ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 2.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-176-185

Новые геодезические в классе Громова – Хаусдорфа, лежащие в облаке вещественной прямой

И. Н. Михайлов

Михайлов Иван Николаевич — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: ivan.mikhailov@math.msu.ru

Аннотация

В данной работе мы показываем, что кривая вида $A \times_{\ell^1} (tX)$, $t \in [0, \infty)$ для ограниченного пространства X и неограниченного подмножества $A \subset \mathbb{R}$ является геодезической в классе Громова – Хаусдорфа. Также мы показываем, что для произвольных $\lambda > 1$, $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\operatorname{dist}_{GH}\big(\mathbb{Z}^n, \lambda\mathbb{Z}^n\big) \geqslant \frac{1}{2}$. Отсюда следует, во-первых, что кривая $t\mathbb{Z}^n$, $t \in (0, \infty)$ не является непрерывной в классе Громова – Хаусдорфа (в частности, не является геодезической), и, во-вторых, что отображение умножения всех пространств на конечном расстоянии Громова – Хаусдорфа от $\mathbb{R}^n$ на произвольное $\lambda > 0$ не является непрерывным.

Ключевые слова: расстояние Громова – Хаусдорфа, геодезическая, декартово произведение.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:
Михайлов И.Н. Новые геодезические в классе Громова – Хаусдорфа, лежащие в облаке вещественной прямой // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 176–185.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 2.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-176-185

New geodesic lines in the Gromov – Hausdorff class lying in the cloud of the real line

I. N. Mikhailov

Mikhailov Ivan Nikolaevich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: ivan.mikhailov@math.msu.ru

Abstract

In the paper we prove that, for arbitrary unbounded subset $A \subset R$ and an arbitrary bounded metric space X, a curve $A \times_{\ell^1} (tX)$, $t \in [0, \infty)$ is a geodesic line in the Gromov – Hausdorff class. We also show that, for abitrary $\lambda > 1$, $n \in \mathbb{N}$, the following inequality holds: $\operatorname{dist}_{GH}\big(\mathbb{Z}^n, \lambda\mathbb{Z}^n\big) \geqslant \frac{1}{2}$. We conclude that a curve $t\mathbb{Z}^n$, $t \in (0, \infty)$ is not continuous with respect to the Gromov – Hausdorff distance, and, therefore, is not a gedesic line. Moreover, it follows that multiplication of all metric spaces lying on the finite Gromov – Hausdorff distance from $\mathbb{R}^n$ on some $\lambda > 0$ is also discontinous with respect to the Gromov – Hausdorff distance.

Keywords: Gromov – Hausdorff distance, geodesic line, Cartesian product

Bibliography: 12 titles.

For citation:
Mikhailov, I. N. 2025, “New geodesic lines in the Gromov – Hausdorff class lying in the cloud of the real line” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 176–185.

1. Введение

Расстояние Громова – Хаусдорфа — важная конструкция метрической геометрии, которая позволяет определить обобщённую псевдометрику на классе всех метрических пространств. Впервые это расстояние было введено Дэвидом Эдвардсом в 1975 году ([3]) и позднее стало знаменитым благодаря работе [4]. С историческими подробностями можно познакомиться в работе [11].

Традиционно, расстояние Громова – Хаусдорфа активно используется для изучения компактных метрических пространств. Пространство всех компактных метрических пространств, наделённое расстоянием Громова – Хаусдорфа, называется *пространством Громова – Хаусдорфа* и хорошо изучено. В частности, оно является полным, сепарабельным, геодезическим метрическим пространством.

В известной монографии [7] Михаил Громов описал некоторые свойства пространства $\mathcal{GH}$ всех, не обязательно компактных, метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, наделённого расстоянием Громова – Хаусдорфа. В частности, Михаил Громов ввёл в рассмотрение классы метрических пространств на конечном расстоянии от некоторого фиксированного метрического пространства (в работе [1] такие классы были названы *облаками*). Он анонсировал, что такие классы являются полными и стягиваемыми. В качестве простого примера было приведено пространство Громова – Хаусдорфа. Для этого метрического класса можно рассмотреть естественное отображение, отправляющее метрическое пространство $(X, \operatorname{dist}_X)$ в $(X, \lambda \operatorname{dist}_X)$. Если теперь устремить λ к 0, то получится искомое стягивание. Михаил Громов указал, что аналогичными свойствами обладает и класс метрических пространств на конечном расстоянии от $\mathbb{R}^n$.

