ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16. Выпуск 4.

УДК 512.547.2.

СТАРОЕ И НОВОЕ В ТЕОРИИ СУПЕРХАРАКТЕРОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП[1]

А. Н. Панов (г. Самара)

Аннотация

Задача классификации неприводимых представлений является чрезвычайно трудной, "дикой" задачей для таких групп как максимальные унипотентные, борелевские, параболические подгруппы в конечных простых группах лиевского типа. В 1962 году А. А. Кириллов предложил метод орбит, согласно которому неприводимые представления нильпотентной группы Ли находятся во взаимно однозначном соответствии с коприсоединенными орбитами. В 1977 году Д. Каждан перенес метод орбит на случай конечных унипотентных групп. Однако, метод орбит не решает задачу, поскольку задача классификации коприсоединенных орбит является такой же "дикой" задачей.

В 1995–2003 годах К. Андре построил теорию базисных характеров унитреугольной группы $\mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$. Эти характеры не являются неприводимыми, но имеют много общих черт с неприводимыми характерами. Теория К. Андре была существенно упрощена Нинг Яном в 2001 г.

В работе 2008 года П. Диаконис и И. Айзекс сформулировали общее понятие теории суперхарактеров и построили теорию суперхарактеров для алгебра групп, частным случаем которой является теория базисных характеров К. Андре. В общем случае задача состоит в том, чтобы для заданной группы построить теорию суперхарактеров, наиболее приближенную к теории неприводимых характеров.

Теории суперхарактеров были посвящены многие работы. В настоящее время детально разработан случай абелевых групп; выяснена связь суперхарактеров с суммами Гаусса, Костермана, Рамануджана. Построены теории теории суперхарактеров для максимальных унипотентных подгрупп в ортогональной и симплектической группах. Решены задачи ограничения и суперриндуцирования для базисных характеров.

Задача построения теории суперхарактеров для параболических подгрупп остается открытой.

В § 1–2 настоящей работы будет дано авторское изложение общих положений теории суперхарактеров и построена теория суперхарактеров для алгебра групп, следуя схеме работы П. Диакониса и И. Айзекса.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 14-01-97017-поволжье-а

В §3 анонсированы результаты автора по построению теории суперхарактеров конечных групп треугольного типа, которая в виде частного случая содержит теорию П. Диакониса и И. Айзекса для алгебра групп. Для построенной теорию получен аналог формулы А. А. Кириллова для неприводимых характеров. Показано, что ограничение суперхарактера на подгруппу треугольного типа является суммой суперхарактеров этой подгруппы. Как и в случае алгебра групп, индуцирование не работает в теории суперхарактеров. Но можно определить супериндуцирование, которое сохраняет многие свойства индуцирования, включая теоремы Фробениуса.

Ключевые слова: теория суперхарактеров, алгебра группа, представления групп, треугольная группа.

Библиография: 28 названий.

OLD AND NEW IN THE SUPERCHARACTER THEORY OF FINITE GROUPS

A. N. Panov (Samara)

Abstract

The problem of classification of irreducible representations is a very complicated, "wild" problem for some groups like maximal unipotent, Borel and parabolic subgroups of the finite simple groups of Lie type. In 1962, A. A. Kirillov discovered the orbit method that establishes a one to one correspondence between the irreducible representations of a nilpotent Lie group and the coadjoit orbits. In 1977, D. Kazhdan modified the orbit method to be true for finite unipotent groups. However, the orbit method does not solve the problem, since the problem of classidication of the coadjpit orbits is a "wild" problem again.

In 1995–2003, C. Andre constructer the theory of basic characters for the unitriangular group $\mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$. These characters are not irreducible, but they have many common features with the irreducible characters. The Andre theory was simplified be Ning Yan in 2003.

In 2008, P. Diaconis and I. Isaacs formulated the general notion of a supercharacter theory and constructed the supercharacter theory for algebra groups, its precial case is the Andre theory of basic characters. The general problem is to construct for a given group a supercharacter theory that as close to the theory of irreducible characters as possible.

Many papers were devoted to the supercharacter theory. Up today the case of abelian groups is studied in details; the connection with Gauss, Kloosterman and Ramanujan sums is investigated.

The supercharacter theories for maximal unipotent subgroups in orthogonal and symplectic groups are constructed. The problems of restriction and superinduction is solved for the basic characters. The problem of construction of a supercharacter theory for the parabolic subgroups is still open.

In § 1–2 of the present paper, we present the authors proof of the main statements of the supercharacter theory for algebra groups, following the context of the paper of P. Diaconis and I. Isaacs. In §3, we announce the authors results on the supercharacter theory for the finite groups of triangular type, for which the theory of P. Diaconis and I.Isaacsas is a special case.

We obtain the analog of A. A. Kirillov formula for irreducible characters. We show that the restriction of the supercaracter on a subgroup of triangular type is a sum supercharacters of these subgroup. As in the case of algebra group, the induction does not work for supercharacters. We defined a superinduction, obeying the main properties of induction including the Frobenius formula.

Keywords: supercharacter theory, algebra group, group representations, triangular group

Bibliography: 28 titles.

1. Введение

Главной задачей теории представлений конечных групп принято считать следующую задачу:

дана группа G, требуется классифицировать все ее неприводимые представления.

Однако для некоторых групп задача классификации неприводимых представлений считается чрезвычайно трудной задачей. К таким группам относятся максимальные унипотентные, борелевские, параболические подгруппы в конечных простых группах лиевского типа [1]. В серии работ [2, 3, 4, 5] К. Андре построил теорию базисных характеров унитреугольной группы $\mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$. Эти характеры не являются неприводимыми, но имеют много общих черт с неприводимыми характерами. Теория К. Андре была существенно упрощена Нинг Яном [6]. В работе [7] П. Диаконис и И. Айзекс сформулировали общее понятие теории суперхарактеров и построили теорию суперхарактеров для алгебра групп, частным случаем которой является теория базисных характеров К. Андре. В общем случае задача состоит в том, чтобы для заданной группы построить теорию суперхарактеров, наиболее приближенную к теории неприводимых характеров. Теории суперхарактеров были посвящены многие работы. Отметим некоторые из них: теория суперхарактеров абелевых групп и приложения в теории чисел [18, 19], суперипдукция для алгебра групп [20, 21, 22, 23, 24, 25], приложения к задаче случайных блужданий на группах [26], теория суперхарактеров для полупрямых произведений [27]. Обзор литературы по этой теме можно найти в [28].

В § 2–3 настоящей работы будет дано авторское изложение общих положений теории суперхарактеров и построена теория суперхарактеров для алгебра групп, следуя общей схеме из работы [7]. В §4 анонсированы результаты автора по построению теории суперхарактеров конечных групп треугольного типа, которая в виде частного случая содержит теорию П. Диакониса и И. Айзекса для алгебра групп. Эти результаты частично вошли в работы автора [8, 9, 10]. Построенная теория суперхарактеров является более точной, чем общая конструкция для полупрямых произведений групп из работы [27].

2. Положения общей теории

Пусть G — конечная группа, $1 \in G$ — единичный элемент группы, $\mathrm{Irr}(G)$ — множество неприводимых характеров (представлений) группы G. Предположим, что заданы два разбиения

$$\mathrm{Irr}(G) = X_1 \cup \dots \cup X_m, \quad X_i \cap X_j = \varnothing, \tag{1}$$

$$G = K_1 \cup \dots \cup K_m, \quad K_i \cap K_j = \varnothing. \tag{2}$$

Заметим, что число компонент в разложении должно быть одинаково. Каждому X_i сопоставим характер группы G по формуле

$$\sigma_i = \sum_{\psi \in X_i} \psi(1)\psi. \tag{3}$$

Определение 1. *Говорят, что два разбиения $\mathcal{X} = \{X_i\}$ и $\mathcal{K} = \{K_j\}$ задают теорию суперхарактеров на G, если каждый характер σ_i постоянен на каждом K_j. В этом случае $\{\sigma_i\}$ называют суперхарактерами, а $\{K_j\}$ —* суперклассами. *Таблицу значений $\{\sigma_i(K_j)\}$ называют таблицей суперхарактеров.*

Для построения конкретных примеров теорий суперхарактеров важно следующее предложение.

