (4) следует из того, что операторы $a : V \to V$ и $\varphi_g a = a_{\mathrm{eucl}} : V \to V^*$ удовлетворяют соотношению $a^*\varphi_g^* + \varphi_g a = a_{\mathrm{eucl}}^* + a_{\mathrm{eucl}}$.

В случае произвольного твердого тела (необязательно волчка) конфигурационное многообразие Q в силу леммы 1 есть 6-мерная группа Ли $V \rightthreetimes \mathrm{G} \cong \mathrm{E}(V,g)$. Алгебра Ли этой группы Ли есть полупрямая сумма $V + \mathfrak{g}$ со скобкой Ли $[(\boldsymbol{u}, a), (\boldsymbol{w}, b)] = (a\boldsymbol{w} - b\boldsymbol{u}, [a,b])$. Эта алгебра Ли изоморфна подалгебре $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{u} & a \end{pmatrix} \,\middle|\, \boldsymbol{u} \in V,\ a \in \mathfrak{aut}(V,g) \right\}$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4)$ с операцией коммутатор матриц.

Как описать динамику твердого тела? Как известно, фазовое пространство — это касательное расслоение TQ к конфигурационному многообразию. Пусть $g_{ij}(q)$ — поле квадратичных форм на TQ, которое мы вычислим ниже, обычно являющееся римановой или псевдоримановой метрикой на Q (здесь q^i — локальные координаты на Q, $d = \dim Q \in \{3,6\}$). Рассмотрим натуральную механическую систему на TQ, заданную функцией Лагранжа $L = T - U$, где

$$T = T(q,\dot q) = \sum_{i,j=1}^{d} g_{ij}(q)\dot q^i \dot q^j$$

Иногда (см., например, [4, §28 A]) в качестве конфигурационного многообразия твердого тела рассматривается связная подгруппа группы Ли $V \rightthreetimes \mathrm{Aut}(V,g)$, а именно $V \rightthreetimes \mathrm{Aut}_+(V,g)$, т.е. одна из двух или четырех (в евклидовом и псевдо-евклидовом случаях) связных компонент этого многообразия, соответствующая определенной ориентации тела (а также разбиению светового конуса на две половины $x^1 < 0$ и $x^1 > 0$ в псевдоевклидовом случае). В псевдо-евклидовом случае группа $\mathrm{Aut}_+(V,g)$ состоит из матриц $A \in \mathrm{Aut}(V,g)$, таких, что при представлении их в блочном виде $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$ с диагональными блоками размеров 1×1 и 2×2, соответственно, выполнено $a_1^1 > 0$ и $\det a_2^2 > 0$.

— *кинетическая энергия* тела, $U = U(q)$ — гладкая функция на Q, называемая *потенциалом*, которую мы в данной работе не обсуждаем и для определенности считаем равной нулю, т.е. считаем твердое тело свободным.

Лемма 2 (см. [7, гл. I, теорема 1.5 и §4] в случае волчка в евклидовом пространстве). *Фазовым пространством твердого тела в трехмерном (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g) является касательное расслоение TQ к группе Ли $Q = V \leftthreetimes \mathrm{G}$, а в случае волчка — к группе Ли $Q = \mathrm{G}$. Кинетическая энергия T является левоинвариантной (псевдо-)римановой метрикой (возможно, вырожденной) на этой группе Ли.*

Доказательство. По определению 2 конфигурация твердого тела в момент времени t относительно неподвижной системы координат имеет вид $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t) = (\boldsymbol{u}, A)\boldsymbol{q}^\circ$, где $(\boldsymbol{u}, A) = (\boldsymbol{u}(t), A(t))$ — некоторый путь в группе Ли $V \leftthreetimes \mathrm{G}$, действие элемента группы на конфигурациях определено в (3). Будем записывать элементы $(\boldsymbol{u}, A) \in V \leftthreetimes \mathrm{G}$ в виде блочных матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{u} & A \end{pmatrix}$, тогда для i-й точки имеем $\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{q}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{u} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{q}_i^\circ \end{pmatrix}$. Вектор скорости конфигурации $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_i)_{i=1}^n$ можно представить в виде

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{u} & A \end{pmatrix} \boldsymbol{q}^\circ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\boldsymbol{u}} & \dot{A} \end{pmatrix} \boldsymbol{q}^\circ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{u} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{w} & a \end{pmatrix} \boldsymbol{q}^\circ,$$

при этом, как нетрудно видеть, $(\boldsymbol{w}, a) = (\boldsymbol{w}(t), a(t))$ — элемент алгебры Ли $V + \mathfrak{g}$ вида

$$(\boldsymbol{w}, a) = (A^{-1}\dot{\boldsymbol{u}}, A^{-1}\dot{A}) \in V + \mathfrak{g}, \tag{5}$$

здесь действие элементов алгебры Ли $V + \mathfrak{g}$ на конфигурациях определяется аналогично (3). Так как $(\boldsymbol{u}, A) \in V \leftthreetimes \mathrm{G} = \mathrm{Aut}(V, g)$ — изометрия в смысле псевдометрики, то длина вектора скорости i-й точки равна $|\dot{\boldsymbol{q}}_i|_g = |(\boldsymbol{w}, a)\boldsymbol{q}_i^\circ|_g = |\boldsymbol{w} + a\boldsymbol{q}_i^\circ|_g$, т.е. определяется только элементом (5) алгебры Ли $V + \mathfrak{g}$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда получаем, что кинетическая энергия (i-й точки и всего тела) есть квадратичная форма от вектора (5):

$$T_i = T_i(\boldsymbol{w}, a) = \frac{1}{2} m_i |\boldsymbol{w} + a\boldsymbol{q}_i^\circ|_g^2, \qquad T = T(\boldsymbol{w}, a) = \sum_{i=1}^n T_i(\boldsymbol{w}, a). \tag{6}$$

Осталось заметить, что вектор (5) получается из касательного вектора $(\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{A})$ к группе Ли $V \leftthreetimes \mathrm{G}$ в точке $(\boldsymbol{u}, A) \in V \leftthreetimes \mathrm{G}$ левым сдвигом на элемент группы, обратный элементу $(\boldsymbol{u}, A)$. Это и означает левоинвариантность кинетической энергии T как метрики на группе Ли $V \leftthreetimes \mathrm{G}$. □

Итак, по лемме 2 кинетическая энергия является левоинвариантной метрикой на TQ. Эта левоинвариантная метрика, как правило, невырождена (но необязательно знакоопределена в псевдо-евклидовом случае). Движения по инерции твердого тела являются геодезическими на группе Ли $V \leftthreetimes \mathrm{G}$, снабженной этой левоинвариантной метрикой (это следует из принципа наименьшего действия, если эта метрика положительно определена, а в общем случае геодезические понимаются не как локально кратчайшие кривые, а как геодезические соответствующей аффинной связности Леви-Чивиты).

Возникает задача: изучить зависимость кинетической энергии (6) от элемента (5) алгебры Ли $V + \mathfrak{g}$. Следующая лемма показывает, что случай произвольного твердого тела можно свести к случаю волчка ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} = 0$), т.е. к случаю алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $\boldsymbol{q}_c \in V$ — радиус-вектор центра масс тела, по определению имеющий вид

$$\boldsymbol{q}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{q}_i, \qquad \text{где} \quad m = \sum_{i=1}^n m_i$$

— масса тела. В обозначениях из определения 2 имеем $\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{q}_i^\circ$, поэтому $\boldsymbol{q}_c = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{q}_c^\circ$.

Лемма 3 (см. теорему Гюйгенса-Штейнера [26], [3, (5.18)] в евклидовом случае). *Пусть система координат в V, жестко связанная с телом, имеет начало координат в центре масс $\boldsymbol{q}_c$. Тогда кинетическая энергия* (6) *на алгебре Ли $V + \mathfrak{g}$ в этой системе координат, обозначаемая через $T_c(\boldsymbol{w}, a)$, имеет вид*

$$T_c(\boldsymbol{w}, a) = T_c(0, a) + \frac{1}{2} m |\boldsymbol{w}|_g^2. \tag{7}$$

В произвольной системе координат из определения 2 кинетическая энергия имеет вид

$$T(\boldsymbol{w}, a) = T_c(0, a) + \frac{1}{2} m |\boldsymbol{w} + a\boldsymbol{q}_c^\circ|_g^2. \tag{8}$$

Доказательство. В системе координат, связанной с центром масс тела, имеем

$$T_c(\boldsymbol{w}, a) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\boldsymbol{w} + a\boldsymbol{q}_i^\circ|_g^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{w} + a\boldsymbol{q}_i^\circ, \boldsymbol{w} + a\boldsymbol{q}_i^\circ)_g^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left((\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})_g^2 + (a\boldsymbol{q}_i^\circ, a\boldsymbol{q}_i^\circ)_g^2 + 2(\boldsymbol{w}, a\boldsymbol{q}_i^\circ)_g \right) = \frac{m|\boldsymbol{w}|_g^2}{2} + T_c(0, a) + m(\boldsymbol{w}, a\boldsymbol{q}_c^\circ)_g.$$

Последнее слагаемое в полученном выражении равно нулю, так как в данной системе координат $\boldsymbol{q}_c^\circ = 0$. Соотношение (7) доказано.

