

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 2.

УДК 519.173.5

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-218-231

Центральности в классических графах и зависимости между ними

М. А. Тужилин

Тужилин Михаил Алексеевич — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: mtu93@mail.ru

Аннотация

В статье доказываются оценки зависимостей между средним кластерным коэффициентом и глобальным кластерным коэффициентом, центральностью по близости, центральностью по посредничеству и центральностью напряжения для простых графов. Также уточняется теорема о зависимости между средним кластерным коэффициентом и радиальной центральностью и проводится подсчет этих центральностей для 3-х бесконечных серий классических графов.

Ключевые слова: сети, центральности, локальные и глобальные характеристики графов, кластерный коэффициент Уоттса–Строгаца, глобальный кластерный коэффициент.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Тужилин М.А. Центральности в классических графах и зависимости между ними // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 218–231.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 2.

UDC 519.173.5

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-218-231

Centralities in classical graphs and relations between them

М. А. Tuzhilin

Tuzhilin Mikhail Alekseevich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: mtu93@mail.ru

Abstract

In the paper relations between average clustering coefficient and global clustering coefficient, closeness, betweenness and stress centralities were proved for simple graphs. Also the theorem about the relation between average clustering coefficient and radially is clarified and these centralities are calculated for 3 classical series of graphs.

Keywords: networks, centralities, local and global properties of graphs, Watts–Strogatz clustering coefficient, global clustering coefficient.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Tuzhilin, M. A. 2025, “Centralities in classical graphs and relations between them”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 218–231.

1. Введение

Бонакич в статье [1] ввел понятие центральностей, как локальных (по отношению к вершине) или глобальных (по отношению ко всему графу) характеристик графов. Известно множество различных центральностей: локальная эффективность, радиальная центральность, максимальная центральность клики, центральность по близости, центральность по посредничеству, центральность напряжения и др. Анализ центральностей в графах используется для нахождения скрытых характеристик в “реальных” — прикладных задачах [2]–[6]. Одной из таких важнейших центральностей является кластерный коэффициент, который отличает сети, встречающиеся в “реальных” задачах (сети малого мира), от случайно сгенерированных сетей [7].

Известно два определения кластерного коэффициента: средний кластерный коэффициент, или коэффициент Уоттса – Строгаца [7] и глобальный кластерный коэффициент [8]. На примере графов-мельниц было показано [9], что в пределе средний кластерный коэффициент и глобальный кластерный имеют разную асимптотику при увеличении числа вершин графа, а именно, средний кластерный коэффициент стремится к 1, а глобальный кластерный коэффициент — к 0. В данной статье приводится посчет этих коэффициентов также для графов колес [10]–[12] и вложенных треугольников [13]–[14]. Для этих классических графов и для многих других оказывается, что средний кластерный коэффициент больше глобального кластерного коэффициента. В данной статье доказывается теорема об обратной оценке и приводится серия графов, для которых средний кластерный коэффициент меньше глобального кластерного коэффициента. Также доказываются теоремы о зависимости между средним кластерным коэффициентом и другими центральностями, а также эти центральности считаются для этих 3-х серий классических графов, включая графы-мельницы.

В данной статье уточняется теорема, полученная в [15], о зависимости между средним кластерным коэффициентом и радиальной центральностью для случая радиальной центральности, определенной на замкнутой окрестности вершины.

2. Основные определения.

Все последующие определения даются для простого неориентированного графа G без висячих вершин. Также их можно расширить для простого графа с висячими вершинами, если во всех определениях функций, где (степень вершины -1) участвует в знаменателе, доопределить эти функции равными 0 для случая, когда степень вершины равна 1, но в данной статье это будет опущено для краткости.

Введем необходимые обозначения. Обозначим через

- $V(G)$ множество вершин графа, $E(G)$ множество ребер графа, $A = \{a_{ij}\}$ матрицу смежности графа G ,
- $N(v)$ множество вершин, смежных с вершиной v ,
- $N'(v)$ индуцированный подграф в графе G на вершинах $V(N(v)) \cup \{v\}$,
- $\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_k)$, для любой функции $f : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ограничение этой функции на подграф $N'(v)$ (например $\bar{L}(x, y)$ — среднее кратчайшее расстояние между вершинами x и y в подграфе $N'(v)$),
- $d_i = \deg(v_i)$,
- $n = \|V(G)\|$, $m = \|E(G)\|$,

- $X(i) = X(v_i)$ для любого X — функции или множества, соответствующего вершине v_i .

Дадим определения центральностей.

(1) **Диаметр графа** $\text{diam}(G) = \max_{s,t \in V(G)} \text{dist}(s, t)$.

(2) **Длина среднего кратчайшего пути в графе** $L(G) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{s,t \in V(G), s \neq t} \text{dist}(s, t)$.