Предложение 1. *[7, Лемма 2.1]. Пусть задана система дизъюнктных характеров $\mathfrak{Ch} = \{\chi_1, \dots, \chi_m\}$ и разбиение $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_m\}$ группы G. Предположим, что каждый характер χ_i постоянен на каждом K_j. Обозначим через X_i* носитель характера *χ_i (т.е. множество неприводимых компонент χ_i). Тогда следующие два условия эквивалентны:*
1) $\{1\} \in \mathcal{K}$,
2) система подмножеств $\mathcal{X} = \{X_i\}$ задает разбиение $\mathrm{Irr}(G)$; разложения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{K}$ задают теорию суперхарактеров группы G. Более того χ_i константой отличается от суперхарактера σ_i. Упрощая язык, будем в дальнейшем называть χ_i суперхарактером.

Замечание. Напомним, что характеры дизъюнктны (т.е. состоят их носители не пересекаются) тогде и только тогда, когда они ортогональны.

Доказательство. Предположим, что выполнено условие 1). Всякая система дизъюнктных характеров линейно независима. Число характеров из $\mathfrak{Ch}$ равно числу элементов в $\mathcal{K}$. Поэтому $\mathfrak{Ch}$ является базисом в пространстве комплекснозначных функций на группе G, постоянных на подмножествах из $\mathcal{K}$.

Регулярный характер $\rho(g)$ равен $|G|$ при $g = 1$ и равен 0 при $g \neq 1$. Так как $\{1\} \in \mathcal{K}$, то $\rho(g)$ постоянен на подмножествах из $\mathcal{K}$. Имеем

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_i, \quad \text{где} \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

С другой стороны, каждый неприводимый характер входит в разложение ρ с кратностью равной своей степени. Поэтому, каждый неприводимый характер входит в разложение ровно одного из χ_i и $a_i \chi_i = \sigma_i, \quad a_i \in \mathbb{Q}^*$. Что доказывает 2).

Предположим, что выполнено условие 2). Единица группы попадает в одно из подмножеств $\mathcal{K}$, скажем в K_1. Так как характеры χ_i постоянны на суперклассах, то $\chi_i(g) = \chi_i(1)$ для любого $g \in K_1$ и $1 \leq i \leq m$. Из условия 2) получаем, что $\rho(g) = \rho(1)$ и, следовательно, $g = 1$ и $K_1 = \{1\}$. $\square$

Следствие 1. *Система суперхарактеров $\mathfrak{Ch} = \{\chi_i\}$ однозначно с точностью до постоянных множителей определяется по разбиению $\{X_i\}$.*

Приведем несколько примеров теорий суперхарактеров.

Пример 1. *Система неприводимых характеров $\{\chi_i\}$ и система классов сопряженных элементов $\{K_i\}$.*

Пример 2. *Два суперхарактера $\chi_1 = 1_G, \quad \chi_2 = \rho - 1_G$ (здесь ρ — характер регулярного представления) и два суперкласса $K_1 = \{1\}, \quad K_2 = G \backslash \{1\}$. Таблица суперхарактеров*

	χ_1	χ_2
K_1	1	$\lvert G\rvert - 1$
K_2	1	-1

Пример 3. *$G = C_4$ — циклическая группа 4-го порядка. Ниже приведены таблица неприводимых характеров и одна из возможных таблиц суперхарактеров.*

	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3
1	1	1	1	1
g	1	i	-1	$-i$
g^2	1	-1	1	-1
g^3	1	$-i$	-1	i

	χ_0	$\chi_1 + \chi_3$	χ_2
1	1	2	1
$\{g, g^3\}$	1	0	-1
g^2	1	-2	1

Пример 4. *Если группа A действует на G и $\mathrm{Irr}(G)$ согласованно $\chi^a(g^a) = \chi(g)$, то две системы*

$$\chi^A = \sum_{a \in A} \chi^a, \qquad K^A = \bigcup_{a \in A} K^a,$$

где χ (соответственно, K) пробегает множество представителей A-орбит в $\mathrm{Irr}(G)$ *(соответственно, классов сопряженных элементов в G), задают теорию суперхарактеров группы G. Частный случай рассмотрен в предыдущем примере: группа $A = \mathbb{Z}_2$; образующий элемент действует на G и* $\mathrm{Irr}(G)$ *возведением третью степень.*

Сформулируем и докажем несколько общих утверждений.

Лемма 1. *Если $\{X_1, \ldots, X_m\}$ — разбиение* $\mathrm{Irr}(G)$, *и $\{K_1, \ldots, K_t\}$ — разбиение G, причем каждый σ_i, $1 \leq i \leq m$, постоянен на каждом K_j, $1 \leq j \leq t$, то $m \leq t$.*

Доказательство. Система характеров $\{\sigma_i\}$ линейно независима и содержится в пространстве всех комплекснозначных функций на G, постоянных на $\{K_j\}$, размерность которого равна t. $\square$

Для любого подмножества $K \subseteq G$ обозначим

$$\widehat{K} = \sum_{g \in K} g.$$

Центр $Z(\mathbb{C}\Pi)$ групповой алгебры $\mathbb{C}G$ является прямой суммой

$$Z(\mathbb{C}\Pi) = \bigoplus_{\psi \in \mathrm{Irr}(G)} \mathbb{C}e_\psi,$$

где $\{e_\psi\}$ — система примитивных идемпотентов. Примитивный идемпотент e_ψ, ассоциированный с неприводимым характером ψ, определяется по формуле

$$e_\psi = \frac{\psi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\psi(g)} g.$$

Каждому подмножеству $X \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ сопоставим центральный идемпотент

$$f_X = \sum_{\psi \in X} e_\psi.$$

Предложение 2. *Пусть разбиения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{K}$ задают теорию суперхарактеров, и $f_i = f_{X_i}$. Тогда система $\{\widehat{K_j} : 1 \leq j \leq m\}$ образует базис в подалгебре*

$$\mathrm{span}\{f_i : 1 \leq i \leq m\}.$$

Доказательство. Прямые вычисления приводят к равенству

$$f_i = \sum_{\psi \in X_i} e_\psi = \sum_{\psi \in X_i} \frac{\psi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\psi(g)} g$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_{\psi \in X_i} \psi(1)\overline{\psi(g)} \right) g = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{m} \overline{\sigma_i(K_j)}\, \widehat{K_j} \quad (4)$$

Поскольку системы элементов $\{f_i\}$ и $\{\widehat{K_j}\}$ равномощны и линейно независимы. То они линейно порождают одно и то же подпространство. $\square$

Следствие 2. *Если разбиения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{K}$ задают теорию суперхарактеров, то каждое K_j инвариантно относительно сопряжения (т.е. распадается в объединение классов сопряженных элементов).*

Доказательство. Из предложения 2 вытекает, что элементы $\{\widehat{K_j}\}$ содержатся в центре групповой алгебры $\mathbb{C}G$. □

Предложение 3. *В теории суперхарактеров разбиения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{K}$ однозначно определяют друг друга.*

Доказательство.

1) Разбиение (1) множества $\mathrm{Irr}(G)$ определяет отношение эквивалентности на группе G для которого $x \sim y$, если $\sigma_i(x) = \sigma_i(y)$ для любого $1 \leq i \leq m$. Это отношение определяет разбиение $\mathcal{K}^0$ группы G. Напомним, что $\{\sigma_i\}$ — базис в пространстве функций, постоянных на разбиении $\mathcal{K}$. Разбиение $\mathcal{K}$ более мелкое, чем $\mathcal{K}^0$. Поэтому $m = |\mathcal{K}| \geq |\mathcal{K}^0|$. С другой стороны, согласно лемме 1 $|\mathcal{K}^0| \geq$ $\geq |\mathcal{X}| = m$. Следовательно, $|\mathcal{K}^0| = m$ и $\mathcal{K}^0 = \mathcal{K}$.