В произвольной системе координат имеем $\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{q}_i^\circ = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{q}_c^\circ + A(\boldsymbol{q}_i^\circ - \boldsymbol{q}_c^\circ)$. С другой стороны, для системы координат, начало координат которой помещено в центр масс, аналогичная пара $(\boldsymbol{u}_c, A_c)$ удовлетворяет соотношению $\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{u}_c + A_c(\boldsymbol{q}_i^\circ - \boldsymbol{q}_c^\circ)$, поэтому $(\boldsymbol{u}_c, A_c) = (\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{q}_c^\circ, A)$. С учетом (5) имеем $(\boldsymbol{w}_c, a_c) = (A_c^{-1}\dot{\boldsymbol{u}}_c, A_c^{-1}\dot{A}_c) = (\boldsymbol{w} + a\boldsymbol{q}_c^\circ, a)$. Получаем соотношение между формулами для кинетической энергии по отношению к этим двум системам координат: $T(\boldsymbol{w}, a) = T_c(\boldsymbol{w}_c, a_c) = T_c(\boldsymbol{w} + a\boldsymbol{q}_c^\circ, a)$. Поэтому равенство (7) принимает вид (8). Лемма доказана. □

Согласно лемме 2, кинетическая энергия волчка является квадратичной формой

$$T(a) := T(0, a), \qquad a \in \mathfrak{g}, \tag{9}$$

на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. При этом оператор $a \in \mathfrak{g}$ имеет вид (5) и называется *оператором мгновенного вращения относительно тела* (ср. [7, гл. I, определение 4.3]), в то время как оператор $\dot{A}A^{-1} = Ad_A a \in \mathfrak{g}$ называется *оператором мгновенного вращения в пространстве.* При таком вращении точка $\boldsymbol{q}^\circ \in V$ приобретает *мгновенную скорость относительно тела*

$$\boldsymbol{v} := a\boldsymbol{q}^\circ \in V \tag{10}$$

(равную $A^{-1}\dot{A}\boldsymbol{q}^\circ = A^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}$ в обозначениях доказательства леммы 2).

Определение 3. (Ковариантным) тензором инерции *твердого тела называется симметрический линейный оператор*

$$J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*, \tag{11}$$

связанный с кинетической энергией соотношением $T(a) = \frac{1}{2}(Ja, a)$, $a \in \mathfrak{g}$. Здесь через $(,) : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ обозначено спаривание ковекторов и векторов, т.е. (Ja, a) есть значение ковектора $Ja \in \mathfrak{g}^*$ на векторе $a \in \mathfrak{g}$; симметричность оператора (11) *означает, что $(Ja, b) = (Jb, a)$ для любых $a, b \in \mathfrak{g}$.*

Такое определение тензора инерции дано в книге [7, гл. I, определение 4.1 и пример 4.2] в случае евклидова пространства и алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$, где также отмечено, что соответствующая квадратичная форма выполняет роль кинетической энергии. Соответствующий симметрический оператор $-2\eta\varphi_{g_{\text{ad}}}^{-1} J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ можно было бы назвать *оператором инерции* твердого тела, где $g_{\text{ad}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ — форма Киллинга – Картана на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, т.е. симметрическая билинейная форма вида $g_{\text{ad}}(a, b) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_a \circ \operatorname{ad}_b)$ [8, гл. 4, §1.3]. В случае евклидовой метрики оператором инерции одноточечного тела $\boldsymbol{q}$ массы m чаще называется [4, §28 В] оператор $A : V \to V$, определяемый формулой $A\boldsymbol{\omega} = m\boldsymbol{q} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q})$, где $\times$ — векторное произведение в трехмерном евклидовом пространстве $V = \mathbb{R}^3$. Это определение мы распространим на псевдо-евклидов случай в §4.

Из этого определения и формулы (8) при $\boldsymbol{w}=0$ сразу получаем

Следствие 1. *Тензор инерции J твердого тела относительно точки O (см. определения 2 и 3) равен сумме тензора инерции J_c этого тела относительно его центра масс $\boldsymbol{q}_c$ и тензора инерции $mJ^{(\boldsymbol{q}_c)}$ одноточечного тела, помещенного в центр масс тела $\boldsymbol{q}_c$ и имеющего массу, равную массе m тела:*

$$J = J_c + mJ^{(\boldsymbol{q}_c)}. \tag{12}$$

При этом для одноточечного тела верна формула $(J^{(\boldsymbol{q}_c)}a, a) = |a\boldsymbol{q}_c^\circ|_g^2$, $a \in \mathfrak{g}$.

Всюду далее мы будем работать только в системе координат пространства V, жестко связанной с телом и, допуская некоторую вольность, будем обозначать точку $\boldsymbol{q}^\circ \in V$ через $\boldsymbol{q}$.

4. Построение векторного произведения в псевдо-евклидовом пространстве. Оператор инерции

Как мы показали в лемме 2, кинетическая энергия волчка есть квадратичная форма $T(a)$, $a \in \mathfrak{g}$, см. (9), от оператора $a : V \to V$ мгновенного вращения относительно тела. Эта квадратичная форма естественно выражается через (ковариантный) тензор инерции (11), являющийся симметрическим оператором $J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в коалгебру $\mathfrak{g}^*$.

Возникает задача о получении явных формул для тензора инерции.

В евклидовом случае ($\eta = +1$) решение этой задачи хорошо известно: любой оператор $a \in \mathfrak{g}$ мгновенного вращения в теле можно задать вектором угловой скорости $\omega \in V$ вращения в теле (причем единственным образом, если фиксирована ориентация пространства V), так, что оператор $a = \widetilde{\boldsymbol{\omega}} : V \to V$ имеет вид $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}$, где $\times$ — векторное произведение в евклидовом векторном пространстве $V \cong \mathbb{R}^3$ (отвечающее выбранной ориентации в V). При таком вращении тела точка $\boldsymbol{q} \in V$ приобретает мгновенную скорость

$$\boldsymbol{v} := \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q} \in V$$

относительно тела, см. (10). При этом для одноточечного тела $\boldsymbol{q}$ массы $m = 1$ верны (ввиду (6) при $\boldsymbol{w} = 0$ и свойств векторного произведения) следующие соотношения:

$$T(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|_g^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{q})_g = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{q}))_g = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})})_g = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega})_g, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})} := \boldsymbol{q} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q})$ — *вектор кинетического момента* точки $\boldsymbol{q}$ *относительно тела* (см. [3, §5.1], [4, §28 В], ср. [7, гл. I, §4]), $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V$ — *оператор инерции* точки $\boldsymbol{q}$, определенный формулой $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})}$. Соответствующий оператор $\varphi_g\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V^*$ на V является симметрическим и преобразуется в (ковариантный) тензор инерции $J^{(\boldsymbol{q})} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ из (11) при отождествлении векторных пространств V и $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}(3)$ при помощи изоморфизма

$$\mu : V \to \mathfrak{g}, \quad \boldsymbol{\omega} \mapsto \widetilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} \in V \tag{14}$$

(т.е. эти симметрические операторы связаны соотношением $(J^{(\boldsymbol{q})}\mu\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{b}) = (\varphi_g\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$).

Чтобы распространить это решение на псевдо-евклидов случай ($\eta = -1$), нам нужно построить операцию $[,]_g$ на псевдо-евклидовом пространстве (V, g), аналогичную операции $\times$ векторного произведения, и убедиться в том, что эта операция обладает нужными свойствами по отношению к псевдо-евклидовой метрике g. В частности, эта операция должна задавать изоморфизм векторных пространств V и $\mathfrak{g}$, аналогичный изоморфизму (14).

Оказывается, такую операцию $[,]_g$ действительно можно построить. При этом, как и в евклидовом случае, она будет зависеть от выбора ориентации в пространстве V. Построим ее явно в следующем определении.