(3) **Локальный кластерный коэффициент**

$$c_i = c(i) = \frac{\text{число ребер в подграфе } N(i)}{\text{максимально возможное число ребер в подграфе } N(i)} = \frac{2\|E(N(i))\|}{d_i(d_i-1)}.$$

(4) **Средний кластерный коэффициент графа**

$$C_{WS}(G) = \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} c_i = \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \frac{2\|E(N(i))\|}{d_i(d_i-1)} = \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \frac{\sum_{j,k \in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}}{d_i(d_i-1)}.$$

(5) **Глобальный кластерный коэффициент графа**

$$C(G) = \frac{\text{число замкнутых триплетов в графе } G}{\text{число всех триплетов в } G} = \frac{\sum_{i,j,k \in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}}{\sum_{i \in V(G)} d_i(d_i-1)}.$$

(6) **Центральности по посредничеству** $BC(i) = \sum_{s,t \in V(G), s \neq t \neq i} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}}$, где σ_{st} — число кратчайших путей из вершины s в t , и $\sigma_{st}(i)$ — число кратчайших путей из s в t через вершину i .

(7) **Центральность по близости** $\text{Clo}(v) = \frac{n-1}{\sum_{t \in V(G)} \text{dist}(v, t)}$.

(8) **Радиальная центральность** $\text{Rad}(v) = \frac{\sum_{t \in V(G), t \neq v} (\text{diam}(G)+1-\text{dist}(v, t))}{n-1}$.

(9) **Центральность напряжения** $\text{Str}(i) = \sum_{s,t \in V(G), s \neq t \neq i} \sigma_{st}(i)$, где $\sigma_{st}(i)$ — число кратчайших путей из s в t через вершину i .

Заметим, что все центральности неотрицательные, а также все кластерные коэффициенты $c_i, C_{WS}, C(G)$ меньше либо равны 1.

Для сравнения среднего кластерного коэффициента и других центральностей, определим “локальные” средний кратчайший путь, центральность по посредничеству и радиальную центральность следующим образом. Обозначим через

(1) $L(N(i)) = \frac{1}{d_i(d_i-1)} \sum_{v,w \in N(i)} \text{dist}(v, w)$ — среднее кратчайшее расстояние для вершин окрестности $N(i)$, где кратчайшее расстояние определено в объемлющем графе G ,

(2) $BC(i, N(i)) = \sum_{s,t \in N(i), s \neq t} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}}$ — центральность по посредничеству для вершин окрестности $N(i)$, где кратчайшие расстояния рассматриваются по отношению к объемлющему графу G ,

(3) $\text{Rad}(v, N(i)) = \frac{\sum_{t \in N(i), t \neq v} (\text{diam}(N(i))+1-\text{dist}(v, t))}{d_i-1}$ — радиальную центральность для вершин окрестности $v \in N(i)$, где кратчайшее расстояние и диаметр определены в объемлющем графе G .

3. Три серии классических графов.

Посчитаем центральности для 3-х бесконечных серий графов:

(1) **Графы-мельницы.**

Графом-мельницей $W(n, k)$ называется граф, полученный из n копий полного графа K_k и одной центральной вершины, которая смежна с каждой этих графов (см. рисунок 1).

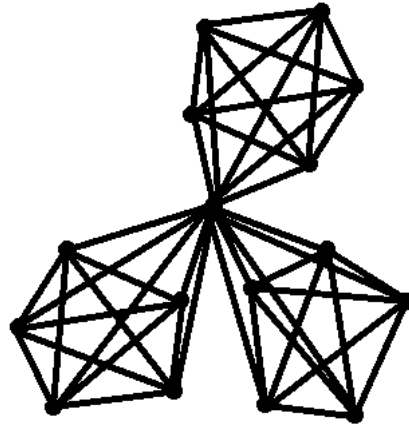


Рис. 1: Граф-мельница $W(3, 5)$.

Для такого графа ввиду симметрии для каждой нецентральной вершины все центральности будут одинаковы. Посчитаем основные из них:

- (a) $\text{diam}(W(n, k)) = 2$,
- (b) Число кратчайших путей, проходящих через центральную вершину, с началом в любой другой равно $(n-1)k$, а также между любыми двумя вершинами существует единственный кратчайший путь, поэтому

$$BC(i, N(i)) = \text{Str}(i) = \begin{cases} n(n-1)k^2 & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ 0 & \text{в ост.} \end{cases}$$

- (c) $c_i = \begin{cases} \frac{k-1}{nk-1} & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ 1 & \text{в ост.} \end{cases}$

- (d) Расстояние между вершинами внутри одного полного графа равно 1, а между вершинами в разных полных графах равно 2, поэтому для центральной вершины i локальное среднее кратчайшее расстояние $L(N(i)) = \frac{nk(1 \cdot (k-1) + 2 \cdot (n-1)k)}{nk(nk-1)} = \frac{k-1+2nk-2k}{nk-1} = \frac{2nk-k-1}{nk-1}$, поэтому

$$L(N(i)) = \begin{cases} \frac{2nk-k-1}{nk-1} & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ 1 & \text{в ост.} \end{cases}$$

- (e) $\text{Clo}(i) = \begin{cases} 1 & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ \frac{nk}{2nk-k-1+1} = \frac{n}{2n-1} & \text{в ост.} \end{cases}$

- (f) $\text{Rad}(v) = \text{diam}(G) + 1 - \frac{1}{\text{Clo}(v)} = \begin{cases} 2 & \text{если } v \text{ центральная вершина,} \\ 3 - \frac{2n-1}{n} = \frac{n+1}{n} & \text{в ост.} \end{cases}$