2) Разбиение (2) группы G определяет подалгебру $\mathrm{span}\{\widehat{K_j}\} = \mathrm{span}\{f_i\}$. Базис, состоящий из системы ортогональных идемпотентов, определяется в ней однозначно. Поэтому разбиение $\mathcal{X}$ однозначно определяется по $\mathcal{K}$. □

Предложение 4. *Главный характер 1_G является суперхарактером (напомним, главный характер — это характер, тождественно равный единице).*

Доказательство. Допустим противное. Пусть $1_G \in X_1$ и $X_1 \neq \{1_G\}$. Тогда разбиение $\mathcal{X}^0$, которое отличается от $\mathcal{X}$ тем, что

$$X_1 = \{1_G\} \cup (X_1 \setminus \{1_G\}),$$

удовлетворяет условию леммы 1 в паре с $\mathcal{K}$. В то же время $|\mathcal{X}^0| > |\mathcal{K}|$. Это противоречит заключению той же леммы. □

3. Суперхарактеры алгебра групп

Пусть J — ассоциативная нильпотентная конечномерная алгебра над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Тогда группа $G = 1 + J$ называется *алгебра группой*. Группа G действует на J умножением слева и справа. *Суперклассом* элемента $g = 1 + x$ будем называть множество $1 + GxG$.

Определено также левое и правое действия группы G на сопряженном пространстве J^* по формулам:

$$g\lambda(x) = \lambda(xg),$$

$$\lambda g(x) = \lambda(gx).$$

Алгебра J также действует J^* справа и слева

$$y\lambda(x) = \lambda(xy),$$

$$\lambda y(x) = \lambda(yx).$$

Правый стабилизатор

$$G_{\lambda,\mathrm{right}} = \{g \in G : \lambda g = \lambda\}$$

является алгебра группой $G_{\lambda,\mathrm{right}} = 1 + J_{\lambda,\mathrm{right}}$, где

$$J_{\lambda,\mathrm{right}} = \{x \in J : \quad \lambda(xJ) = 0\}.$$

Аналогично левый стабилизатор $G_{\lambda,\mathrm{left}} = 1 + J_{\lambda,\mathrm{left}}$, где

$$J_{\lambda,\mathrm{left}} = \{x \in J : \quad \lambda(Jx) = 0\}.$$

Лемма 2. $|G\lambda| = |\lambda G|$.

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму $f(x,y) = \lambda(xy)$. Отображение $y \to f(x,y)$ является вложением

$$J/J_{\lambda,\mathrm{left}} \to (J/J_{\lambda,\mathrm{right}})^* . \tag{5}$$

Поэтому $\dim J_{\lambda,\mathrm{left}} \geq \dim J_{\lambda,\mathrm{right}}$. Аналогично доказывается обратное неравенство. Заключаем $\dim J_{\lambda,\mathrm{left}} = \dim J_{\lambda,\mathrm{right}}$. □

Следствие 3. *Число $n(\lambda) = \frac{|G\lambda G|}{|G\lambda|}$ левых G орбит в $G\lambda G$ совпадает с числом $\frac{|G\lambda G|}{|\lambda G|}$ правых G орбит в $G\lambda G$.*

Следствие 4. *Если $\mu(J_{\lambda,\mathrm{right}}) = 0$, то $\mu \in J\lambda$.*

Доказательство. Отображение (5) является изоморфизмом. Для любого $\mu(J_{\lambda,\mathrm{right}}) = 0$ существует $y \in J$, такой, что $\mu(x) = \lambda(xy)$, то есть $\mu = y\lambda$. □

Зафиксируем нетривиальный характер $t \to \varepsilon^t$ аддитивной группы поля $\mathbb{F}_q$ со значением в мультипликативной группе $\mathbb{C}^*$. Произвольному $\lambda \in J^*$ сопоставим комплекснозначную функцию

$$\xi_\lambda(g) = \varepsilon^{\lambda(g-1)}$$

на группе G. Покажем, что ограничение ξ_λ на подгруппу $G_{\lambda,\mathrm{right}}$ является линейным характером (одномерным представлением). Действительно, если $g_1 = 1+x_1$ и $g_2 = 1 + x_2$ два элемента из $G_{\lambda,\mathrm{right}}$, то $\lambda(x_1x_2) = 0$ и

$$\xi_\lambda(g_1g_2) = \xi_\lambda(1 + x_1 + x_2 + x_1x_2) = \varepsilon^{\lambda(x_1+x_2+x_1x_2)} = \\ \varepsilon^{\lambda(x_1)}\varepsilon^{\lambda(x_2)}\varepsilon^{\lambda(x_1x_2)} = \varepsilon^{\lambda(x_1)}\varepsilon^{\lambda(x_2)} = \xi_\lambda(g_1)\xi_\lambda(g_2).$$

Назовем *суперхарактером* индуцированный характер

$$\chi_\lambda = \mathrm{Ind}(\xi_\lambda, G_{\lambda,\mathrm{right}}, G). \tag{6}$$

Предложение 5. *Суперхарактер χ_λ постоянен на суперклассах.*

Доказательство.

Пункт 1. Пусть $g = 1 + x \in G_{\lambda,\mathrm{right}}$. Покажем, что для любого $a \in G$ элемент $g' = 1 + xa$ также принадлежит $G_{\lambda,\mathrm{right}}$ и $\chi_\lambda(g') = \chi_\lambda(g)$.

Действительно, из $g = 1+x \in G_{\lambda,\mathrm{right}}$ вытекает $\lambda(xJ) = 0$. Отсюда $\lambda(xaJ) = 0$ и $g' = 1 + xa \in G_{\lambda,\mathrm{right}}$. Поскольку оба элемента g и g' принадлежат $G_{\lambda,\mathrm{right}}$, вычислим значения на них ξ_λ. Пусть $g = 1 + u$. Тогда

$$\xi_\lambda(g') = \varepsilon^{\lambda(xa)} = \varepsilon^{\lambda(x)}\varepsilon^{\lambda(xu)} = \varepsilon^{\lambda(x)} = \xi_\lambda(g). \tag{7}$$

Обозначим $\Lambda(g) = \{s \in G |\ s^{-1}gs \in G_\lambda\}$. Покажем, что $\Lambda(g') = \Lambda(g)$. Действительно, $s^{-1}g's = 1+(s^{-1}xs)s^{-1}as$. Как было показано выше, если $s^{-1}gs \in G_{\lambda,\mathrm{right}}$, то $s^{-1}g's \in G_{\lambda,\mathrm{right}}$. Что доказывает $\Lambda(g) \subset \Lambda(g')$. Обратное включение показывается аналогично. Из формулы (7) получаем

$$\xi_\lambda(s^{-1}g's) = \xi_\lambda(s^{-1}gs), \tag{8}$$

для любого $s \in \Lambda(g)$. Отсюда

$$\chi_\lambda(g') = \frac{1}{|G_{\lambda,\mathrm{right}}|}\sum_{s\in\Lambda(g')}\xi_\lambda(s^{-1}g's) = \frac{1}{|G_{\lambda,\mathrm{right}}|}\sum_{s\in\Lambda(g)}\xi_\lambda(s^{-1}gs) = \chi_\lambda(g). \tag{9}$$

Пункт 2. Характеры постоянны на классах сопряженных элементов. Поэтому $\chi_\lambda(g_0gg_0^{-1}) = \chi_\lambda(g)$ для любого $g_0 \in G$. Из пункта 1 заключаем, что для $g = 1 + x \in G_{\lambda,\mathrm{right}}$ выполняется $\chi_\lambda(1 + x) = \chi_\lambda(1 + GxG)$. То есть $\chi(g) = \chi(K(g))$, если суперкласс $K(g)$ пересекается с $G_{\lambda,\mathrm{right}}$. Если суперкласс имеет пустое пересечение с $G_{\lambda,\mathrm{right}}$, то χ_λ на ней равен нулю.□

Предложение 6. *1) Если $\lambda' \in G\lambda G$, то $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$; если $\lambda' \notin G\lambda G$, то суперхарактеры χ_λ и $\chi_{\lambda'}$ дизъюнктны.*

2) Системы суперхарактеров $\{\chi_\lambda\}$ и суперклассов $\{1+GxG\}$, где λ и x пробегают системы двойных $G\times G$ орбит в J^* и J соответственно, определяют теорию суперхарактеров для группы G.

Доказательство. Индуцированное представление с характером ξ_λ реализуется в пространстве

$$\mathcal{U}_{G\lambda} = \{f \in \mathbb{C}[G]:\quad f(hg) = \xi_\lambda(h)f(g)\ \text{ для }\ \text{любого }\ h \in G_{\lambda,\mathrm{right}}\}$$

по формуле $R_{g_0}f(g) = f(gg_0)$. Обоснованность обозначения $\mathcal{U}_{G\lambda}$ будет видна ниже.