Определение 4 (векторное произведение в псевдо-евклидовом пространстве). *Фиксируем ориентацию в трехмерном пространстве V (для определенности будем считать, что стандартный базис пространства V^* положительно ориентирован). Пусть σ — ориентированная форма объема на V, отвечающая этой ориентации и (псевдо-)евклидову скалярному произведению g. Определим («псевдо-евклидово»)* векторное произведение

$$[,]_g : V \times V \to V$$

в (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g) следующим условием:

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g, \boldsymbol{c})_g = \sigma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \qquad \text{для любой тройки векторов} \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V \tag{15}$$

(это условие определяет вектор $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g \in V$ однозначно, так как $\sigma \neq 0$ и $\dim V = 3$). Определим (для псевдо-евклидова скалярного произведения g) отображение

$$\mu : V \to \mathfrak{gl}(V), \quad \mu\boldsymbol{\omega} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g \qquad \text{для любых} \quad \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q} \in V. \tag{16}$$

Из определения 4 операции $[,]_g$ сразу получаем

Следствие 2. *Операция $[,]_g$ на (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g) является естественной, т.е. не зависит от выбора ортонормированного базиса в V, т.е. $[A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}]_g = \eta_A A[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g$ для любых $A \in \mathrm{G}$ и $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$, где $\eta_A = \det A = \pm 1$.*

Как мы показали в (4), алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из операторов вида $\varphi_g^{-1} a_{\mathrm{eucl}}$, где $a_{\mathrm{eucl}} \in \mathfrak{so}(3)$ — любая кососимметрическая билинейная форма на V. Мы покажем в теореме 1, что образ отображения μ совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и что это отображение есть изоморфизм вида

$$\mu : V \to \mathfrak{g}, \qquad \mu\boldsymbol{\omega} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}} := \eta\varphi_g^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{eucl}} \qquad \text{для любого} \quad \boldsymbol{\omega} \in V, \tag{17}$$

где $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{eucl}} : V \to V^*$ — кососимметрический оператор (отвечающий кососимметрической билинейной форме $-i_{\boldsymbol{\omega}}\sigma$ на пространстве V) вида

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{eucl}} := -\varphi_{i_{\boldsymbol{\omega}}\sigma}, \qquad \text{где} \qquad i_{\boldsymbol{a}}\sigma(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) := \sigma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \quad \text{для любых} \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V. \tag{18}$$

По отношению к стандартному базису вектор $\boldsymbol{\omega} \in V$ и билинейная форма $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{eucl}}$ имеют вид

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \in V, \qquad \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{eucl}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3). \tag{19}$$

Вектор $\boldsymbol{\omega} \in V$ назовем *угловой скоростью относительно тела* (см. [4, §26 Г], ср. [7, гл. I, определение 4.3]), отвечающей оператору $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \mu\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{g}$ мгновенного вращения относительно тела (см. (9), (16)). При таком вращении точка $\boldsymbol{q} \in V$ приобретает мгновенную скорость

$$\boldsymbol{v} := \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g \in V \tag{20}$$

относительно тела, см. (10). При таком вращении вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ остается неподвижным, как и в евклидовом случае: $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}]_g = 0$, т.е. определяет «ось вращения». Определим для точки $\boldsymbol{q}$ *вектор кинетического момента относительно тела* формулой

$$\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})} := [\boldsymbol{q}, m\boldsymbol{v}]_g = m[\boldsymbol{q}, [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g]_g \in V, \tag{21}$$

где m — масса этой точки.

В евклидовом пространстве (V, g) любой размерности такая форма объема хорошо известна: квадрат значения формы объема на произвольном базисе $\boldsymbol{e}_i$ пространства V задается равным определителю матрицы Грама $g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$. В псевдо-евклидовом случае она определяется аналогично, при этом берется модуль определителя матрицы Грама. Полилинейность и невырожденность такой формы объема легко проверяются [27].

Для определения операции $[,]_g$ на V можно было использовать любую ориентированную форму объема на V (не обязательно связанную со скалярным произведением g). Такая операция будет обладать всеми свойствами из теоремы 1, кроме первого равенства в (23).

Теорема 1. *На любом (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g) (псевдо-)евклидово векторное произведение $[,]_g$ из (15) является билинейным и кососимметрическим, имеют место инвариантность скалярного произведения и правило Лейбница:*

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g, \boldsymbol{c})_g = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]_g)_g, \qquad [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]_g]_g = [[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g, \boldsymbol{c}]_g + [\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]_g]_g, \tag{22}$$

а оператор μ из (16) удовлетворяет условиям $\mu(V) = \mathfrak{g}$, (17), (18) и соотношениям

$$(\mu\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g = (a^2b^3 - a^3b^2, \eta(a^3b^1 - a^1b^3), \eta(a^1b^2 - a^2b^1))^T, \qquad \mu[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g = [\mu\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{b}], \tag{23}$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — произвольные вектора из V, a^j, b^j — их координаты в стандартном базисе, $[,]$ — скобка Ли на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В случае евклидовой метрики ($\eta = +1$) векторное произведение $[,]_g$ совпадает со стандартным векторным произведением $\times$ в $\mathbb{R}^3$.

Эту теорему мы докажем в §5, а пока выведем из нее несколько следствий.

Следствие 3 (см. [4, §28 B] для евклидова случая). *Для любой точки $\boldsymbol{q} \in V$ рассмотрим оператор $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V$, задаваемый формулой*

$$\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V, \qquad \widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})}, \tag{24}$$

см. (20), (21). *Этот оператор имеет вид $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} = -m(\mu\boldsymbol{q})^2$ и является симметрическим относительно (псевдо-)евклидова скалярного произведения g.*

Доказательство. Равенство $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} = -m(\mu\boldsymbol{q})^2$ следует из определения 4. Ввиду первого соотношения в (22), для любых векторов $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \in V$ имеем

$$(\boldsymbol{\omega}_1, \widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}_2)_g = (\boldsymbol{\omega}_1, [\boldsymbol{q}, m[\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{q}]_g]_g)_g = m([\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{q}]_g, [\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{q}]_g])_g,$$

а последнее выражение симметрично относительно $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. □

Подставляя вместо $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и замечая, что $|[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g|_g^2 = |\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{q}|_g^2 = |\boldsymbol{v}|_g^2$ в силу (20), получаем

Следствие 4 (см. [4, §28 B] в евклидовом случае). *Кинетическая энергия $T^{(\boldsymbol{q})}$ точки $\boldsymbol{q}$ в (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g) есть квадратичная форма от вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости относительно тела, имеющая следующий вид:*

$$T^{(\boldsymbol{q})}(\mu\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})_g = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})}, \boldsymbol{\omega})_g.$$

Оператор $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ симметричен. ■

Если тело состоит из многих точек $\boldsymbol{q}_i$ с массами m_i, то, суммируя, получаем:

Теорема 2 (см. [4, §28 B] в евклидовом случае). *Кинетическая энергия T произвольного твердого тела в (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g) есть квадратичная форма от вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости относительно тела, имеющая следующий вид:*

$$T(\mu\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(\widehat{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})_g = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega})_g.$$

Здесь $\boldsymbol{M} = \sum\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q}_i)}$ — сумма кинетических моментов (24) точек $\boldsymbol{q}_i$ масс m_i, $\widehat{J} = \sum\limits_{i=1}^{n} \widehat{J}^{(\boldsymbol{q}_i)}$ — сумма операторов (24), отвечающих этим точкам. Оператор $\widehat{J}$ симметричен. ■

Определение 5. *Симметрические операторы* $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}, \widehat{J}: V \to V$ *из следствия* 3 *и теоремы* 2 *называются* операторами инерции *точки* $\boldsymbol{q}$ *и твердого тела, соответственно. Соответствующие симметрические операторы*

$$J^{(\boldsymbol{q})} = \varphi_g \widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}: V \to V^*, \qquad J = \varphi_g \widehat{J}: V \to V^*$$

назовем (ковариантными) тензорами инерции *точки* $\boldsymbol{q}$ *и твердого тела, соответственно. Верны соотношения* $(J^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = (\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)_g$, $(J\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = (\widehat{J}\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)_g$ *для любых* $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \in V$.

Следствие 5. *Оператор инерции точки* $\boldsymbol{q}$ *массы* $m=1$ *имеет вид* $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} = -(\mu \boldsymbol{q})^2 = -(\widetilde{\boldsymbol{q}})^2 = -(\varphi_g^{-1}\widetilde{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{eucl}})^2$ *и задается матрицей* $\begin{pmatrix} \eta((q^2)^2+(q^3)^2) & -\eta q^1 q^2 & -\eta q^1 q^3 \\ -q^1 q^2 & (q^1)^2 + \eta(q^3)^2 & -\eta q^2 q^3 \\ -q^1 q^3 & -\eta q^2 q^3 & (q^1)^2 + \eta(q^2)^2 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Вычислим оператор $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$, применяя формулу $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g$:

$$\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})} = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}]_g = [\boldsymbol{q}, [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g]_g = -[\boldsymbol{q}, [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}]_g]_g = -[\boldsymbol{q}, \widetilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{\omega}]_g = -\widetilde{\boldsymbol{q}}\widetilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{\omega} = -(\widetilde{\boldsymbol{q}})^2\boldsymbol{\omega}.$$

Ввиду (17), имеем $\widetilde{\boldsymbol{q}} = \eta \varphi_g^{-1} \widetilde{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{eucl}}$. Формула $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} = -m(\widetilde{\boldsymbol{q}})^2 = -m(\varphi_g^{-1}\widetilde{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{eucl}})^2$ доказана. Найдем матрицу оператора $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ по отношению к стандартному базису пространства V, используя, что матрица кососимметрической билинейной формы $\widetilde{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{eucl}}$ имеет вид как в (19):

$$\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} = -m(\widetilde{\boldsymbol{q}})^2 = -m(\varphi_g^{-1}\widetilde{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{eucl}})^2 = -m \begin{pmatrix} 0 & q^3 & -q^2 \\ -\eta q^3 & 0 & \eta q^1 \\ \eta q^2 & -\eta q^1 & 0 \end{pmatrix}^2 .$$

Возведение матрицы в квадрат дает требуемую матрицу. Следствие доказано. □

5. Доказательство теоремы 1

Выше мы вывели следствия 3, 4, 5 и теорему 2 об операторе инерции $\widehat{J}$ из теоремы 1 о свойствах (псевдо-)евклидова векторного произведения $[,]_g$. Приведем доказательство этой теоремы.