Тем не менее позднее оказалось, что всё не так просто. Во-первых, при работе с классом $\mathcal{GH}$ возникают теоретико-множественные трудности. Несложно показать, что в рамках теории множеств фон Неймана–Бернайса–Гёделя (NBG) пространство $\mathcal{GH}$, а также любое облако является не множеством, а собственным классом, то есть не может принадлежать никакому другому классу. Чтобы доказать, что облако стягиваемо, нужно определить на нём топологию. Однако невозможно ввести топологию на собственном классе, поскольку любое топологическое пространство является элементом своей топологии, что невозможно для собственного класса по определению. В работе [1] авторы предложили способ определить аналог топологии на классах, фильтрованных множествами, а также непрерывные отображения между ними. Во-вторых, оказалось, что не все облака инварианты относительно умножения всех своих метрических пространств на произвольное число $\lambda > 0$. В работе [1] приведён пример геометрической прогрессии $\{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$ для простого числа $p \neq 2$ с метрикой, индуцированной из $\mathbb{N}$, которая отскакивает от себя на бесконечное расстояние Громова – Хаусдорфа при умножении на 2. Наконец, если полнота произвольного облака была аккуратно доказана в работе [1], то стягиваемость не обоснована строго до сих пор даже для облаков таких естественных метрических пространств как $\mathbb{R}^n$. Сложность представляет проверка непрерывности естественного отображения умножения всех пространств данного облака на положительное число $\lambda > 0$.

Другой важной задачей, связанной с геометрией расстояния Громова – Хаусдорфа в классе $\mathcal{GH}$, является задача построения геодезических. В работе [12] предъявлен класс метрических пространств *общего положения*, всюду плотный в $\mathcal{GH}$, любые два пространства которого на конечном расстоянии друг от друга можно соединить линейной геодезической. Тем не менее до сих пор неизвестно, может ли любая пара метрических пространств, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, быть соединена некоторой геодезической.

В данной работе мы строим новые геодезические в облаке вещественной прямой. Сначала мы показываем, что если $A \subset \mathbb{R}$ — неограниченное подмножество, $B \subset \mathbb{R}$ — произвольное подмножество, A' — метрическое пространство на конечном расстоянии Громова – Хаусдорфа от A, а X и Y — произвольные ограниченные метрические пространства, то выполнено неравенство $\operatorname{dist}_{GH}\bigl(A' \times_{\ell^1} X,\, B \times_{\ell^1} Y\bigr) \geqslant \frac{\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y}{2}$. С помощью данной оценки мы доказываем, что для произвольного ограниченного метрического пространства X и неограниченного подмножества A кривая $\Bigl\{A \times_{\ell^1} (tX)\colon t \in [0, \infty)\Bigr\}$ является геодезической в классе Громова – Хаусдорфа. После этого мы приводим пример пространства из облака $\mathbb{R}^n$, для которого умножение на $t > 0$ не будет давать геодезическую в классе Громова – Хаусдорфа. А именно, мы доказываем, что для произвольных $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 1$ выполнено неравенство $\operatorname{dist}_{GH}\bigl(\mathbb{Z}^n,\, \lambda\mathbb{Z}^n\bigr) \geqslant \frac{1}{2}$, откуда следует, что $\mathbb{Z}^n$ является искомым контрпримером. Более того, из данного неравенства следует, что отображение умножения всех пространств облака $\mathbb{R}^n$ на произвольное $\lambda > 0$ не является непрерывным. Тем самым мы показываем, что доказательство стягиваемости пространства Громова – Хаусдорфа принципиально не переносится на случай облака $\mathbb{R}^n$. Для простоты изложения в данном месте мы не пользуемся техникой работы с классами, фильтрованными множествами, предложенной в [1]. Под непрерывностью отображения умножения всех пространств облака $[\mathbb{R}^n]$ на $\lambda > 0$ мы подразумеваем следующее естественное свойство: если последовательность метрических пространств $(X_n)_n$ таких, что $X_n \in [\mathbb{R}^n]$, сходится по Громову–Хаусдорфу к метрическому пространству X, то $(\lambda X_n)_n$ сходится по Громову–Хаусдорфу к λX.

2. Основные определения и предварительные результаты

В данном разделе мы приводим определения основных используемых конструкций, вводим обозначения, а также формулируем вспомогательные результаты, которые понадобятся нам при доказательстве основных теорем.

2.1. Расстояние Громова – Хаусдорфа

Метрическим пространством называется произвольная пара $(X, \operatorname{dist}_X)$, где X — произвольное множество, $\operatorname{dist}_X\colon X \times X \to [0, \infty)$ — некоторая метрика на нём, то есть неотрицательная, симметричная функция, удовлетворяющая неравенству треугольника.