Покажем, что система функций $S_{G\lambda} = \{\xi_\mu :\quad \mu \in G\lambda\}$ является базисом в $\mathcal{U}_{G\lambda}$. Действительно, для любого $\mu = a\lambda$ и $h \in G_{\lambda,\mathrm{right}}$ выполняется

$$\mu(h-1) = \lambda((h-1)a) = \lambda(h-1) + \lambda((h-1)(a-1)) = \lambda(h-1);$$

отсюда

$$\xi_\mu(hg) = \varepsilon^{\mu(hg-1)} = \varepsilon^{\mu(h(g-1)+h-1)} = \varepsilon^{\mu(h-1)}\varepsilon^{\mu h(g-1)} = \xi_\lambda(h)\xi_\mu(g).$$

Это доказывает, что $S_{G\lambda}$ содержится в $\mathcal{U}_{G\lambda}$.

Система функций $S_{G\lambda}$ линейно независима, поскольку представляет собой систему характеров аддитивной группы J. Число элементов в $S_{G\lambda}$ равно $|G\lambda|$, которое, согласно лемме 2, совпадает с $|\lambda G|$ — размерностью пространства $\mathcal{U}_{G\lambda}$. Заключаем, что $S_{G\lambda}$ — базис в $\mathcal{U}_{G\lambda}$.

Рассмотрим пространство

$$\mathcal{U}_{G\lambda G} = \operatorname{span}\{\xi_\mu : \quad \mu \in G\lambda G\}.$$

Пространство $\mathcal{U}_{G\lambda G}$ инвариантно относительно левого и правого регулярных представлений:

$$R_{g_0}\xi_\mu(g) = \varepsilon^{\mu(gg_0-1)} = \varepsilon^{\mu((g-1)g_0+g_0-1)} = \\ \varepsilon^{\mu(g_0-1)}\varepsilon^{g_0\mu(g-1)} = \varepsilon^{\mu(g_0-1)}\xi_{g_0\mu}(g), \quad (10)$$

$$L_{g_0}\xi_\mu(g) = \varepsilon^{\mu(g_0^{-1}g-1)} = \varepsilon^{\mu(g_0^{-1}(g-1)+g_0^{-1}-1)} = \\ \varepsilon^{\mu(g_0^{-1}-1)}\varepsilon^{\mu g_0^{-1}(g-1)} = \varepsilon^{\mu(g_0^{-1}-1)}\xi_{\mu g_0^{-1}}(g). \quad (11)$$

Аналогично случаю $\mathcal{U}_{G\lambda}$ система функций $\{\xi_\mu, \quad \mu \in G\lambda G\}$ является базисом в $\mathcal{U}_{G\lambda G}$. Размерность пространства $\mathcal{U}_{G\lambda G}$ вычисляется по формуле

$$\dim \mathcal{U}_{G\lambda G} = n(\lambda) \dim \mathcal{U}_{G\lambda},$$

где $n(\lambda)$ — число левых G орбит в $G\lambda G$. Левые и правые регулярные представления коммутируют. Правое регулярное представление в $\mathcal{U}_{G\lambda}$ эквивалентно правому регулярному представлению в $L_{g_0}(\mathcal{U}_{G\lambda})$, которое совпадает с $\mathcal{U}_{G\lambda g_0}$. Поэтому правое регулярное представление в $\mathcal{U}_{G\lambda G}$ кратно представлению $\mathcal{U}_{G\lambda}$. Для характеров получаем

$$\chi(\mathcal{U}_{G\lambda G}) = n(\lambda)\chi_\lambda. \quad (12)$$

Что доказывает совпадение $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$ в случае, если λ и λ' принадлежат одной $G \times G$ орбите.

Рассмотрим отображение $\Upsilon : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}G$ пространства комплекснозначных функций $\mathbb{C}[G]$ в групповую алгебру $\mathbb{C}G$, определенное по формуле

$$\Upsilon(f) = \sum_{g\in G} f(g)g.$$

Отображение Υ эквивариантно относительно левого и правого действия группы G, поэтому образ подпространства $\mathcal{U}_{G\lambda G}$ — двусторонний идеал в $\mathbb{C}G$.

Если λ и λ' принадлежат разным $G \times G$ орбитам, что подпространства $\mathcal{U}_{G\lambda G}$ и $\mathcal{U}_{G\lambda' G}$ имеют нулевое пересечение. Их Υ-образы в $\mathbb{C}$ отвечают различным двусторонним идеалам. Следовательно, они состоят из различных неприводимых компонент. Их характеры дизъюнктны и, как следствие, характеры χ_λ и $\chi_{\lambda'}$ дизъюнктны. Что доказывает пункт 1).

Перейдем к доказательству пункта 2). Покажем, что системы суперхарактеров и суперклассов удовлетворяют условия предложения 1. Действительно, из 1) и предложения 5 вытекает, что суперхарактеры попарно дизъюнктны и постоянны на суперклассах. Утверждение, что число суперхарактеров равно числу суперклассов вытекает, что число орбит любой конечной группы преобразований линейном пространстве и его сопряженном совпадают (см. [7, лемма 4.1]). Наконец легко видеть, что $\{1\}$ — суперкласс. Утверждение 2) вытекает из предложения 1. □

Следующая цель — доказать аналог формулы А. А. Кириллова для суперхарактеров. Напомним формулу А. А. Кириллова для характера неприводимого представления унипотентной группы

$$\chi_\lambda(1+x) = \sum_{\mu\in\Omega^*} \varepsilon^{\mu(x)}, \tag{13}$$

где μ пробегает коприсоединенную орбиту Ω^* для $\lambda \in J^*$, а χ_λ — неприводимый характер, ассоциированный с Ω^*. Значение этой формулы в том, что она непосредственно устанавливает взаимно однозначное соответствие между неприводимыми характерами и коприсоединенными орбитами. Отметим, что эта формула верна только при достаточно жестких ограничениях на характеристику поля [15, 16]. Из работы [17] вытекает, формула (13) не верна для группы $\mathrm{UT}(n,\mathbb{F}_q)$, $\quad n\geqslant 13$, если $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q)=2$. Заметим, что аналог формулы А. А. Кириллова для суперхарактеров верен для полей любых характеристик.

Теорема 1.

$$\chi_\lambda(1+x) = \frac{1}{n(\lambda)} \sum_{\mu\in G\lambda G} \varepsilon^{\mu(x)}, \tag{14}$$

Доказательство. Из (12) и (10) вытекает, что

$$\chi_\lambda(g_0) = \frac{1}{n(\lambda)} \sum_{g_0\mu=\mu,\quad \mu\in G\lambda G} \varepsilon^{\mu(g_0-1)}. \tag{15}$$

Осталось показать, что условие $g_0\mu=\mu$ здесь можно опустить.

Легко видеть, что если $g_0\mu\neq\mu$, то $g_0\mu g_1\neq \mu g_1$ для любого $g_1\in G$. Множество $\{\mu\in G\lambda G:\quad g_0\mu\neq\mu\}$ разбивается на правые G-орбиты. Сумма функций $\varepsilon^{\mu(g_0-1)}$ на каждой из них кратна

$$V_\mu = \sum_{g_1\in G} \varepsilon^{\mu g_1(g_0-1)}.$$

Осталось показать, что при условии $g_0\mu\neq\mu$ сумма V_μ равна нулю. Действительно, заменяя $g_1=1+t,\ \ t\in J$, получаем

$$V_\mu = \sum_{t\in J} \varepsilon^{\mu(1+t)(g_0-1)} = \varepsilon^{\mu(g_0-1)} \sum_{t\in J} \varepsilon^{\nu(t)},$$

где $\nu = g_0\mu - \mu \neq 0$. Хорошо известно, что последняя сумма равна нулю (см. например [11, 12]). $\square$

Следующая цель — рассмотреть задачи ограничения и индуцирования в теории суперхарактеров. Пусть $G = 1 + J$ — алгебра группа. Если J' — подалгебра в J, то подгруппа $G' = 1 + J'$ называется *алгебра подгруппой* в G.