- (g) Если i центральная вершина, то диаметр $N(i)$ определенный по отношению ко всему графу равен $\text{diam}(N(i)) = 2$, поэтому

$$\text{Rad}(v, N(i)) = \begin{cases} 3 - \frac{2nk-k-1}{nk-1} = 1 + \frac{k-1}{nk-1} & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ 1 & \text{в ост.} \end{cases}$$

- (h) Если i центральная вершина, $N'(i) = W(n, k)$, поэтому

$$\overline{\text{Rad}}(v) = \begin{cases} \text{Rad}(v) & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ 1 & \text{в ост.} \end{cases}$$

(2) **Графы колеса.**

Графом колеса $W(k)$ называется граф, полученный из кольца $k \geq 5$ вершин добавлением центральной вершины, смежной с каждой из этих вершин (см. рисунок 2).

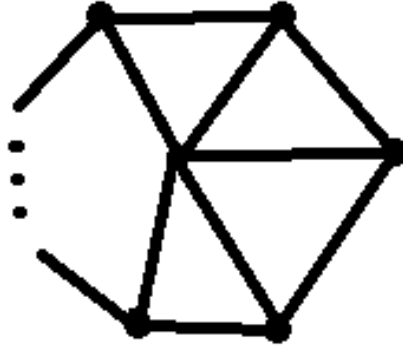


Рис. 2: Граф колеса $W(k)$.

Для такого графа также ввиду симметрии для всех нецентральных вершин все центральности будут одинаковы. Посчитаем их для графа колеса:

- (a) $\text{diam}(W(k)) = 2$,
 (b) Число кратчайших путей, проходящих через центральную вершину, с началом в любой другой равно $k - 3$ (ко всем, кроме соседних). Также между вершинами кольца через одну существует 1 кратчайший путь в одну сторону и один в обратную, поэтому

$$\text{Str}(i) = \begin{cases} k(k-3) & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ 2 & \text{в ост.} \end{cases}$$

- (c) $c_i = \begin{cases} \frac{2}{k-3} & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ \frac{1}{3} & \text{в ост.} \end{cases}$

- (d) Для центральной вершины i , $BC(i, N(i)) = \sum_{s,t \in N(i), s \neq t} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}} = \sum_{t \in N(i)} 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot (k-5) = k(k-4)$. Для нецентральной вершины $N(i)$ является не замкнутым триплетом и между нецентральными существует 2 кратчайших пути в $W(k)$, поэтому

$$BC(i, N(i)) = \begin{cases} k(k-4) & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ 1 & \text{в ост.} \end{cases}$$

- (е) Расстояние между нецентральными вершинами равно 1 (для смежных) и 2 для остальных, среднее кратчайшее расстояние

$$L(N(i)) = \begin{cases} \frac{k(1 \cdot 2 + 2 \cdot (k-3))}{k(k-1)} = \frac{2k-4}{k-1} & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ \frac{1}{6}(2 \cdot 2 + 1 \cdot 4) = \frac{4}{3} & \text{в ост.} \end{cases}$$

$$(f) \text{ Clo}(i) = \begin{cases} 1 & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ \frac{k}{2k-4+1} = \frac{k}{2k-3} & \text{в ост.} \end{cases}$$

$$(g) \text{ Rad}(v) = \begin{cases} 2 & \text{если } v \text{ центральная вершина,} \\ 3 - \frac{2k-3}{k} = \frac{k+3}{k} & \text{в ост.} \end{cases}$$

- (h) Диаметр $N(i)$ определенный по отношению ко всему графу равен $\text{diam}(N'(i)) = 2$ для любой i , поэтому

$$\text{Rad}(v, N(i)) = \begin{cases} 3 - \frac{2k-4}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1} & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ \frac{3}{2} \text{ либо } 2 & \text{в ост.} \end{cases}$$

- (i) Если i центральная вершина, $N'(i) = W(k)$, поэтому

$$\overline{\text{Rad}}(v) = \begin{cases} \text{Rad}(v) & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ \frac{5}{3} \text{ либо } 2 & \text{в ост.} \end{cases}$$

(3) Графы вложенных треугольников.

Графом вложенных треугольников $T(n)$ называется граф, полученный из n вложенных треугольников вершины которых соединяются с соответствующими вершинами последующего треугольника (см. рисунок 3).

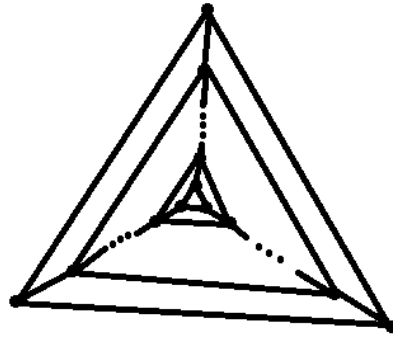


Рис. 3: Граф вложенных треугольников $T(n)$.