Билинейность и кососимметричность операции $[,]_g$ следуют из определения 4.

Первое свойство в (22) легко следует из определения 4, симметричности скалярного произведения g и кососимметричности ориентированной формы объема σ:

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g, \boldsymbol{c})_g = \sigma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \qquad (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]_g)_g = ([\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]_g, \boldsymbol{a})_g = \sigma(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = \sigma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Докажем равенство $\mu(V) = \mathfrak{g}$. Для доказательства включения $\mu(V) \subseteq \mathfrak{g}$ нужно проверить, что оператор $\widetilde{\boldsymbol{a}} = \mu \boldsymbol{a} \in \mathfrak{gl}(V)$ кососимметричен, т.е. удовлетворяет соотношению $(\widetilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})_g + (\boldsymbol{b}, \widetilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c})_g = 0$ для любых $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$. Это эквивалентно первому свойству из (22), доказанному выше. Включение $\mu(V) \subseteq \mathfrak{g}$ доказано. Инъективность μ следует из определения 4 и невырожденности формы объема. Так как $\mu: V \to \mathfrak{g}$ инъективно, то оно биективно, ввиду совпадения размерностей $\dim V = \dim \mathfrak{g}$. Значит, это изоморфизм векторных пространств и $\mu(V) = \mathfrak{g}$.

Докажем свойства (17) и (18) и первое равенство в (23). Так как $\mu(V) \subseteq \mathfrak{g}$, то для любого $\boldsymbol{\omega} \in V$ оператор $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \mu\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{g}$ является кососимметрическим, т.е. имеет вид (17) для некоторой

Отметим, что ковариантный тензор инерции J из определения 3 является отображением $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ со свойством $T(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}) = \frac{1}{2}(J\widetilde{\boldsymbol{\omega}}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}})$, а тензор J из определения 5 — отображением $V \to V^*$ со свойством $T(\mu\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(J\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$. С учетом доказанного изоморфизма $\mu: V \to \mathfrak{g}$ это не приводит к путанице в терминологии и обозначениях.

кососимметрической билинейной формы $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{eucl}} : V \to V^*$, см. (4). Покажем, что эта форма имеет вид (18). Из (15) имеем $\sigma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = ([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g,\boldsymbol{c})_g = (\varphi_g[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g,\boldsymbol{c})$. По отношению к стандартномому базису имеем $\sigma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \eta\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$, где векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ отождествляются со столбцами своих координат в этом базисе, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ — матрица из этих столбцов (указанное равенство следует из построения формы объема σ, см. сноску). Поэтому координаты ковектора $\eta\varphi_g[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g$ по отношению к этому базису такие же, как у обычного векторного произведения $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, т.е. имеют вид $(a^2b^3-a^3b^2, a^3b^1-a^1b^3, a^1b^2-a^2b^1)^T$. Следовательно, координаты вектора $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g$ в этом же базисе имеют требуемый вид $(a^2b^3-a^3b^2, \eta(a^3b^1-a^1b^3), \eta(a^1b^2-a^2b^1))^T$. Таким образом, мы доказали первое равенство в (23). Из первого равенства в (23) сразу получаем, что билинейная форма $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{eucl}}$ из (17) имеет вид (19), а поэтому и (18).

Для доказательства второго равенства в (23) запишем для вектора $\boldsymbol{a} = \sum\limits_{j=1}^{3} a^j\boldsymbol{e}_j \in V$ соответствующий элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\mu\boldsymbol{a} = \widetilde{\boldsymbol{a}} = \eta\varphi_g^{-1}\widetilde{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{eucl}} = \eta\varphi_g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -a^3 & a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ -a^2 & a^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a^3 & a^2 \\ \eta a^3 & 0 & -\eta a^1 \\ -\eta a^2 & \eta a^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим таким образом коммутатор матриц $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ (т.е. операцию скобка Ли на алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V,g)$):

$$[\mu\boldsymbol{a},\mu\boldsymbol{b}] = [\widetilde{\boldsymbol{a}},\widetilde{\boldsymbol{b}}] = \widetilde{\boldsymbol{a}}\widetilde{\boldsymbol{b}} - \widetilde{\boldsymbol{b}}\widetilde{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \eta a^2b^1 & \eta a^3b^1 \\ a^1b^2 & \lambda_2 & \eta a^3b^2 \\ a^1b^3 & \eta a^2b^3 & \lambda_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & \eta a^1b^2 & \eta a^1b^3 \\ a^2b^1 & \lambda_2 & \eta a^2b^3 \\ a^3b^1 & \eta a^3b^2 & \lambda_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \eta(a^2b^1-a^1b^2) & \eta(a^3b^1-a^1b^3) \\ a^1b^2-a^2b^1 & 0 & \eta(a^3b^2-a^2b^3) \\ a^1b^3-a^3b^1 & \eta(a^2b^3-a^3b^2) & 0 \end{pmatrix} = \mu[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g,$$

при этом последнее равенство следует из того, что указанная матрица совпадает с элементом $\mu[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g = \widetilde{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, отвечающим вектору $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g = \begin{pmatrix} a^2b^3-a^3b^2 \\ \eta(a^3b^1-a^1b^3) \\ \eta(a^1b^2-a^2b^1) \end{pmatrix}$. Здесь обозначено $\lambda_1 = -\eta(a^3b^3+a^2b^2)$, $\lambda_2 = -(a^1b^1+\eta a^3b^3)$, $\lambda_3 = -(a^1b^1+\eta a^2b^2)$.

Осталось доказать справедливость второго равенства в (22). Заметим, что, ввиду второго равенства в (23), изоморфизм $\mu : V \to \mathfrak{g}$ преобразует операцию $[,]_g$ в скобку Ли на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Второе равенство в (22) равносильно тождеству Якоби, которое справедливо для скобки Ли в любой алгебре Ли [11, §1.3]. Значит, это равенство верно и для операции $[,]_g$.

Теорема 1 доказана. ■

Следствие 6 (см. [28, §32] в евклидовом случае). *Ковариантный тензор инерции $J^{(\boldsymbol{q})} = \varphi_g\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V^*$ точки $\boldsymbol{q}$ единичной массы (см. определение 5) симметричен и задается матрицей*

$$J^{(\boldsymbol{q})} = \begin{pmatrix} (q^2)^2+(q^3)^2 & -q^1q^2 & -q^1q^3 \\ -q^1q^2 & (q^1)^2+\eta(q^3)^2 & -\eta q^2q^3 \\ -q^1q^3 & -\eta q^2q^3 & (q^1)^2+\eta(q^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Формула для матрицы оператора $J^{(\boldsymbol{q})} = \varphi_g\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ следует из формулы для матрицы оператора $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ из следствия 5. □

6. Об изоморфизме алгебр Ли $(V, [\,,]_g)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, g)$

В теореме 1 мы показали, что отображение μ из (16) имеет вид $\mu : V \to \mathfrak{g}$ и преобразует операцию «псевдо-евклидова векторного произведения» $[\,,]_g$ на пространстве V в скобку Ли $[\,,]$ на алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, g)$, см. (23), т.е. задает изоморфизм алгебр Ли. Отметим, что этот изоморфизм возможен только в трехмерном случае ($\dim V = 3$), так как в общем случае ($\dim V = n$) оператор инерции задан на алгебре Ли $\mathfrak{g}$,

$$\dim \mathfrak{g} = \frac{1}{2} n(n-1) \neq n = \dim V \qquad \text{при} \quad n \neq 3.$$