Лемма 3. *Если A — нильпотентная ассоциативная алгебра, B — подалгебра в A, и $B + A^2 = A$, то $B = A$.*

Доказательство. Для любого натурального n имеем

$$A^n = (B + A^2)^n \subseteq B^n + A^{n+1} \subseteq B + A^{n+1}.$$

Отсюда $B + A^n \subseteq B + A^{n+1}$. Поскольку A — нильпотентная алгебра, то $A^{n+1} = 0$ для некоторого n. Тогда

$$A = B + A^2 \subseteq B + A^3 \subseteq \ldots \subseteq B + A^{n+1} = B.$$

$\square$

Следствие 5. *Если A — нильпотентная ассоциативная алгебра, B — максимальная подалгебра в A, то $A^2 \subseteq B$. В частности, B — идеал в A.*

Доказательство. Так как $B \subseteq B + A^2 \subseteq A$ и подалгебра B максимальная, то либо $B = B + A^2$, либо $B + A^2 = A$. Из второго равенства вытекает $B = A$, что невозможно по условию. Следовательно, $B = B + A^2$. Отсюда $A^2 \subseteq B$. $\square$

Теорема 2. *Ограничение суперхарактера χ_λ на алгебра подгруппу G' является суммой суперхарактеров G'.*

Доказательство. Упростим обозначение $G_\lambda = G_{\lambda,\mathrm{right}}$. Достаточно доказать утверждение теоремы для случая, когда J' подалгебра коразмерности один в J. Из следствия 5 вытекает, что J' — идеал в J. Из известной теоремы об ограничении индуцированного представления на подгруппу [14, теорема 44.2] вытекает

$$\operatorname{Res}\chi_\lambda = \bigoplus_s \operatorname{Ind}(\xi_\lambda^{(s)}, G_\lambda^{(s)} \cap G', G'), \tag{16}$$

где $G_\lambda^{(s)} = sG_\lambda s^{-1}$, $\xi_\lambda^{(s)}$ характер подгруппы $G_\lambda^{(s)} \cap G'$, определенные по формуле

$$\xi_\lambda^{(s)}(k) = \xi_\lambda(s^{-1}ks),$$

и s пробегает множество представителей двойных классов $G' \backslash G / G_\lambda$. Так как G_λ — правый стабилизатор для λ, то $G_\lambda^{(s)} = G_{s\lambda s^{-1}}$ и $\xi_\lambda^{(s)} = \xi_{s\lambda s^{-1}}$. Поэтому

$$\operatorname{Res}\chi_\lambda = \bigoplus_\mu \operatorname{Ind}(\xi_\mu, G_\mu \cap G', G'), \tag{17}$$

где μ пробегает
$$\{s\lambda s^{-1}: \quad s \in G'\backslash G/G_\lambda\}.$$
Достаточно показать, что каждое индуцированное представление, входящее в (17), является суммой суперхарактеров подгруппы G'.

Обозначим через μ' естественную проекцию μ на J'^*. Как и выше $G'_{\mu'}$ — правый стабилизатор μ' в G'. Тогда $G'_{\mu'} = 1 + A$, где
$$A = J'_{\mu'} = \{y \in J': \quad \mu'(yJ') = 0\}.$$
Группа $G'_{\mu'}$ содержит подгруппу $G_\mu \cap G' = 1 + B$, где
$$B = J_\mu \cap J' = \{y \in J': \quad \mu(yJ) = 0\}$$
— подалгебра в A. Заметим, что поскольку $J^2 \in J'$ (см. следствие 5), то $\mu(yJ) = 0$ равносильно $\mu'(yJ) = 0$. Из всего сказанного
$$\mathrm{Ind}(\xi_\mu, G_\mu \cap G', G') = \mathrm{Ind}(\mathrm{Ind}(\xi_\mu, G_\mu \cap G', G'_{\mu'}), G'_{\mu'}, G'). \tag{18}$$
Разложим характер $\phi_{\mu'} = \mathrm{Ind}(\xi_\mu, G_\mu \cap G', G'_{\mu'})$ на неприводимые компоненты.

Покажем, что $A^2 \subseteq B$. Действительно, если $y_1, y_2 \in A$, то
$$\mu'(y_1 J') = \mu'(y_2 J') = 0.$$
Тогда $\mu(y_1 y_2 J) = \mu'(y_1(y_2 J)) = \mu'(y_1 J') = 0$. Что доказывает $A^2 \subseteq B$.

Обозначим
$$\mathcal{F} = \{\bar\nu \in A^*: \quad \bar\nu|_B = \mu'|_B\}.$$
Если $\bar\nu \in \mathcal{F}$, то $\bar\nu(A^2) = \mu'(A^2) = 0$. Формула
$$\xi_{\bar\nu}(1 + y) = \varepsilon^{\bar\nu(y)}, \quad y \in A \tag{19}$$
определяет линейный характер группы $G'_{\mu'} = 1 + A$. Степень характера $\phi_{\mu'}$ совпадает с числом характеров $\{\bar\nu \in \mathcal{F}\}$. Из теоремы Фробениуса вытекает, что $\xi_{\bar\nu}$ входит в $\phi_{\mu'}$. Заключаем
$$\phi_{\mu'} = \bigoplus_{\bar\nu \in \mathcal{F}} \xi_{\bar\nu}.$$
Подставляя в (18), получаем
$$\mathrm{Ind}(\xi_\mu, G_\mu \cap G', G') = \bigoplus_{\bar\nu \in \mathcal{F}} \mathrm{Ind}(\xi_{\bar\nu}, G'_{\mu'}, G'). \tag{20}$$

Для любой $\bar\nu \in \mathcal{F}$, существует $\nu \in J^*$, который при ограничении на A совпадает с $\bar\nu$ и при ограничении на J_μ — с μ. Тогда $\nu - \mu$ аннулируется на J_μ. Поэтому $\nu - \mu \in J\mu$ (см. следствие 4); то есть $\nu \in G\mu$. Верно и обратное, если $\nu \in G\mu$, то $\bar\nu|_B = \mu'|_B$.

Поскольку J' идеал в J, то группа G действует в J' (и J'^*) правым и левым умножением. Равенство $\nu = g\mu,\ \ g \in G$, допускает ограничение на J'^* в виде $\nu' = g\mu'$. Правые стабилизаторы в G' элементов ν' и μ' совпадают. Следовательно,

$$\mathrm{Ind}(\xi_{\bar{\nu}}, G'_{\mu'}, G') = \mathrm{Ind}(\xi_{\nu'}, G'_{\nu'}, G'),$$

то есть является суперхарактером G'. Что доказывает утверждение теоремы. □

Пусть $G' = 1 + J'$ — алгебра подгруппа в $G = 1 + J$, и ϕ — суперкласс функция на G' (т.е. функция постоянная на суперклассах в G'). Продолжим ϕ до функции $\dot{\phi}$ на G, равной ϕ на G' и нулю все G'.

Определение 2. *Будем называть супериндукцией* SInd ϕ *функцию на группе* G*, определенную формулой*

$$\mathrm{SInd}\,\phi(1+x) = \frac{1}{|G|\cdot|G'|}\sum_{a,b\in G}\dot{\phi}(1+axb).$$

На группах G (и G') определено скалярное произведение обычным образом

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}.$$

Имеет место аналог теоремы Фробениуса для суперхарактеров.

Теорема 3. *Пусть* ϕ *— суперкласс функция на* G'*, и* ψ *— суперкласс функция на* G*. Тогда*

$$(\mathrm{SInd}\,\phi, \psi) = (\phi, \mathrm{Res}\,\psi).$$

Доказательство.

$$(\mathrm{SInd}\,\phi, \psi) = \frac{1}{|G|^2\cdot|G'|}\sum_{a,b\in G,\ x\in J}\dot{\phi}(1+axb)\psi(1+x) =$$

$$\frac{1}{|G|^2\cdot|G'|}\sum_{a,b\in G,\ x\in J}\dot{\phi}(1+x)\psi(1+a^{-1}xb^{-1}) =$$

$$\frac{1}{|G|^2\cdot|G'|}\cdot|G|^2\sum_{x\in J}\dot{\phi}(1+x)\psi(1+x) = \frac{1}{|G'|}\sum_{x\in J'}\phi(1+x)\psi(1+x) = (\phi, \mathrm{Res}\,\psi).$$

□

4. Суперхарактеры конечных групп треугольного типа

Пусть H — группа и J — ассоциативная алгебра над полем k. Предположим, что определены коммутирующие левое $h, x \to hx$ и правое $h, x \to xh$ линейные действия группы H на J. Предположим, что для любых $h \in H$ и $x, y \in J$ выполнены условия:

1. $h(xy) = (hx)y$ и $(xy)h = x(yh)$,
2. $x(hy) = (xh)y$.