Для такого графа также ввиду симметрии для всех вершин одного треугольника все центральности будут одинаковы. Нам эта серия понадобится для сравнения кластерных коэффициентов, поэтому посчитаем только их

$$(a) \text{ diam}(T(n)) = n,$$

$$(b) c_i = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{для вершин } i \text{ 1-го и } n\text{-го треугольников,} \\ \frac{1}{6} & \text{в ост.} \end{cases}$$

$$(c) C(T(n)) = \frac{6}{\frac{1}{2}(36+36n)} = \frac{1}{3(n+1)},$$

$$(d) C_{WS}(T(n)) = \frac{1}{3(n+2)} \left(6 \frac{1}{3} + 3n \frac{1}{6} \right) = \frac{n+4}{6(n+2)}.$$

4. Средний кластерный коэффициент и глобальный кластерный коэффициент.

Сравним средний кластерный коэффициент и глобальный кластерный коэффициент для этих 3-х серий.

- (1) Для графов-мельниц в статье [9] доказывается, что $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{WS}(W(n, k)) = 1$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} C(W(n, k)) = 0$. Покажем также, что $C_{WS}(W(n, k)) > C(W(n, k))$. Сравним эти коэффициенты:

$$\begin{aligned} & C_{WS}(W(n, k)) \vee C(W(n, k)) \\ & \frac{3n \left(\frac{k(k-1)}{2} + \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \right)}{\frac{1}{2}(nk^2(k-1) + nk(nk-1))} = \frac{k-1 + n^2k^2 - nk}{n^2k^2 - 1} \vee \frac{1}{nk+1} \left(\frac{k-1}{nk-1} + nk \right) = \frac{k^2 - 1}{k^2 - k + nk - 1} \\ & \quad k^3n^3 - k^3n^2 - k^3n - k^2n^2 + 2k^2n + k^3 - k^2 \vee 0 \\ & \quad k^2(n-1)^2(k(n-1)-1) \vee 0 \end{aligned}$$

Для $n \geq 2$ и $k \geq 2$: $k^2(n-1)^2(k(n-1)-1) > 0$. Следовательно, $C_{WS}(W(n, k)) > C(W(n, k))$.

- (2) Для графов колес глобальный кластерный коэффициент $C(W(k)) = \frac{3k}{\frac{1}{2}(6k+k(k-1))} = \frac{6}{k+5}$, и средний кластерный коэффициент $C_{WS}(W(k)) = \frac{1}{k+1} \left(\frac{2n}{k(k-1)} + \frac{2}{3}k \right) = \frac{2(k^2-k+3)}{3(k^2-1)}$, следовательно $\lim_{k \rightarrow \infty} C_{WS}(W(k)) = \frac{2}{3}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} C(W(k)) = 0$. Сравним эти коэффициенты:

$$\begin{aligned} & C_{WS}(W(k)) \vee C(W(k)), \\ & \frac{2(k^2 - k + 3)}{3(k^2 - 1)} \vee \frac{6}{k + 5}, \\ & \quad k^3 - 5k^2 - 2k + 24 \vee 0 \\ & \quad (k^2 - k + 3)(k + 5) \vee 9(k^2 - 1) \\ & \quad (k + 2)(k - 3)(k - 4) > 0 \end{aligned}$$

Поэтому $C_{WS}(W(k)) > C(W(k))$.

- (3) Для графов вложенных треугольников $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{WS}(T(n)) = \frac{1}{6}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} C(T(n)) = 0$. Сравним эти коэффициенты:

$$\begin{aligned} & C_{WS}(T(n)) \vee C(T(n)) \\ & \quad n^2 + 5n + 4 \vee 2n + 4 \\ & \quad n(n + 3) > 0 \end{aligned}$$

Поэтому, $C_{WS}(T(n)) > C(T(n))$.

Мы видим, что для классических графов мельниц, колес, вложенных треугольников и многих других графов $C_{WS}(G) > C(G)$. Докажем, теорему о том, когда выполняется обратное неравенство

ТЕОРЕМА 1. Если в графе G выполнено $\forall i \leq j : d_i \leq d_j \Rightarrow c_i \leq c_j$, то

$$C_{WS}(G) \leq C(G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перенумеруем вершины в графе так, что $\forall i \leq j : d_i \leq d_j$. Заметим, что

$$c_i = \frac{\sum_{j,k \in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}}{d_i(d_i - 1)}, \quad C(G) = \frac{\sum_{i,j,k \in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}}{\sum_{i \in V(G)} d_i(d_i - 1)}.$$

Действительно,

$$a_{ij}a_{jk}a_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{если между вершинами } j \text{ и } k, \text{ смежными с вершиной } i, \text{ есть ребро,} \\ 0 & \text{в ост.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$C_{WS}(G) = \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \frac{\sum_{j,k \in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}}{d_i(d_i - 1)}.$$

Обозначим $x_i = d_i(d_i - 1)$. Так как $\|E(N(i))\| = \frac{1}{2} \sum_{j,k \in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}$ и максимальное число ребер в подграфе $N(i)$ равно $\frac{d_i(d_i-1)}{2}$, то $x_i \geq 2$, $0 \leq c_i \leq 1$. Тогда, используя неравенство Чебышёва ($d_i \leq d_j \Rightarrow x_i \leq x_j$ и $c_i \leq c_j$):

$$\frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} x_i C_{WS}(G) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} x_i\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} c_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} x_i c_i = \frac{1}{n} \sum_{i,j,k \in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}.$$