Теорема 3. *Изоморфизм $\mu : V \to \mathfrak{g}$ вида* (17), (19) *является естественным, т.е. не зависит от выбора ортонормированного базиса в V, т.е. $\mu \circ A = \eta_A \operatorname{Ad}_A \circ \mu$ для любого $A \in \mathrm{G}$, где $\operatorname{Ad} : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ — присоединенное представление группы Ли $\mathrm{G} = \operatorname{Aut}(V, g)$, $\operatorname{Ad}_A : \widetilde{\boldsymbol{\omega}} \mapsto$ $\mapsto A\widetilde{\boldsymbol{\omega}}A^{-1}$, $\eta_A = \det A = \pm 1$ (см. [10, §1]). При этом изоморфизме (псевдо-) евклидово скалярное произведение g на V преобразуется в форму Киллинга – Картана $g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_2) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_1} \circ$ $\circ \operatorname{ad}_{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_2})$ на алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, g)$, домноженную на коэффициент $-\frac{1}{2}\eta$, т.е. $\mu^* g_{\mathrm{ad}} = -2\eta g$.*

Другими словами, первая часть теоремы 3 утверждает, что изоморфизм $\mu : V \to \mathfrak{g}$ согласован с заменой базиса в пространстве V, отвечающей любому оператору $A \in \mathrm{G} = \operatorname{Aut}(V, g)$, и индуцированной заменой базиса в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, т.е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mu"] & \mathfrak{g} \\ V \arrow[u, "A"] \arrow[r, "\mu"] & \mathfrak{g}. \arrow[u, "\eta_A \operatorname{Ad}_A"'] \end{tikzcd}$$

Доказательство. [Доказательство теоремы 3] Первое утверждение теоремы следует из естественности определения операции $[\,,]_g$ (см. следствие 2).

Докажем второе утверждение теоремы. Его достаточно доказать только в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_i$ пространства V и соответствующем базисе $\widetilde{\boldsymbol{e}}_i = \mu(\boldsymbol{e}_i)$ алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, g)$.

Нужно посчитать форму Киллинга – Картана для базисных элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Так как $\mu[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g = [\mu\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{b}]$ по теореме 1, то матрица оператора $\boldsymbol{E}_j = \operatorname{ad}_{\widetilde{\boldsymbol{e}}_j} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ в базисе $\widetilde{\boldsymbol{e}}_i$ совпадает с матрицей оператора $\widetilde{\boldsymbol{e}}_j : V \to V$ в базисе $\boldsymbol{e}_i$. Поэтому $g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_j, \widetilde{\boldsymbol{e}}_k) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{E}_j \circ \boldsymbol{E}_k) = \operatorname{tr}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_j \circ \widetilde{\boldsymbol{e}}_k)$ и

$$g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \widetilde{\boldsymbol{e}}_1) = \operatorname{tr}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta \\ 0 & \eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta \\ 0 & \eta & 0 \end{pmatrix}) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2,$$

$$g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_2, \widetilde{\boldsymbol{e}}_2) = \operatorname{tr}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta \end{pmatrix} = -2\eta,$$

$$g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_3, \widetilde{\boldsymbol{e}}_3) = \operatorname{tr}(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -\eta & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2\eta,$$

$$g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \widetilde{\boldsymbol{e}}_2) \quad = \quad g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \widetilde{\boldsymbol{e}}_3) \quad = \quad g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_2, \widetilde{\boldsymbol{e}}_3) \quad = \quad 0.$$

То есть, $g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_i, \widetilde{\boldsymbol{e}}_j) = -2\eta g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, поэтому $\mu^* g_{\mathrm{ad}} = -2\eta g$. $\square$

7. О сигнатуре оператора инерции $\widehat{J}$ в псевдо-евклидовом случае

Определение 6. *Предположим, что существует базис пространства (V,g), в котором (псевдо-)евклидово скалярное произведение g и оператор инерции $\widehat{J}:V\to V$ твердого тела задаются диагональными матрицами, которые без ограничения общности имеют вид* $\operatorname{diag}(\eta,1,1)$ *и* $\operatorname{diag}(J_1,J_2,J_3)$ *соответственно. В этом случае будем называть упорядоченную тройку чисел* (J_1,J_2,J_3) главными моментами инерции *твердого тела, а упорядоченную тройку знаков* (s_1,s_2,s_3), *где* $s_i=\operatorname{sgn}J_i\in\{0,+,-\}$, — сигнатурой оператора инерции. *Если такого базиса не существует, будем говорить, что главные моменты инерции и сигнатура* не являются корректно определенными.

Определение 7. *(Псевдо-)сферой радиуса $r\in\mathbb{C}$ с центром в точке $O\in V$ будем называть множество точек пространства V, удаленных от точки O на расстояние r в смысле (псевдо-)евклидовой метрики $g=\operatorname{diag}(\eta,1,1)$.*

Всюду ниже будем предполагать, что центр O сферы совпадает с началом координат. Такие сферы совпадают с орбитами действия группы $\mathrm{G}=\operatorname{Aut}(V,g)$ на V. Через $L^\perp$ будем обозначать ортогональное дополнение к подпространству $L\subset V$ в смысле скалярного произведения g. Как хорошо известно, касательная плоскость к сфере в любой ее точке $\boldsymbol{q}$ есть ортогональное дополнение к радиус-вектору этой точки.

Линейную оболочку векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\dots\in V$ будем обозначать через $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\dots\rangle$.

Теорема 4. *Для любой точки $\boldsymbol{q}\in V\setminus\{O\}$ на (псевдо-)сфере с радиусом $r\in\mathbb{R}_{>0}$ (в евклидовом случае) или $r\in\mathbb{R}_+\cup i\mathbb{R}_{>0}$ (в псевдо-евклидовом случае) оператор инерции $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}:V\to V$ одноточечного тела имеет вид*

$$\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}=\eta m\left(r^2\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\omega})_g\boldsymbol{q}\right)=\eta m\left(|\boldsymbol{q}|_g^2\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\omega})_g\boldsymbol{q}\right),\qquad \boldsymbol{\omega}\in V,$$

где m — масса точки, $r^2=|\boldsymbol{q}|_g^2$. Прямая $\langle\boldsymbol{q}\rangle$ и плоскость $\langle\boldsymbol{q}\rangle^\perp$, касательная к сфере в точке $\boldsymbol{q}$, инвариантны относительно этого оператора. Его ограничение на эту прямую равно нулю, а ограничение на эту плоскость пропорционально тождественному оператору с коэффициентом пропорциональности $\eta mr^2=\eta m|\boldsymbol{q}|_g^2$. Этот оператор симметричен, и соответствующая квадратичная форма $\boldsymbol{\omega}\mapsto(\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_g$, $\boldsymbol{\omega}\in V$, имеет следующие свойства: ее ограничение на прямую $\langle\boldsymbol{q}\rangle$ равно нулю, а ограничение на плоскость $\langle\boldsymbol{q}\rangle^\perp$ пропорционально ограничению метрики g на эту плоскость с коэффициентом пропорциональности $\eta mr^2=\eta m|\boldsymbol{q}|_g^2$. Сигнатура оператора инерции равна либо $(0,+,+)$ в случае $r^2<0$, либо $(-,0,-)$ в случае $r^2>0$, либо не является корректно определенной в случае $r=0$.

Доказательство. По построению (20), (21), (24) оператора инерции $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{q}=[\boldsymbol{q},m[\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}]_g]_g=0$. Оператор $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ симметричен в силу следствия 3. Поэтому прямая $\langle\boldsymbol{q}\rangle$ и плоскость $\langle\boldsymbol{q}\rangle^\perp$ инвариантны относительно него.

Рассмотрим точки $\boldsymbol{q}_1=(1,0,0)^T$ и $\boldsymbol{q}_2=(0,1,0)^T$. Они лежат на сферах радиусов $\sqrt{\eta}$ и 1 соответственно. Для этих точек утверждение теоремы получается подстановкой точек в формулу из следствия 6. Действуя на эти точки элементами группы $\mathrm{G}=\operatorname{Aut}(V,g)$, получим остальные точки этих сфер. Так как $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}=-m(\mu\boldsymbol{q})^2$ по следствию 3 и, согласно теореме 3, изоморфизм $\mu:V\to\mathfrak{g}$ является естественным, то требуемые свойства верны для всех точек этих сфер. Применяя гомотетии, получаем, что утверждение верно для всех точек всех сфер ненулевого радиуса. Так как эти точки образуют плотное подмножество в V, то из

В псевдо-евклидовом случае такой базис не обязан существовать. Например, квадратичные формы $g=2dx^1dx^2$ и $J=(2dx^1+dx^2)dx^2$ в двумерном векторном пространстве не приводятся одновременно к диагональному виду, так как оператор $g^{-1}J$ задается жордановой матрицей $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

соображений непрерывности получаем, что утверждение верно для всех точек. Утверждение о сигнатуре оператора инерции для точек $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ и $\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2$ следует из явного вида тензора инерции для этих точек, см. табл. 1. Применяя к этим точкам движения и гомотетии, получаем, что утверждение о сигнатуре верно для всех точек, отличных от начала координат. $\square$