На множестве
$$G = H + J = \{h + x : \ h \in H, \ x \in J\}$$
определена ассоциативная операция умножения
$$g_1 g_2 = (h_1 + x_1)(h_2 + x_2) = h_1 h_2 + h_1 x_2 + x_1 h_2 + x_1 x_2. \tag{21}$$
Если J — нильпотентная алгебра над полем k, то G является группой относительно операции (21). В случае когда группа H конечна, поле k — конечное поле и J — конечномерная нильпотентная алгебра над полем k, группа G конечна.

Определение 3. *При соблюдении описанных выше условий будем называть группу G конечной группой треугольного типа, если группа H абелева и* $\mathrm{char} k$ *не делит* $|H|$.

Пусть $G = H + J$ — конечная группа треугольного типа. Согласно теореме Машке, групповая алгебра kH абелева и полупроста, и следовательно является прямой суммой полей. Существует система примитивных идемпотентов $\{e_1, \ldots, e_n\}$, такая, что
$$kH = k_1 e_1 \oplus \ldots \oplus k_n e_n, \tag{22}$$
где $k_1, \ldots, k_n$ — расширения поля k. Любой идемпотент в kH — сумма примитивных идемпотентов.

Прямая сумма $A = kH \oplus J$ имеет структуру алгебры относительно операции умножения (21). Группа G является подгруппой в группе A^* обратимых элементов алгебры A, рассмотренной ниже в Примере 7. Заметим, что группа G разлагается в произведение $G = HN$ подгруппы H и нормальной подгруппы $N = 1 + J$, которая является алгебра группой.

Пример 5. *Алгебра группа $G = 1 + J$.*

Пример 6. $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \ a, b \in \mathbb{F}_q, \ a \neq 0 \right\}$.

Пример 7. *Пусть A — конечномерная алгебра с единицей приведенного типа, определенная над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов [13, §6.6]. По определению, приведенная алгебра это алгебра, для которой фактор по радикалу $J = J(A)$ есть прямая сумма алгебр с делением. Согласно теореме Веддерберна [13, §13.6] всякая алгебра с делением над конечным полем коммутативна. Поэтому A/J коммутативна. Существует полупростая подалгебра S, такая, что $A = S \oplus J$ (см. [13, §11.6]). В нашем случае алгебра S коммутативна. Группа $G = A^*$ обратимых элементов в A является конечной группой треугольного типа $G = H + J$, где $H = S^*$. Если A — ассоциативная алгебра треугольных матриц, то $G = \mathrm{T}(n, \mathbb{F}_q)$ — треугольная группа. Теория суперхарактеров для $G = A^*$ построена в [9].*

Образуем группу $\widetilde{G}$, которая состоит из троек $\tau = (t, a, b)$, где $t \in H$, $a, b \in N$, с операцией

$$(t_1, a_1, b_1) \cdot (t_2, a_2, b_2) = (t_1 t_2,\ t_2^{-1} a_1 t_2 a_2,\ t_2^{-1} b_1 t_2 b_2).$$

Группа $\widetilde{G}$ действует на J по формуле

$$\rho_\tau(x) = taxb^{-1}t^{-1}.$$

В сопряженном пространстве J^* представление группы $\widetilde{G}$ определяется естественным образом

$$\rho^*_\tau \lambda(x) = \lambda(\rho(\tau^{-1})(x)).$$

В J^* определено также левое и правое линейные действия группы G по формулам $b\lambda(x) = \lambda(xb)$ и $\lambda a(x) = \lambda(ax)$. Тогда $\rho_\tau(\lambda) = tb\lambda a^{-1} t^{-1}$.

Для любого идемпотента $e \in kH$ обозначим через A_e подалгебру eAe. Подалгебра $J_e = eJe \subset J$ является радикалом в A_e. Обозначим $e' = 1 - e$. Имеет место разложение Пирса

$$J = eJe \oplus eJe' \oplus e'Je \oplus e'Je'.$$

Сопряженное пространство J_e^* естественно отождествляется с подпространством в J^*, состоящим из линейных форм, равных нулю на всех компонентах разложения Пирса кроме первого.

Определение 4. *Будем называть $\rho_{\widetilde{G}}$-орбиту в J сингулярной, если существует идемпотент $e \in kH$, $\quad e \neq 1$, такой, что $\rho_{\widetilde{G}}(x) \cap J_e \neq \varnothing$. В противном случае будем называть орбиту назовем регулярной. Будем называть элемент $x \in J$ (соответственно, $\lambda \in J^*$) сингулярным (регулярным), если его $\rho_{\widetilde{G}}$-орбита сингулярна (регулярна).*

Для любого идемпотента $e \in kH$ рассмотрим подгруппу

$$H(e) = \{h \in H : \quad he = e\}$$

и факторгруппу $H_e = H/H(e)$. Тогда группа $G_e = H_e + J_e$ является конечной группой треугольного типа. Для нее определены также группа $\widetilde{G}_e$ и ее орбиты в J_e и J_e^*, регулярные и сингулярные. Можно показать [10, лемма 2.6], что

$$H(e) = \{h \in H : \quad hx = xh = x\} = \{h \in H : \quad h\lambda = \lambda h = \lambda\}$$

для регулярного $x \in J_e$ и регулярного $\lambda \in J_e^*$.

Рассмотрим действие группы $\widetilde{G}$ на G по формуле

$$R_\tau(g) = 1 + ta(g-1)b^{-1}t^{-1}.$$

Последняя формула нуждается в комментариях. В ней $g - 1 \in A = kH + J$. Тогда $R_\tau(g) \in A$. Если $g = h + x$, то $R_\tau(g) = h \bmod J$. Поэтому на самом деле $R_\tau(g) \in G$.

Определение 5. *Будем называть $\widetilde{G}$-орбиты в G суперклассами. Если $g \in \in G$, то $K(g)$ — суперкласс, содержащий g. Группа G разбивается на суперклассы.*

Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество троек $\beta = (e, h, \omega)$, в которых e — идемпотент из kH, $h \in H(e)$ (то есть $he = e$), и ω — регулярная $\widetilde{G}_e$-орбита в J_e. Все элементы $h + \omega$ содержатся в одном суперклассе [10, следствие 3.2], который обозначим через K_β.

Теорема 4. *[10, теорема 3.3]. Соответствие $\beta \to K_\beta$ является взаимно однозначным между множеством троек $\mathfrak{B}$ и множеством суперклассов в G.*

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество троек $\alpha = (e, \theta, \omega^*)$, в которых e — идемпотент из kH, θ — линейный характер (одномерное представление) подгруппы $H(e)$, и ω^* — регулярная $\widetilde{G}_e$-орбита в J_e^*. Поскольку подгруппа $H(e)$ коммутативна, то число ее линейных характеров совпадает с числом элементов. Число регулярных орбит в J_e и J_e^* совпадают [10, предложение 2.13]. Поэтому $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$.

Перейдем к построению суперхарактеров. Пусть $\alpha = (e, \theta, \omega^*) \in \mathfrak{A}$, выберем $\lambda \in \omega^*$. Рассмотрим подгруппу $G_\lambda = H(e) \cdot N_{\lambda,\mathrm{right}}$, где $N_{\lambda,\mathrm{right}}$ — стабилизатор правого действия $N = 1 + J$ для λ. Каждый элемент $g \in G_\lambda$ представим в виде $g = h + x$, где $h\lambda = \lambda h = \lambda$ and $\lambda(xJ) = 0$.