Следовательно,

$$C_{WS}(G) \leq \frac{\sum_{i,j,k \in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}}{\sum_{i \in V(G)} d_i(d_i - 1)} = C(G).$$

Равенство достигается, когда $\forall i, j \in V(G) : d_i = d_j$, то есть для графа, у которого все степени вершин равны (регулярного графа). Если же существуют $i, j : d_i < d_j$ и $c_i < c_j$, то неравенство будет строгим. \square

С помощью этой теоремы легко строится пример серий графов, когда для которых $C_{WS}(G) < C(G)$. Рассмотрим два таких примера:

- (1) возьмем полный граф K_n и подклеим к n его ребрам цикл длины 4,
- (2) возьмем полный граф K_n и подклеим к каждой его вершине цикл длины 4.

Для таких графов выполнено $d_i > 2$ и $c_i > 0$, если i — вершина полного графа, $d_i = 2$, $c_i = 0$ для остальных вершин. Следовательно, по предыдущей теореме $C_{WS}(G) < C(G)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в графе G выполнено $\forall i \leq j : d_i \leq d_j \Rightarrow c_i \geq c_j$, то

$$C_{WS}(G) \geq C(G).$$

Доказательство такое же, как и в предыдущей теореме.

5. Зависимости между остальными центральностями.

Докажем теорему о связи среднего кластерного коэффициента и центральности напряжения.

ТЕОРЕМА 2.

$$C_{WS}(G) \geq \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \left(1 - \frac{\text{Str}(i)}{d_i(d_i - 1)}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\forall j, k \in N(i) : (j, k) \notin E(N(i))$ кратчайшее расстояние между j и k — это $j \rightarrow i \rightarrow k$. Тогда,

$$\begin{aligned} \text{Str}(i) &\geq 2 \left(\frac{d_i(d_i - 1)}{2} - \|E(N(i))\| \right), \\ \frac{1}{d_i(d_i - 1)} \text{Str}(i) &\geq 1 - c_i, \end{aligned}$$

Усреднением по i получаем:

$$C_{WS}(G) \geq \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \left(1 - \frac{\text{Str}(i)}{d_i(d_i - 1)}\right).$$

Заметим, что равенство достигается, если $\text{diam}(G) = 2$. \square

ПРИМЕР 8. Для графов-мельниц и графов колес $\text{diam}(G) = 2$, поэтому $C_{WS}(G) = \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \left(1 - \frac{\text{Str}(i)}{d_i(d_i - 1)}\right)$, а также $\text{Str}(i) = d_i(d_i - 1)(1 - c_i)$.

Действительно $\frac{1}{nk+1} \left(1 - \frac{n(n-1)k^2}{nk(nk-1)} + nk\right) = \frac{nk-1-(n-1)k+n^2k^2-nk}{n^2k^2-1} = \frac{k-1+n^2k^2-nk}{n^2k^2-1}$ для графов-мельниц и $\frac{1}{k+1} \left(1 - \frac{k(k-3)}{k(k-1)} + k\left(1 - \frac{2}{6}\right)\right) = \frac{3(k-1)-3(k-3)+2k(k-1)}{3(k^2-1)} = \frac{2(k^2-k+3)}{3(k^2-1)}$ для графов колес.

Докажем теорему о связи среднего кластерного коэффициента и локальной центральности по посредничеству.

ТЕОРЕМА 3.

$$C_{WS}(G) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \left(1 - \frac{\text{BC}(i, N(i))}{d_i(d_i - 1)}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\begin{aligned} \text{BC}(i, N(i)) &= \sum_{j, k \in N(i), (j, k) \notin E(N(i))} \frac{1}{\sigma_{jk}} \leq \sum_{j, k \in N(i), (j, k) \notin E(N(i))} 1 = d_i(d_i - 1) - 2\|E(N(i))\|, \\ \frac{\text{BC}(i, N(i))}{d_i(d_i - 1)} &\leq 1 - c_i. \end{aligned}$$

Усреднением по i получаем:

$$C_{WS}(G) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \left(1 - \frac{\text{BC}(i, N(i))}{d_i(d_i - 1)}\right).$$

Заметим, что равенство достигается, если между любыми двумя вершинами в $N(i)$ существует единственный кратчайший путь, это значит что не существует кратчайших путей длины 2 в графе $N(i)$, следовательно $N(i)$ — объединение полных графов для любой вершины i . \square

ПРИМЕР 9. Для графов мельниц $N(i)$ — объединение полных графов для любой вершины i , поэтому $C_{WS}(W(n, k)) = \frac{1}{\|W(n, k)\|} \sum_{i \in V(W(n, k))} \left(1 - \frac{BC(i, N(i))}{d_i(d_i - 1)}\right)$. Действительно, $BC(i, N(i)) = \text{Str}(i) = d_i(d_i - 1)(1 - c_i)$. Для графов колес $\frac{1}{\|W(k)\|} \sum_{i \in V(W(k))} \left(1 - \frac{BC(i, N(i))}{d_i(d_i - 1)}\right) = \frac{1}{k+1} \left(1 - \frac{k(k-4)}{k(k-1)} + k\left(1 - \frac{1}{6}\right)\right) = \frac{6(k-1) - 6(k-4) + 5(k^2 - k)}{6(k^2 - 1)} = \frac{5(k^2 - k + 18)}{6(k^2 - 1)} > \frac{2(k^2 - k + 3)}{3(k^2 - 1)} = C_{WS}(W(k))$.