Расстояние между произвольными двумя точками x и y некоторого метрического пространства $(X, \operatorname{dist}_X)$, для краткости, мы часто будем обозначать через $|xy|$. Через $U_r^X(a) = \{x \in X\colon |ax| < r\}$, $B_r^X(a) = \{x \in X\colon |ax| \leqslant r\}$ обозначим открытый и замкнутый шары с центром в точке a радиуса r в метрическом пространстве X. В тех случаях, когда понятно, в каком метрическом пространстве X рассматриваются шары, мы будем опускать верхний индекс. Для произвольного подмножества $A \subset X$ метрического пространства пусть

$U_r(A) = \cup_{a\in A} U_r(a)$ — открытая r-окрестность A. Для непустых подмножеств $A \subset X$, $B \subset X$ положим $\operatorname{dist}(A, B) = \inf\bigl\{|ab| : a \in A, b \in B\bigr\}$.

Определение 1. *Пусть A и B — непустые подмножества метрического пространства. Расстоянием по Хаусдорфу между A и B называется величина*

$$\operatorname{dist}_H(A, B) = \inf\bigl\{r > 0\colon A \subset U_r(B),\, B \subset U_r(A)\bigr\}.$$

Определение 2. *Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных X и Y соответственно, назовём* ***реализацией пары*** *(X, Y).*

Определение 3. ***Расстоянием*** *$\operatorname{dist}_{GH}(X, Y)$* ***по Громову-Хаусдорфу*** *между X и Y назовём точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $\operatorname{dist}_H(X', Y') \leqslant r$.*

Пусть теперь X, Y — непустые множества.

Определение 4. *Каждое $\sigma \subset X \times Y$ называется* ***отношением*** *между X и Y.*

Обозначим через $\mathcal{P}_0(X, Y)$ множество всех непустых отношений между X и Y.

Положим

$$\pi_X\colon X \times Y \to X,\ \pi_X(x, y) = x,$$
$$\pi_Y\colon X \times Y \to Y,\ \pi_Y(x, y) = y.$$

Определение 5. *Отношение $R \subset X \times Y$ называется* ***соответствием****, если $\pi_X|_R$ и $\pi_Y|_R$ сюрьективны.*

Обозначим $\mathcal{R}(X, Y)$ множество соответствий между X и Y.

Определение 6. *Пусть X, Y — метрические пространства, $\sigma \in \mathcal{P}_0(X, Y)$, тогда* ***искажением*** *σ называется величина*

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Bigl\{\bigl||xx'| - |yy'|\bigr|\colon (x, y),\, (x', y') \in \sigma\Bigr\}.$$

Предложение 1 ([2]). *Для любых метрических пространств X и Y выполняется равенство*

$$2\operatorname{dist}_{GH}(X, Y) = \inf\bigl\{\operatorname{dis} R\colon R \in \mathcal{R}(X, Y)\bigr\}.$$

2.2. Облака

Через $\mathcal{VGH}$ обозначим класс всех непустых метрических пространств, наделённый расстоянием Громова – Хаусдорфа.

Теорема 1 ([2]). *Расстояние Громова – Хаусдорфа является обобщённой псевдометрикой на $\mathcal{VGH}$, обнуляющейся на каждой паре изометричных пространств. А именно, расстояние Громова – Хаусдорфа симметрично, удовлетворяет неравенству треугольника, но, вообще говоря, может быть бесконечно.*

Класс $\mathcal{GH}_0$ получается из $\mathcal{VGH}$ факторизацией по нулевым расстояниям, то есть по отношению эквивалентности: $X \sim_0 Y$, если и только если $\operatorname{dist}_{GH}(X, Y) = 0$.

Определение 7. *Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim_1$ на $\mathcal{GH}_0$: $X \sim_1 Y$, если и только если $\operatorname{dist}_{GH}(X, Y) < \infty$. Соответствующие классы эквивалентности называются* ***облаками****.*

Для произвольного метрического пространства X задаваемое им облако мы будем обозначать через $[X]$. Через Δ_1 обозначим метрическое пространство, состоящее из одной точки. Таким образом, $[\Delta_1]$ — это облако, состоящее из классов всех ограниченных пространств на нулевом расстоянии друг от друга.

2.3. Декартово произведение метрических пространств

Определение 8. *Пусть X, Y — два непустых множества. Через $X\times_\rho Y$ будем обозначать декартово произведение X и Y, наделённое метрикой ρ.*

Пусть теперь $(X, \operatorname{dist}_X)$, $(Y, \operatorname{dist}_Y)$ — два произвольных метрических пространства.