Зафиксируем нетривиальный характер $t \to \varepsilon^t$ аддитивной группы поля $\mathbb{F}_q$ со значением в мультипликативной группе $\mathbb{C}^*$. По тройке $\alpha = (e, \theta, \omega^*)$ и $\lambda \in \omega^*$ определим линейный характер подгруппы G_λ по формуле

$$\xi_{\theta,\lambda}(g) = \theta(h)\varepsilon^{\lambda(x)}, \tag{23}$$

где $g = h + x$, $h \in H(e)$ и $x \in J_{\lambda,\mathrm{right}}$. Покажем, что $\xi = \xi_{\theta,\lambda}$ действительно является линейным характером:

$$\xi(gg') = \xi((h + x)(h' + x')) = \xi(hh' + h'x + x'h + xx') =$$

$$\theta(hh')\varepsilon^{\lambda(h'x)}\varepsilon^{\lambda(x'h)}\varepsilon^{\lambda(xx')} = \theta(h)\theta(h')\varepsilon^{\lambda(x)}\varepsilon^{\lambda(x')} = \xi(g)\xi(g').$$

Индуцированный характер

$$\chi_\alpha = \mathrm{Ind}(\xi_{\theta,\lambda}, G_\lambda, G) \tag{24}$$

будем называть *суперхарактером.*

Теорема 5. *[10, предложения 4.1 и 4.3].*
1) Суперхарактеры $\{\chi_\alpha : \ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ попарно дизъюнкты;
2) Каждый суперхарактер χ_α постоянен на каждом суперклассе K_β;
3) $\{1\}$ — суперкласс $K(g)$ для $g = 1$.

Применяя предложение 1 приходим к заключению.

Теорема 6. *[10, теорема 4.5]. Системы суперхарактеров $\{\chi_\alpha |\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ и суперклассов $\{\mathcal{K}_\beta |\ \beta \in \mathfrak{B}\}$ задают теорию суперхарактеров группы G.*

Анонсируем ряд результатов по ограничению и супериндукции для суперхарактеров конечных групп треугольного типа. Частным случаем здесь являются аналогичные теоремы для алгебра групп.

Пусть H' — подгруппа в H, и J' — подалгебра в J, инвариантная относительно правого и левого действия H' на J. Тогда $G' = H' + J'$ — подгруппа в G, которую будем называть *подгруппой треугольного типа* в G.

Предложение 7. *Ограничение суперхарактера χ_α группы G на подгруппу G' треугольного типа является суммой суперхарактеров G'.*

Перейдем к определению супериндукции. Пусть ϕ — суперкласс функция (т.е. комплексная функция, постоянная на суперклассах) в G'. Определим супериндукцию следующим образом.

Определение 6.

$$\mathrm{SInd}\,\phi(g) = \frac{|H|}{|G|\cdot|G'|}\sum_{\tau\in\widetilde{G}}\dot{\phi}(\rho_\tau(g)) = \frac{|H|}{|G|\cdot|G'|}\sum_{a,b\in N,\ t\in H}\dot{\phi}(1+ta(g-1)bt^{-1}).$$

Легко видеть, что $\mathrm{SInd}\,\phi$ *— суперкласс функция на G.*

Теорема 7. *Пусть ψ — суперкласс функция на G. Тогда*

$$(\mathrm{SInd}\,\phi, \psi) = (\phi, \mathrm{Res}\,\psi).$$

Получим аналог формулы А. А. Кириллова для построенной теории суперхарактеров. В случае алгебра групп эта формула совпадает с (14).

Поскольку суперхарактеры постоянны на суперклассах, то значения суперхарактеров достаточно уметь вычислять на элементах вида $g = h + x$, где $hx = xh = x$. Пусть f' идемпотент в kH, ассоциированный с $h-1$ (то есть $h-1$ и f' отличаются постоянным множителем из $(kH)^*$). Тогда $f = 1 - f'$ — дополнительный к f' идемпотент. Условие $hx = xh = x$ равносильно $x \in J_f$.

Пусть $\alpha = (e, \theta, \omega^*) \in \mathfrak{A}$. Пусть $g = h + x$, где $hx = xh = x$. Легко видеть, что если $h \notin H(e)$, то $\chi_\alpha(g) = 0$. Предположим, что $h \in H(e)$ (то есть $he = e$). Тогда $e < f$ и, поэтому, J_e^* — подпространство в J_f^*. В частности, $\omega^* \in J_f^*$. Существует единственная $\rho^*(\widetilde{G}_f)$-орбита Ω^* в J_f^*, пересечение которой с J_e^* совпадает с ω^* [10, lemma 2.7]. Обозначим через $\dot{\theta}(h)$ функцию $H \to \mathbb{C}$, которая равна $\theta(h)$ на $H(e)$ и нулю все $H(e)$.

Теорема 8. *Значение суперхарактера χ_α на элементе $g = h + x$, где $hx = xh = x$, вычисляется по формуле*

$$\chi_\alpha(g) = \frac{|H_e|\cdot\dot{\theta}(h)}{n(\Omega^*)}\sum_{\mu\in\Omega^*}\varepsilon^{\mu(x)}, \tag{25}$$

где $n(\Omega^*)$ — число правых N_f-орбит в Ω^*.

5. Заключение

Сформулируем ряд вопросов, которые остались без ответа в построенной теории суперхарактеров.

1) Как было отмечено в §3, суперхарактер χ_i отличается от стандартного суперхарактера σ_i постоянным множителем. В случае алгебра групп этот множитель можно явно вычислить: он совпадает с $n(\lambda)$ — числом левых G-орбит в двойной $G \times G$-орбите. Чему равен этот множитель в теории суперхарактеров конечных групп треугольного типа?

2) Частным случаем конечной группы треугольного типа является треугольная группа $\mathrm{T}(n, \mathbb{F}_q)$. Как разложить суперхарактер при ограничении на подгруппу $\mathrm{T}(m, \mathbb{F}_q)$, где $m < n$?

3) Как и в случае унитреугольной группы, здесь прослеживается аналогия с симметрической группой S_n, в которой можно рассмотреть подгруппу $S_p \times S_q$, где $p + q = n$, и ее неприводимое представление вида $\psi_p \times \psi_q$. Важную роль в теории представлений группы S_n играет решение задачи разложения индуцированного представления $\mathrm{Ind}(\psi_p \times \psi_q, S_p \times S_q, S_n)$ на неприводимые компоненты. Задача переносится унитреугольную группу $\mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$ в рамках теории базисных характеров К. Андре (она в целом решена, см. [28]). Как решается это задача для треугольной группы $\mathrm{T}(n, \mathbb{F}_q)$ в рамках построенной выше теории суперхарактеров конечных групп треугольного вида?

4) Построить теорию суперхарактеров для борелевских подгрупп в ортогональной и симплектической группах.

Перечисленные задачи представляют собой ближайшие цели. После их решения можно заняться построением теории суперхарактеров для параболических подгрупп в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$, а дальше и параболических подгрупп в простых конечных группах лиевского типа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Drozd Yu. Matrix problems, small reduction and representations of mixed groups// In: Representations of Algebras and Related Topics, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.

2. Andre C. A. M. Basic characters of the unitriangular group // Journal of Algebra. 1995. Vol. 175. P. 287–319.

3. Andre C. A. M. Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group // Journal of Algebra. 1995. Vol. 176. P. 959–1000.

4. Andre C. A. M. The basic character table of the unitriangular group // Journal of Algebra. 2001. Vol. 241. P. 437–471.

5. Andre C. A. M. The basic characters of the unitriangular group (for arbitrary primes) // Proc. Am. Math. Soc. 2002. Vol. 130. P. 1943–1954.

6. Ning Yan. Representation theory of finite unipotent linear groups, Ph.D. Thesis. Department of mathematics. University of Pennsylvania. 2001 (см. также arXiv: 1004.2674).

7. Diaconis P., Isaacs I. M. Supercharacters and superclasses for algebra groups // Trans.Amer.Math.Soc., 2008, Vol. 360, P. 2359–2392.

8. Panov A. N. Invariants of the coadjoint action o the basic varieties of the unitriangular group // Transformation groups. 2015. Vol. 20. P. 229–246.

9. Панов А. Н. Теория суперхарактеров для групп обратимых элементов приведенных алгебр // Алгебра и анализ. Принята к печати (см. также arXiv:1409.5565).