Из этих двух теорем получаем оценку для среднего кратчайшего расстояния в окрестности вершины i .

СЛЕДСТВИЕ 2.

$$\frac{BC(i, N(i))}{d_i(d_i - 1)} \leq L(N(i)) - 1 \leq \frac{\text{Str}(i)}{d_i(d_i - 1)}.$$

ПРИМЕР 10. Для графов мельниц $L(N(i)) - 1 = \begin{cases} \frac{k(n-1)}{nk-1} & \text{если } i \text{ центральная,} \\ 0 & \text{в ост.} \end{cases} = \frac{\text{Str}(i)}{d_i(d_i - 1)}$.

Для графов колес получаем верное неравенство

$$\begin{cases} \frac{k-4}{k-1} < \frac{2k-4}{k-1} - 1 = \frac{k-3}{k-1} & \text{если } i \text{ центральная,} \\ \frac{1}{6} < \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} & \text{в ост.} \end{cases}$$

Докажем лемму о связи средней центральности по близости и среднего кратчайшего расстояния в графе.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.

$$\frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} \text{Clo}(v) \geq \frac{1}{L(G)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся неравенством о среднем гармоническом и арифметическом:

$$\frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} \text{Clo}(v) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} \frac{n-1}{\sum_{t \in V(G)} \text{dist}(v, t)} \geq \frac{n(n-1)}{\sum_{v, t \in V(G)} \text{dist}(v, t)} = \frac{1}{L(G)}.$$

Заметим, что равенство выполнено, когда все средние кратчайшие расстояния от каждой вершины до всех других равны. \square

ПРИМЕР 11. Для графов мельниц получаем $L(W(n, k)) = \frac{1 \cdot nk + nk(2nk - k - 1 + 1)}{(nk+1)nk} = \frac{2nk - k + 1}{nk+1}$.

Тогда $\frac{1}{\|W(n, k)\|} \sum_{v \in W(n, k)} \text{Clo}(v) = \frac{1 + \frac{nk^2}{2n-1}}{nk+1} = \frac{n^2k + 2n - 1}{(nk+1)(2n-1)} \vee \frac{nk+1}{2nk - k + 1}$. После приведения слагаемых

получаем $k(n-1)^2 > 0$ при $n > 1$. Для графов колес $L(W(k)) = \frac{1 \cdot k + k(2k - 4 + 1)}{(k+1)k} = \frac{2(k-1)}{k+1}$. Тогда,

$\frac{1}{\|W(k)\|} \sum_{v \in W(k)} \text{Clo}(v) = \frac{1 + \frac{k^2}{2k-3}}{k+1} = \frac{(k-1)(k+3)}{(k+1)(2k-3)} \vee \frac{k+1}{2(k-1)}$. После приведения слагаемых получаем $(k-3)^2 > 0$ при $k > 3$.

ТЕОРЕМА 4.

$$C_{WS}(G) = \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \left(\frac{1}{d_i} \sum_{v \in N(i)} \text{Rad}(v, N(i)) - 1 \right) + \frac{\#\{N(i) \text{ явл. полными графами}\}}{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В статье [15] доказывалась лемма о связи среднего кратчайшего расстояния с средней радиальной центральностью.

ЛЕММА 1.

$$\frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} \text{Rad}(v) = \text{diam}(G) + 1 - L(G).$$

Воспользуемся этой леммой.

$$\frac{1}{d_i} \sum_{v \in N(i)} \text{Rad}(v, N(i)) = \text{diam}(N(i)) + 1 - L(N(i)) = \text{diam}(N(i)) - 1 + c_i = c_i + 1 - \chi_{K_{d_i}}(N(i)),$$

где $\chi_{K_{d_i}}(N(i)) = \begin{cases} 1 & \text{если } N(i) = K_{d_i}, \\ 0 & \text{в ост.} \end{cases}$. Усреднением этого равенства по i заканчиваем доказательство. \square

Докажем теорему о среднем кратчайшем расстоянии в объемлющем графе.

ТЕОРЕМА 5. Пусть связный простой граф G' получен из графа G добавлением одной вершины и $\|V(G)\| = n$. Тогда

$$L(G') \geq \frac{n}{n+1} L(G),$$

где $L(G)$ считается по отношению к объемлющему графу G' , если G не связен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим добавленную вершину за v . Тогда по неравенству треугольника $\forall s, t \in V(G) : \text{dist}(s, v) + \text{dist}(v, t) \geq \text{dist}(s, t)$, где равенство достигается, когда между s и t не существует пути в G . Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{s, t \in V(G), s \neq t} (\text{dist}(s, v) + \text{dist}(v, t)) &\geq \sum_{s, t \in V(G), s \neq t} \text{dist}(s, t) \\ \frac{2(n-1)}{n(n-1)} \sum_{t \in V(G)} \text{dist}(v, t) &\geq \frac{1}{n(n-1)} \sum_{s, t \in V(G), s \neq t} \text{dist}(s, t) \\ \frac{2}{n} \sum_{t \in V(G)} \text{dist}(v, t) &\geq L(G) \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} L(G') &= \frac{1}{(n+1)n} \sum_{s, t \in V(G'), s \neq t} \text{dist}(s, t) = \frac{1}{(n+1)n} \left(2 \sum_{t \in V(G)} \text{dist}(v, t) + \sum_{s, t \in V(G), s \neq t} \text{dist}(s, t) \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{2}{n} \sum_{t \in V(G)} \text{dist}(v, t) + \frac{n-1}{n+1} L(G) \geq \frac{n}{n+1} L(G) \end{aligned}$$