Таблица 1: Тензоры инерции некоторых 1-, 2- и 3-точечных тел в псевдо-евклидовом пространстве

Точки тела	Ковариантный тензор инерции	Сигнатура оператора инерции	Условия	Расположение точек
$\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{e}_1$	$m_1\operatorname{diag}(0,1,1)$	$(0,+,+)$		$r_1\in i\mathbb{R}_{>0}$
$\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{e}_2$	$m_2\operatorname{diag}(1,0,-1)$	$(-,0,-)$		$r_2>0$
$\boldsymbol{q}_3=\boldsymbol{e}_3$	$m_3\operatorname{diag}(1,-1,0)$	$(-,-,0)$		$r_3>0$
$\boldsymbol{q}_4=\boldsymbol{e}_2-\delta\boldsymbol{e}_1$	$m_4\begin{pmatrix}1&\delta&0\\ \delta&\delta^2&0\\ 0&0&\delta^2-1\end{pmatrix}$	$(-,0,-)$ не корр. $(0,+,+)$	$0<\delta<1$ $\delta=1$ $\delta>1$	$r_4>0$ $r_4=0$ $r_4\in i\mathbb{R}_{>0}$
$\boldsymbol{q}_2,\quad \boldsymbol{q}_3$	$\operatorname{diag}(m,-m_3,-m_2)$	$(-,-,-)$		$r_2,\ r_3>0$
$\boldsymbol{q}_1,\quad \boldsymbol{q}_4$ $(a:=\delta^2+\frac{m_1}{m_4})$	$m_4\begin{pmatrix}1&\delta&0\\ \delta&a&0\\ 0&0&a-1\end{pmatrix}$	$(-,+,+)$	$\delta>1$	$r_1,\ r_4\in i\mathbb{R}_{>0}$
$\boldsymbol{q}_2,\quad \boldsymbol{q}_4$ $(b:=\sqrt{1+\frac{m_2}{m_4}})$	$m_4\begin{pmatrix}b^2&\delta&0\\ \delta&\delta^2&0\\ 0&0&\delta^2-b^2\end{pmatrix}$	$(-,+,-)$ $(-,+,-)$ $(-,+,-)$ $(-,+,0)$ $(-,+,+)$	$0<\delta<1$ $\delta=1$ $1<\delta<b$ $\delta=b$ $\delta>b$	$r_2>0,\ r_4>0$ $r_2>0,\ r_4=0$ $r_2>0,\ r_4\in i\mathbb{R}_{>0}$ $r_2>0,\ r_4\in i\mathbb{R}_{>0}$ $r_2>0,\ r_4\in i\mathbb{R}_{>0}$
$\boldsymbol{q}_1,\quad \boldsymbol{q}_2,\quad \boldsymbol{q}_3$	$\operatorname{diag}(2m/3,0,0)$	$(-,0,0)$	$m_j=m/3$	$r_1\in i\mathbb{R}_{>0},\ r_2,r_3>0$

Теорема 5. *В псевдо-евклидовом случае ($\eta=-1$) квадратичная форма $\boldsymbol{\omega}\mapsto(\widehat{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_g$, $\boldsymbol{\omega}\in V$, отвечающая оператору инерции $\widehat{J}$ любого твердого тела, имеет следующие свойства:*

(A) *Ее ограничение на внутренность светового конуса (т.е. на множество времениподобных векторов $\boldsymbol{\omega}\neq 0$) неотрицательно. В частности, если у твердого тела главные моменты инерции корректно определены (определение 6), то первый главный момент инерции неположителен и сигнатура оператора инерции отлична от $(+,s_2,s_3)$.*

(B) *Если $(\widehat{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_g=0$ для какого-либо вектора $\boldsymbol{\omega}$, лежащего внутри светового конуса, то твердое тело содержится в прямой $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle$. Если $(\widehat{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_g=0$ для какого-либо вектора $\boldsymbol{\omega}\neq 0$, принадлежащего световому конусу, то твердое тело содержится в касательной плоскости $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle^\perp$ к световому конусу в точке $\boldsymbol{\omega}$.*

(C) *Если твердое тело не содержится ни в какой прямой и ни в какой плоскости, описанных в п.* (B)*, то сигнатура оператора инерции корректно определена (определение 6) и имеет вид $(-,s_2,s_3)$, где $s_2,s_3\in\{0,+,-\}$, при этом $(\widehat{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_g>0$ для любого вектора $\boldsymbol{\omega}\neq 0$ внутри светового конуса или на нем.*

Доказательство. (A) Пусть $\boldsymbol{\omega}=(1,0,0)^T$. Тогда значение $(\widehat{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_g$ равно первому диагональному элементу матрицы ковариантного тензора инерции J. Эту матрицу мы нашли в случае одноточечного тела в следствии 6, и по этому следствию ее первый диагональный элемент неотрицателен. Следовательно, $(J^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})\geqslant 0$ для одноточечных тел и, в силу аддитивности тензора инерции, аналогичное неравенство верно и для многоточечных тел. Действуя на вектор $\boldsymbol{\omega}$ поворотами $A\in\mathrm{G}$, получим в силу следствия 3 и теоремы 3, что $(JA\boldsymbol{\omega},A\boldsymbol{\omega})\geqslant 0$.

(B) Пусть $\boldsymbol{\omega} = (1,0,0)^T$. Этот вектор лежит внутри светового конуса. Тогда $(\widehat{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_g$ есть первый диагональный элемент матрицы тензора инерции J. Из следствия 6 получаем, что этот элемент есть сумма неотрицательных чисел $m_i((q_i^2)^2+(q_i^3)^2)$ по всем точкам $\boldsymbol{q}_i$ тела. Если эта сумма равна нулю, то все точки твердого тела должны лежать на прямой $q^2=q^3=0$, которая совпадает с прямой $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle$.

Пусть $\boldsymbol{\omega} = (1,1,0)^T$. Этот вектор принадлежит световому конусу. Тогда $(\widehat{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_g$ есть сумма элементов симметрической матрицы $J=\varphi_g\widehat{J}$, не лежащих в третьем столбце и третьей строке. Из следствия 6 при $\eta=-1$ получаем, что эта сумма равна сумме неотрицательных чисел $m_i(q_i^1-q_i^2)^2$ по всем точкам тела. Если последняя сумма равна нулю, то все точки твердого тела должны лежать в плоскости $q^1=q^2$, которая совпадает с касательной плоскостью $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle^\perp$ к световому конусу в точке $\boldsymbol{\omega}$.

Действуя на вектор $\boldsymbol{\omega}$ поворотами $A\in \mathrm{G}$, получим в силу следствия 3 и теоремы 3, что требуемые свойства верны для векторов вида $\boldsymbol{\omega}_1 = A\boldsymbol{\omega}$.

(C) Пусть твердое тело не содержится ни в какой прямой и ни в какой плоскости указанного вида. Рассмотрим пару квадратичных форм $\boldsymbol{\omega}\mapsto|\boldsymbol{\omega}|_g^2$ и $\boldsymbol{\omega}\mapsto(\widehat{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_g$ на пространстве V.

Из (A) и (B) получаем, что вторая форма положительна на любом ненулевом векторе, лежащем внутри светового конуса или на нем. Выведем отсюда, что найдется базис $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'\in V$, по отношению к которому эта пара форм имеет диагональный вид. Действительно: нетрудно показать, что внутри светового конуса существует собственный вектор $\boldsymbol{e}_1'$ оператора инерции $\widehat{J}$ (в качестве такого вектора можно взять радиус-вектор точки минимума ограничения функции $\boldsymbol{\omega}\mapsto(\widehat{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_g$ на сферу радиуса i). Легко проверяется, что плоскость $\langle\boldsymbol{e}_1'\rangle^\perp$ инвариантна относительно оператора инерции $\widehat{J}$ (ввиду равенства $(\widehat{J}\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_1')_g=(\boldsymbol{a},\widehat{J}\boldsymbol{e}_1')_g=0$ для любого вектора $\boldsymbol{a}\in\langle\boldsymbol{e}_1'\rangle^\perp$), т.е. прямая $\langle\boldsymbol{e}_1'\rangle$ и плоскость $\langle\boldsymbol{e}_1'\rangle^\perp$ ортогональны относительно обеих квадратичных форм. Так как на этой плоскости первая форма положительно определена, то в силу теоремы из линейной алгебры в этой плоскости существует базис $\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'$, по отношению к которому обе формы имеют диагональный вид.

Без ограничения общности мы можем и будем считать, что по отношению к полученному базису $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'$ квадратичные формы задаются матрицами $G=\mathrm{diag}(-1,1,1)$ и $J=\mathrm{diag}(-J_1,J_2,J_3)$ соответственно, поэтому оператор инерции имеет вид $\widehat{J}=G^{-1}J=$ $=\mathrm{diag}(J_1,J_2,J_3)$ и его сигнатура (s_1,s_2,s_3) состоит из знаков $s_j=\mathrm{sgn}\,J_j$.