10. Panov A. N. Supercharacters for the finite groups of triangular type // arXiv:1508.05767

11. Панов А. Н. Метод орбит для унипотентных групп над конечным полем // Записки научных семинаров ПОМИ. 2013. Т. 414. С. 127–137.

12. Игнатьев М. В. Ведение в метод орбит над конечным полем. М.: МЦ-НМО, 2014.

13. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.

14. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.

15. Kirillov A. A. Variations on the triangular theme // Amer. Math. Soc. Transl. 1995. Vol. 169. P. 43–73.

16. Kazhdan D. Proof of Springer hypothesis // Israil J. Math. 1977. Vol. 28. P. 272–284.

17. Isaacs I. M., Karagueuzian D. Involution and characters of upper triangular matrix groups // Math. of Computation. 2005. Vol. 74. no. 252. P. 2027–2033.

18. Brumbaugh J. L., Bulkow M. , Fleming P. S., Garcia L. A., Garcia S. R., Karaali G., Michal M., Turner A. P., Suh H. Supercharacters, exponentioal sums and the uncertainty principle // Journal of Number theory. 2014. Vol. 144. P. 151–175.

19. Fowler C. F., Garcia S. R., Karaali G. Ramanujan sums as supercharacters // The Ramanujan Journal. 2014. Vol. 32. P. 205–241.

20. Thiem N. Branching rules in the sing of super functions of unipotent upper-triangular matrices // Journal of Algebraic combinatorics. 2010. Vol. 31. P. 267–298.

21. Thiem N., Venkateswaran V. Restricting supercharacters of the finite unipotent upertriangular matrices // Electronic Journal of Combinatorics. 2009. Vol. 16. P. 23.

22. Marberg E., Theim N. Superinduction for pattern groups // Journal of Algebra. 2009. Vol. 321. P. 3681–3703.

23. Diaconis P., Thiem N. Supercharacter formulas for pattern groups // Trans. Am. Math. Soc. 2009. Vol. 361. P. 3501–3533.

24. Bragg D. Restrictions of rainbow supercharacters and poset binomials. Ph.D. Thesis. Department of mathematics. University of Coloado. 2013.

25. Bragg D., Thiem N. Restrictions of rainbow supercharacters // arXiv: 1405.2299

26. Arias-Castro E., Diaconis P., Stanley R., A super-class walk on upper-triangular matrices // Journal of Algebra. V. 2004. Vol. 278. P. 739–765.

27. Hendrickson A. O. F. Supercharacter theory costructions corresponding to Schur ring products // Comm. Algebra. 2012. Vol. 40. no. 12. P. 4420–4438.

28. Aguiar M., Andrè C., Benedetti C., Bergeron N., Zhi Chen, Diaconis P., Hendrickson A., Hsiao S., Isaacs I. M., Jedwab A., Johnson K., Karaali G., Lauve A., Tung Le, Lewis S., Huilan Li, Magaarg K., Marberg E., Novelli J-Ch., Amy Pang, Saliola F., Tevlin L., Thibon J-Y., Thiem N., Venkateswaran V., Vinroot C. R., Ning Yan, Zabricki M. Supercharacters, symmetric functions in noncommuting variables, and related Hopf algebras // Advances in Mathematics. 2012. Vol. 229. no. 4. P. 2310–2337.

REFERENCES

1. Drozd, Yu. 1992, "Matrix problems, small reduction and representations of mixed groups" In: *Representations of Algebras and Related Topics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

2. Andre, C. A. M. 1995, "Basic characters of the unitriangular group", *Journal of Algebra*, vol. 175, pp. 287–319.

3. Andre, C. A. M. 1995, "Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group", *Journal of Algebra*, vol. 176, pp. 959–1000.

4. Andre, C. A. M. 2001, "The basic character table of the unitriangular group", *Journal of Algebra*, vol. 241, pp. 437–471.

5. Andre, C. A. M. 2002, "The basic characters of the unitriangular group (for arbitrary primes)", *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 130, pp. 1943–1954.

6. Ning Yan. 2001, *Representation theory of finite unipotent linear groups*, Ph.D. Thesis, Department of mathematics, University of Pennsylvania (see also arXiv: 1004.2674).

7. Diaconis, P. & Isaacs, I.M. 2008, "Supercharacters and superclasses for algebra groups" , *Trans.Amer.Math.Soc.*, vol. 360, pp. 2359–2392.

8. Panov, A. N. 2015, "Invariants of the coadjoint action o the basic varieties of the unitriangular group" , *Transformation groups*, vol. 20, pp. 229–246.

9. Panov, A. N. "Supercharacter theory for groups of invertible elements of reduced algebras" , *Algebra i Analys*, accepted for publication (see also arXiv:1409.5565).

10. Panov, A. N. "Supercharacters for the finite groups of triangular type" , arXiv:1508.05767.

11. Panov, A. N. 2013, "The orbit method for unipotent groups over finite fields" , *Zapiski POMI*, vol 414, pp. 127–137.

12. Ignatev, M. V. 2014, *Introduction to the orbit method over field*, MCIME, Moscow.

13. Pierce, R. 1982, *Associative algebras*, Springer-Verlag, New York.

14. Curtis, C. & Reiner, I. 1962, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience Publishers a division of John Wiley & Sons, New York.

15. Kirillov, A. A. 1995, "Variations on the triangular theme" , *Amer. Math. Soc. Transl.*, vol. 169, pp. 43–73.

16. Kazhdan, D. 1977, "Proof of Springer hypothesis" , *Israil J.Math.*, vol. 28, pp. 272–284.

17. Isaacs, I. M. & Karagueuzian, D. 2005, "Involution and characters of upper triangular matrix groups" , *Math. of Computation*, vol. 74, no. 252, pp. 2027–2033.

18. Brumbaugh, J. L., Bulkow, M., Fleming, P. S., Garcia, L. A., Garcia, S. R., Karaali, G., Michal, M., Turner, A. P. & Suh, H. 2014, "Supercharacters, exponentioal sums and the uncertainty principle" , *Journal of Number theory*, vol. 144, pp. 151–175.

19. Fowler, C. F., Garcia, S. R. & Karaali G. 2014, "Ramanujan sums as supercharacters" , *The Ramanujan Journal*, vol. 32, pp. 205–241.

20. Thiem, N. 2010, "Branching rules in the sing of super functions of unipotent upper-triangular matrices", *Journal of Algebraic combinatorics*, vol. 31, pp. 267–298.

21. Thiem, N. & Venkateswaran, V. 2009, "Restricting supercharacters of the finite unipotent upertriangular matrices", *Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 16, pp. 23

22. Marberg, E. & Theim, N. 2009, "Superinduction for pattern groups", *Journal of Algebra*, vol. 321, pp. 3681–3703.

23. Diaconis, P. & Thiem, N. 2009, "Supercharacter formulas for pattern groups", *Trans.Am.Math.Soc.*, vol. 361, pp. 3501–3533.

24. Bragg, D. 2013, *Restrictions of rainbow supercharacters and poset binomials*, Ph.D. Thesis. Department of mathematics, University of Coloado.

25. Bragg, D. & Thiem, N. "Restrictions of rainbow supercharacters", arXiv: 1405.2299

26. Arias-Castro, E., Diaconis, P.& Stanley, R., 2004, "A super-class walk on upper-triangular matrices", *Journal of Algebra*, vol. 278, pp. 739–765.

27. Hendrickson, A. O. F. 2012, "Supercharacter theory costructions corresponding to Schur ring products", *Comm. Algebra*, vol. 40, no. 12, pp. 4420–4438.

28. Aguiar, M., Andrè, C., Benedetti, C., Bergeron, N., Zhi Chen, Diaconis, P., Hendrickson, A., Hsiao, S., Isaacs, I. M., Jedwab, A., Johnson, K., Karaali, G., Lauve, A., Tung Le, Lewis, S., Huilan Li, Magaarg, K., Marberg, E., Novelli, J-Ch., Amy Pang, Saliola, F., Tevlin, L., Thibon, J-Y., Thiem, N., Venkateswaran, V., Vinroot, C. R., Ning Yan & Zabricki, M. 2012, "Supercharacters, symmetric functions in noncommuting variables, and related Hopf algebras", *Advances in Mathematics*, vol. 229, no. 4, pp. 2310–2337.

Самарский государственный университет.
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королева.
Поступило 10.03.2015.