Заметим, что равенство достигается, когда G состоит из n изолированных вершин. \square

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть связный простой граф G' получен из графа G добавлением k вершин и $\|V(G)\| = n$. Тогда

$$L(G') \geq \frac{n}{n+k} L(G),$$

где $L(G)$ считается по отношению к объемлющему графу G' , если G не связен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем добавлять последовательно вершины к графу G . Обозначим граф, получившийся на i -ом шаге за G_i , тогда по предыдущей теореме

$$L(G') \geq \frac{n+k-1}{n+k} L(G_{k-1}) \geq \frac{n+k-1}{n+k} \frac{n-k-2}{n-k-1} L(G_{k-2}) = \frac{n-k-2}{n+k} L(G_{k-2}) \geq \dots \geq \frac{n}{n+k} L(G)$$

\square

Уточним теорему о связи среднего кластерного коэффициента и средней радиальной центральностью из статьи [15].

ТЕОРЕМА 6.

$$C_{WS}(G) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \left(\frac{1}{d_i} \sum_{v \in N(i)} \overline{\text{Rad}}(v) \right) + \frac{\#\{N(i) \text{ явл. полными графами}\}}{n}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в теореме 4, используя предыдущую теорему, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_i} \sum_{v \in N(i)} \overline{\text{Rad}}(v) &= \text{diam}(N'(i)) + 1 - \frac{1}{d_i^2} \sum_{v \in N(i)} \sum_{t \in N(i), t \neq v} \text{dist}(s, t) - \frac{1}{d_i} \sum_{t \in N(i)} \text{dist}(i, t) = \\ &= 3 - \chi_{K_{d_i}}(N(i)) - \frac{d_i - 1}{d_i} L(N(i)) - 1 \geq 2 - L(N(i)) - \chi_{K_{d_i}}(N(i)). \end{aligned}$$

По лемме из статьи [15]: $2 - L(N(i)) = c_i$, и усреднением по i заканчиваем доказательство. \square

ПРИМЕР 12. Для графов-мельниц

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|W(n, k)\|} \sum_{i \in V(G)} \left(\frac{1}{d_i} \sum_{v \in N(i)} \text{Rad}(v, N(i)) - 1 \right) + \frac{\#\{N(i) \text{ явл. полными графами}\}}{\|W(n, k)\|} = \\ &= \frac{1}{nk+1} \left(\frac{nk(1 + \frac{k-1}{nk-1})}{nk} - 1 + nk \left(\frac{k}{k} - 1 \right) \right) + \frac{nk}{nk+1} = \frac{k-1 + n^2k^2 - nk}{n^2k^2 - 1} = C_{WS}(W(n, k)), \\ &\frac{1}{\|W(n, k)\|} \sum_{i \in V(G)} \left(\frac{1}{d_i} \sum_{v \in N(i)} \overline{\text{Rad}}(v) \right) + \frac{\#\{N(i) \text{ явл. полными графами}\}}{\|W(n, k)\|} = \\ &= \frac{1}{nk+1} \left(\frac{nk}{nk} \frac{n+1}{n} + \frac{nk^2}{k} \right) + \frac{nk}{nk+1} = \frac{n+1 + n^2k}{n(nk+1)} \vee \frac{k-1 + n^2k^2 - nk}{n^2k^2 - 1} \\ &\quad n^3k^2 + nk - n - 1 \vee n^3k^2 - n^2k + nk - n \end{aligned}$$

Учитывая, что $n^2k > 1$ получаем верное неравенство.

Для графов колес

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|W(k)\|} \sum_{i \in V(G)} \left(\frac{1}{d_i} \sum_{v \in N(i)} \text{Rad}(v, N(i)) - 1 \right) + \frac{\#\{N(i) \text{ явл. полными графами}\}}{\|W(k)\|} = \\ &= \frac{1}{k+1} \left(\frac{k(1 + \frac{2}{k-1})}{k} - 1 + k \left(\frac{5}{3} - 1 \right) \right) + 0 = \frac{2(k^2 - k + 3)}{3(k^2 - 1)} = C_{WS}(W(k)), \\ &\frac{1}{\|W(k)\|} \sum_{i \in V(G)} \left(\frac{1}{d_i} \sum_{v \in N(i)} \overline{\text{Rad}}(v) \right) + \frac{\#\{N(i) \text{ явл. полными графами}\}}{\|W(k)\|} = \\ &= \frac{1}{k+1} \left(\frac{k}{k} \frac{k+3}{k} + \frac{16k}{9} \right) = \frac{16k^2 + 9k + 27}{k(k+1)} \vee \frac{2(k^2 - k + 3)}{3(k^2 - 1)} \end{aligned}$$