По доказанному вторая форма положительна на любом векторе из внутренности светового конуса, поэтому первый главный момент инерции $J_1=-(\widehat{J}\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_1')_g<0$. Значит, в сигнатуре первый элемент $s_1=\mathrm{sgn}\,J_1=-$. $\square$

Итак, для сигнатуры $(s_1,s_2,s_3)=(-,s_2,s_3)$ любого твердого тела из теоремы 5 (C) возможны шесть случаев: $(-,+,+)$, $(-,-,+)$, $(-,-,-)$, $(-,0,+)$, $(-,0,-)$, $(-,0,0)$.

В следующем предложении мы рассматриваем твердые тела, все точки которых лежат внутри светового конуса. Частным случаем такого тела является «тарелка» на плоскости Лобачевского, т.е. подмножество сферы радиуса $r\in i\mathbb{R}_{>0}$ с центром в начале координат.

Предложение 1 (О твердом теле, лежащем внутри светового конуса). *Рассмотрим твердое тело в псевдо-евклидовом пространстве* ($\eta=-1$)*, в котором все точки лежат внутри светового конуса. Если все эти точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, и* $\boldsymbol{v}$ *— направляющий вектор этой прямой, то* $\boldsymbol{v}\in\ker J$ *и ограничение ковариантного тензора инерции* $J=\varphi_g\widehat{J}$ *на касательную плоскость* $\langle\boldsymbol{v}\rangle^\perp$ *к сфере в точке* $\boldsymbol{v}$ *пропорционально ограничению метрики на эту плоскость с коэффициентом пропорциональности* $c>0$*, т.е.*

$$J|_{\boldsymbol{v}^\perp}=g|_{\boldsymbol{v}^\perp}\cdot c,\qquad \text{где}\quad c=\eta\sum_i m_i|\boldsymbol{q}_i|_g^2>0,$$

и оператор инерции $\widehat{J}=\sum\limits_i\widehat{J}^{(\boldsymbol{q}_i)}$ *имеет сигнатуру* $(0,+,+)$*, при этом главные моменты* *инерции равны* $(0, c, c)$. *Если же не все точки тела лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, то ковариантный тензор инерции* $J = \varphi_g \widehat{J}$ *положительно-определен, и сигнатура оператора инерции* $\widehat{J}$ *равна* $(-, +, +)$.

Доказательство. Первая часть предложения следует из теоремы 4 в случае $\eta = -1$ и $r \in i\mathbb{R}_{>0}$ (т.е. $\eta r^2 > 0$), с учетом аддитивности тензора инерции по точкам тела. Вторая часть предложения следует из того, что согласно первой его части квадратичные формы $\boldsymbol{\omega} \mapsto (J^{(\boldsymbol{q}_i)}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$ неотрицательно определены и имеют одномерные ядра $\langle \boldsymbol{q}_i \rangle$, не все из которых совпадают, поэтому сумма таких квадратичных форм положительно определена. □

Предложение 2 (О твердом теле, лежащем снаружи светового конуса и/или на нём). *Рассмотрим твердое тело в псевдо-евклидовом пространстве* ($\eta = -1$)*, в котором все точки находятся снаружи светового конуса и/или на нём. Возможны три случая:*

(i) *Если все они лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, и* $\boldsymbol{v}$ *— направляющий вектор этой прямой, то* $\boldsymbol{v} \in \ker J$, $J|_{\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp} = g|_{\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp} \cdot c$, $c = -\sum_{i=1}^{n} m_i |\boldsymbol{q}_i|_g^2 \leqslant 0$.
При этом сигнатура оператора инерции $\widehat{J}$ *равна* $(-, 0, -)$ *в случае, если прямая лежит снаружи светового конуса, и сигнатура не является корректно определенной, если прямая лежит на световом конусе.*

(ii) *Если не все они лежат в одной плоскости, касающейся светового конуса, то сигнатура оператора инерции* $\widehat{J}$ *корректно определена (определение 6) и имеет вид* $(-, s_2, s_3)$ *для некоторых* $s_2, s_3 \in \{0, +, -\}$. *Существуют двухточечные тела указанного вида, имеющие сигнатуры* $(-, -, -)$, $(-, +, -)$.

(iii) *Если все они лежат в одной плоскости, касающейся светового конуса, но не лежат на одной прямой, проходящей через начало координат и расположенной снаружи светового конуса, то сигнатура оператора инерции* $\widehat{J}$ *не является корректно определенной (определение 6).*

Доказательство. Первый пункт предложения доказывается так же, как и первая часть предложения 1 для случая $\eta = -1$ и $r \in \mathbb{R}_{>0}$ (т.е. $\eta r^2 < 0$).

Докажем второй пункт. По теореме 5 (C) сигнатура оператора инерции рассматриваемого тела корректно определена и имеет вид $(-, s_2, s_3)$. Осталось предъявить конкретные примеры двухточечных тех и вычислить сигнатуру для них. Вычислим, используя следствие 6 или теорему 4, явный вид ковариантного тензора инерции $J^{(\boldsymbol{q})} = \varphi_g \widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ для точек $\boldsymbol{q}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{q}_3 = (0, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{q}_4 = (\delta, 1, 0)^T$, где $0 < \delta < 1$, лежащих снаружи светового конуса:

$$J^{(\boldsymbol{q}_2)} = m_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J^{(\boldsymbol{q}_3)} = m_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{(\boldsymbol{q}_4)} = m_4 \begin{pmatrix} 1 & \delta & 0 \\ \delta & \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Из аддитивности тензора инерции получаем, что для двухточечного тела, состоящего из точек $\boldsymbol{q}_2$ и $\boldsymbol{q}_3$, ковариантный тензор инерции $J = \varphi_g \widehat{J}$ имеет вид $\mathrm{diag}(m, -m_3, -m_2)$, где $m = m_2 + m_3$, откуда оператор инерции $\widehat{J}$ имеет сигнатуру $(-, -, -)$. Для двухточечного тела, состоящего из точек $\boldsymbol{q}_2$ и $\boldsymbol{q}_4$, получаем сигнатуру $(-, +, -)$ (см. табл. 1).

Докажем третий пункт. Предположим противное, т.е. что сигнатура корректно определена, и пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — соответствующий базис пространства V (см. определение 6). В этом базисе $G = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$ и $J = \mathrm{diag}(-J_1, J_2, J_3)$. Из доказательства теоремы 5 (B) получаем, что для светового вектора $\boldsymbol{v} \neq 0$ равенство $(J\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ равносильно тому, что тело содержится в плоскости $\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$. По условию тело содержится в такой плоскости (для некоторого светового вектора $\boldsymbol{v} \neq 0$), поэтому $(J\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$, т.е. $-J_1(v^1)^2 + J_2(v^2)^2 + J_3(v^3)^2 = 0$. Если $v^2 \neq 0$, то равенство $(J\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ верно сразу для двух световых векторов $\boldsymbol{v}_\pm = (v^1, \pm v^2, v^3)$, поэтому тело содержится в каждой из двух плоскостей $\langle \boldsymbol{v}_\pm \rangle^\perp$, т.е. в их прямой пересечения, лежащей снаружи светового конуса, что противоречит условию. Таким образом, $v^2 = 0$ и аналогично $v^3 = 0$. Поэтому вектор $\boldsymbol{v} = (v^1, 0, 0) \neq 0$ не является световым, получили противоречие. □

Таким образом, в псевдо-евклидовом случае ($\eta = -1$) у «почти любого» твердого тела (а именно, удовлетворяющего условиям теоремы 5 (C)) сигнатура оператора инерции корректно определена (определение 6) и имеет вид $(-, s_2, s_3)$. В частности, первый главный момент инерции отрицателен. Также мы описали все твердые тела, у которых он равен нулю или некорректно определен (теорема 5 и предложение 2 (iii)); в случае, когда он равен нулю, два других главных момента инерции совпадают и неотрицательны. Из теоремы 5 (B) получаем также описание всех тел, оператор инерции которых имеет сигнатуру $(0, 0, 0)$, — это тела, совпадающие с началом координат.

Приведем примеры 1-, 2- и 3-точечных тел в псевдо-евклидовом пространстве, показывающие, что других ограничений на сигнатуру оператора инерции нет. Мы показали, что для тел, лежащих внутри светового конуса (например, для «тарелок» на плоскости Лобачевского), сигнатура имеет вид $(-, +, +)$ и $(0, +, +)$ (предложение 1), а для тел, лежащих снаружи светового конуса, возможны сигнатуры $(-, s_2, -)$ для всех $s_2 \in \{0, +, -\}$ (предложение 2). Сигнатура $(-, +, 0)$ реализуется, например, для двухточечного тела, состоящего из точек $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$ (из доказательства теоремы 4) равных масс, а сигнатура $(-, 0, 0)$ — для трехточечного тела, состоящего из точек $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$ и $\boldsymbol{q}_3$ равных масс, однако эти тела содержат как точки, лежащие внутри светового конуса, так и точки, лежащие снаружи него.