После приведения слагаемых получим $46k^3 - 19k^2 + 48k - 81 = 27k^3 + 19k(k-1) + 48(k-2) + 15 > 0$, при $k \geq 2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bonacich P. Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification // *Journal of mathematical sociology*. 1972. Vol. 2, no. 1. P. 113-120.
2. Borgatti S.P., Everett M.G. A graph-theoretic perspective on centrality // *Social networks*. 2006. Vol. 28, no. 4. P. 466-484.
3. Kiss C., Bichler M. Identification of influencers - measuring influence in customer networks // *Decision Support Systems*. 2008. Vol. 46, no. 1. P. 233-253.
4. Lee S.H.M., Cotte J., Noseworthy T.J. The role of network centrality in the flow of consumer influence // *Journal of Consumer Psychology*. 2010. Vol. 20, no. 1. P. 66-77.
5. You J. [et al.] Identity-aware graph neural networks // *Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence*. 2021. Vol. 35, no. 12. P. 10737-10745.
6. Yuan M.M. [et al.] Climate warming enhances microbial network complexity and stability // *Nature Climate Change*. 2021. Vol. 11, no. 4. P. 343-348.
7. Watts D.J., Strogatz S.H. Collective dynamics of 'small-world' networks // *Nature*. 1998. Vol. 393, no. 6684. P. 440-442.
8. Luce R.D., Perry A.D. A method of matrix analysis of group structure // *Psychometrika*. 1949. Vol. 14, no. 2. P. 95-116.
9. Estrada E. When local and global clustering of networks diverge // *Linear Algebra and its Applications*. 2016. Vol. 488. P. 249-263.
10. Harary F. *Graph Theory*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994. 46 p.
11. Pemmaraju S., Skiena S. *Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory in Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. P. 248-249.
12. Tutte W.T. *Graph Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 340 p.
13. Dolev D., Leighton F.T., Trickey H. Planar embedding of planar graphs // *Advances in Computing Research*. 1983. Vol. 2. P. 147-161.
14. Frati F., Patrignani M. A note on minimum-area straight-line drawings of planar graphs // *Graph Drawing: 15th International Symposium*. Berlin: Springer, 2008. P. 339-344.
15. Тужилин М.А. Зависимости между средним кластерным коэффициентом и другими центральностями в графах // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2024. (В печати).

REFERENCES

1. Bonacich, P., 1972, "Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification", *Journal of Mathematical Sociology*, vol. 2, no. 1, pp. 113–120.
2. Borgatti, S.P., Everett, M.G., 2006, "A graph-theoretic perspective on centrality", *Social Networks*, vol. 28, no. 4, pp. 466–484.
3. Kiss, C., Bichler, M., 2008, "Identification of influencers - measuring influence in customer networks", *Decision Support Systems*, vol. 46, no. 1, pp. 233–253.

4. Lee, S.H.M., Cotte, J., Noseworthy, T.J., 2010, "The role of network centrality in the flow of consumer influence", *Journal of Consumer Psychology*, vol. 20, no. 1, pp. 66–77.
5. You, J., Gomes-Selman, J.M., Ying, R., Leskovec, J., 2021, "Identity-aware graph neural networks", *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, vol. 35, no. 12, pp. 10737–10745.
6. Yuan, M.M., Guo, X., Wu, L., Zhang, Y.A., Xiao, N., Ning, D., Zhou, J., 2021, "Climate warming enhances microbial network complexity and stability", *Nature Climate Change*, vol. 11, no. 4, pp. 343–348.
7. Watts, D.J., Strogatz, S.H., 1998, "Collective dynamics of 'small-world' networks", *Nature*, vol. 393, no. 6684, pp. 440–442.
8. Luce, R.D., Perry, A.D., 1949, "A method of matrix analysis of group structure", *Psychometrika*, vol. 14, no. 2, pp. 95–116.
9. Estrada, E., 2016, "When local and global clustering of networks diverge", *Linear Algebra and its Applications*, vol. 488, pp. 249–263.
10. Harary, F., 1994, *Graph Theory*, Reading, MA: Addison-Wesley, p. 46.
11. Pemmaraju, S., Skiena, S., 2003, "Cycles, Stars, and Wheels", in *Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory in Mathematica*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 248–249.
12. Tutte, W.T., 2005, *Graph Theory*, Cambridge: Cambridge University Press.
13. Dolev, D., Leighton, F.T., Trickey, H., 1983, "Planar embedding of planar graphs", *Advances in Computing Research*, vol. 2, pp. 147–161.
14. Frati, F., Patrignani, M., 2008, "A note on minimum-area straight-line drawings of planar graphs", in *Graph Drawing: 15th International Symposium*, Berlin: Springer, pp. 339–344.
15. Tuzhilin, M.A., 2024, "Relations between average clustering coefficient and other centralities in graphs", *Moscow University Mathematics Bulletin*, in press.

Получено: 29.11.2024

Принято в печать: 07.04.2025