Рассмотренные примеры твердых тел приведены в табл. 1, с указанием ковариантного тензора инерции J и сигнатуры оператора инерции $\widehat{J}$ для каждого тела. Как следует из сказанного выше, в этой таблице содержатся все возможные сигнатуры (отличные от $(0, 0, 0)$) оператора инерции твердого тела в трехмерном псевдо-евклидовом пространстве.

Остались открытыми следующие вопросы. Какие из сигнатур $(-, +, +)$, $(-, +, 0)$, $(-, 0, 0)$ возможны для твердых тел, лежащих снаружи светового конуса? К какому виду можно привести (заменой базиса) матрицы скалярного произведения и оператора инерции, если тело имеет вид как в предложении 2 (iii)? Согласно теореме 5 и предложению 2, это в точности те тела, для которых сигнатура оператора инерции не является корректно определенной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kobb G. Sur le probleme de la rotation d'un corps autour d'un point fixe // Bull. Soc. Math. France. 1895. Vol. XXIII. P. 210–215.

2. De Donder T. Mouvement d'un solide dans un espace Riemannien, 1 and 2 // Bull. Acad. Roy. Belg. 1942. Vol. 28. P. 8–16 and 60–66.

3. Goldstein H. Classical Mechanics. — Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1950.

4. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.

5. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

6. Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.

7. Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. — М.: МЦНМО, 2007.

8. Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: Наука, 1988.

9. Винберг Э. Б. Линейные представления групп. — М.: Наука, 1985.

10. Кириллов А. А. Характеры унитарных представлений групп Ли // Функц. анализ и его прил. 1968. Т. 2, №2. С. 40–55.

11. Marsden J. E., Ratiu T. Introduction to Mechanics and Symmetry. — N.Y.: Springer-Verlag, 1999.

12. Борисов А. В., Мамаев И. С. Изоморфизмы некоторых интегрируемых систем на плоскости и сфере // Нелинейная динамика. 2007. Т. 3, №1. С. 49–56.

13. Weyl H. Space-Time-Matter. — London: E.P. Dutton and Company, 1922.

14. Blaschke W. Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik, I, II, III. — Leipzig-Berlin: B. G. Teubner, 1942. Hamburger Mathematische Einzelschriften. Vol. 34.

15. Borisov A. V. Mamaev I. S. Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // Russ. J. Math. Phys. 2016. Vol. 23. P. 431–454.

16. Killing W. Die Mechanik in den nicht-Euklidischen Raumformen // J. Reine Angew. Math. 1885. Vol. 98. P. 1–48.

17. Hölder E. Die Dynamik des starren Körpers in einem nicht-Euklidischen Raum // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, Springer Berlin Heidelberg. 1956. Vol. 20. P. 242–252.

18. Clifford W. K. Motion of a solid in elliptic space // Math. Papers, Tucker, R. (Ed.), Macmillan, London. 1882. P. 378–384.

19. Жуковский Н. Е. О движении материальной псевдосферической фигуры по поверхности псевдосферы // М.: Полн. Собр. Соч. 1937. Т. 1. С. 490-535.

20. De Francesco D., Sul moto di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante // Math. Ann. 1902. Vol. 55, №4. P. 573–584.

21. Heath R. S. On the dynamics of a rigid body in elliptic space // Philos. Trans. R. Soc. Lond. 1884. Vol. 175. P. 281–324.

22. Nagy P. T. Dynamical invariants of rigid motions on the hyperbolic plane // Geom. Dedicata. 1991. Vol. 37. P. 125–139.

23. Salvai M. On the dynamics of a rigid body in the hyperbolic space // J. Geom. Phys. 2000. Vol. 36, №1–2. P. 126–139.

24. Zitterbarth J. Some remarks on the motion of a rigid body in a space of constant curvature without external forces // Demonstratio Math. 1991. Vol. 24, №3–4. P. 465–494.

25. Буров А. А. О движении тела с плоскостью симметрии по трехмерной сфере под действием сферического аналога ньютоновского притяжения // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, №1. P. 23–34.

26. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные методы и задачи. — М.: Наука, 1968.

27. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. — М: Наука, 1986.

28. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Физматгиз, 1958. («Теоретическая физика», том I).

REFERENCES

1. Kobb, G. 1895, “Sur le probleme de la rotation d’un corps autour d’un point fixe”, *Bull. Soc. Math. France*, vol. XXIII, pp. 210–215.
2. De Donder, T. 1942, “Mouvement d’un solide dans un espace Riemannien, 1 and 2”, *Bull. Acad. Roy. Belg.*, vol. 28, pp. 8–16 and 60–66.
3. Goldstein, H. 1950, Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
4. Arnold, V. I. 1989, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer, New York.
5. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, London, N.Y., Washington.
6. Borisov, A. V., Mamaev, I. S. 2005, Rigid Body Dynamics. Hamiltonian Methods, Integrability, Chaos, Moscow, Institute of computer Science.
7. Arnold, V. I. & Khesin, B. A. 1998, Topological Methods In Hydrodynamics, Springer-Verlag, New York.
8. Vinberg, E. B. & Onishchik, A. L. 1990, Lie Groups and Algebraic Groups, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
9. Vinberg, E. B. 1989, Linear Representations of Groups, Basler Lehrbücher, Birkhäuser, Basel.
10. Kirillov, A. A. 1968, “The characters of unitary representations of Lie groups”, *Functional Analysis and its Applications*, vol. 2, no. 2, pp. 133–146.
11. Marsden, J. E. & Ratiu, T. 1999, Introduction to Mechanics and Symmetry, Springer-Verlag, New York.
12. Borisov, A. V., Mamaev, I. S. 2007, “On isomorphisms of some integrable systems on a plane and a sphere” [in Russian], *Russ. J. Nonlin. Dyn.*, vol. 3, no. 1, pp. 49–56.
13. Weyl, H. 1922, Space-Time-Matter, E.P. Dutton and Company, London.
14. Blaschke, W. 1942, Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik, I, II, III, Hamburger Mathematische Einzelschriften, vol. 34, B. G. Teubner, Leipzig-Berlin.
15. Borisov, A. V., Mamaev, I. S. 2016, “Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces”, *Russ. J. Math. Phys.*, vol. 23, pp. 431–454.
16. Killing, W. 1885, “Die Mechanik in den nicht-Euklidischen Raumformen”, *J. Reine Angew. Math.*, vol. 98, pp. 1–48.
17. Hölder, E. 1956, “Die Dynamik des starren Körpers in einem nicht-Euklidischen Raum”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, Springer Berlin Heidelberg, vol. 20, pp. 242–252.
18. Clifford, W. K. 1882, “Motion of a solid in elliptic space”, in: Math. Papers, Tucker, R. (Ed.), Macmillan, London, pp. 378–384.

19. Zhukovsky, N. E. 1937, On the motion of a material pseudospherical figure on the surface of a pseudosphere [in Russian], *Pol. Sobr. Soch.*, vol. 1, pp. 490–535 [the original in Trudy Otdel. Fiz. Nauk Obshch. Lyubit. Estestvozn., Antropol. Etnogr. XI (2), 1902].

20. De Francesco, D. 1902, "Sul moto di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante", *Math. Ann.*, vol. 55, pp. 573–584.

21. Heath, R. S. 1884, "On the dynamics of a rigid body in elliptic space", *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, vol. 175, pp. 281–324.

22. Nagy, P. T. 1991, "Dynamical invariants of rigid motions on the hyperbolic plane", *Geom. Dedicata*, vol. 37, pp. 125–139.

23. Salvai, M. 2000, "On the dynamics of a rigid body in the hyperbolic space", *J. Geom. Phys.*, vol. 36, no. 1–2, pp. 126–139.

24. Zitterbarth, J. 1991, "Some remarks on the motion of a rigid body in a space of constant curvature without external forces", *Demonstratio Math.*, vol. 24, no. 3–4, pp. 465–494.

25. Burov, A. A. 2008, "Motion of a body with a plane of symmetry on a three-dimensional sphere under the action of a spherical analog of Newtonian attraction", *Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 72, no. 1, pp. 23–34.

26. Duboshin, G. N. 1969, Celestial Mechanics. Basic Problems and Methods [in Russian], Nauka, Moscow [Translation Div., Wright-Patterson Air-Force Base, Fairborn, Ohio].

27. Kostrikin, A. I. & Manin, Yu. I. 1989, Linear Algebra and Geometry, CRC Press, London.

28. Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. 1976, Mechanics, Volume 1 of Course of Theoretical Physics, Butterworth-Heinemann, Oxford.

Получено: 02.01.2025
Принято в печать: 07.04.2025