Определение 9. *Через $X\times_{\ell^1} Y$ будем обозначать декартово произведение $X\times Y$, наделённое метрикой*
$$\operatorname{dist}\bigl(p, p'\bigr)=\operatorname{dist}_X(x, x')+\operatorname{dist}_Y(y, y'),$$
где $p=(x, y)$, $p'=(x', y')$ — произвольные точки $X\times Y$.

Определение 10. *Пусть A_1, A_2, B_1, B_2 — непустые.* ***Декартовым произведением*** *соответствий $R_1\in\mathcal{R}(A_1, A_2)$ и $R_2\in\mathcal{R}(B_1, B_2)$ назовём следующее отношение $R_1\times R_2$ между $A_1\times B_1$ и $A_2\times B_2$:*
$$R_1\times R_2=\Bigl\{\bigl((a_1, b_1), (a_2, b_2)\bigr)\colon (a_1, a_2)\in R_1,\ (b_1, b_2)\in R_2\Bigr\}.$$

Лемма 1 ([2], [10]). *Пусть A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные метрические пространства, $R_1\in\mathcal{R}(A_1, A_2)$ и $R_2\in\mathcal{R}(B_1, B_2)$. Тогда*

(1) $R_1\times R_2\in\mathcal{R}\bigl(A_1\times_{\ell^1} B_1, A_2\times_{\ell^1} B_2\bigr)$;

(2) $\operatorname{dis} R_1\times R_2\leqslant \operatorname{dis} R_1+\operatorname{dis} R_2$.

Нам понадобится следующее несложное утверждение

Лемма 2. *Пусть $A_1, A_2\in[X]$ и $B_1, B_2\in[Y]$ для некоторых метрических пространств X, Y. Тогда*
$$\operatorname{dist}_{GH}\bigl(A_1\times_{\ell^1} B_1, A_2\times_{\ell^1} B_2\bigr)\leqslant \operatorname{dist}_{GH}(A_1, A_2)+\operatorname{dist}_{GH}(B_1, B_2).$$

Доказательство. По условию $\operatorname{dist}_{GH}(A_1, A_2)<\infty$, $\operatorname{dist}_{GH}(B_1, B_2)<\infty$. По предложению 1 для любого $\varepsilon>0$ найдутся соответствия $R_1\in\mathcal{R}(A_1, A_2)$ и $R_2\in\mathcal{R}(B_1, B_2)$ такие, что $\operatorname{dis} R_1<2\operatorname{dist}_{GH}(A_1, A_2)+\varepsilon$, $\operatorname{dis} R_2<2\operatorname{dist}_{GH}(B_1, B_2)+\varepsilon$. Рассмотрим соответствие $R_1\times R_2$ между $A_1\times B_1$ и $A_2\times B_2$. Согласно лемме 1 выполнено неравенство
$$\operatorname{dis}\bigl(R_1\times R_2\bigr)\leqslant \operatorname{dis} R_1+\operatorname{dis} R_2\leqslant 2\bigl(\operatorname{dist}_{GH}(A_1, A_2)+\operatorname{dist}_{GH}(B_1, B_2)\bigr)+2\varepsilon.$$
По предложению 1 в силу произвольности $\varepsilon>0$ получаем, что
$$\operatorname{dist}_{GH}\bigl(A_1\times_{\ell^1} B_1, A_2\times B_2\bigr)\leqslant \operatorname{dist}_{GH}(A_1, A_2)+\operatorname{dist}_{GH}(B_1, B_2),$$
что и требовалось доказать. □

2.4. Вспомогательные результаты

В данном разделе мы приведём ещё два утверждения, которые понадобятся нам в доказательствах.

Теорема 2 ([2], [10]). *Кривая tX, $t\in[0, \infty)$ является геодезической классе Громова – Хаусдорфа для произвольного ограниченного метрического пространства X.*

Теорема 3 ([8]). *Для числа $N(t)$ точек с целыми координатами в единичном шаре $B_t(0)\subset\mathbb{R}^n$ справедлива следующая асимптотическая формула*
$$N(t)=\operatorname{Vol} B_1(0)\cdot t^n\bigl(1+o(1)\bigr),\ t\to\infty,$$
где $\operatorname{Vol} B_1(0)$ — объём единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

3. Основные результаты

Теорема 4. *Предположим, что $A' \in [A]$, $A \subset \mathbb{R}$ — неограниченное подмножество, $B \subset \mathbb{R}$, X, $Y \in [\Delta_1]$. Тогда*

$$\operatorname{dist}_{GH}(A' \times_{\ell^1} X,\, B \times_{\ell^1} Y) \geqslant \frac{\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y}{2}.$$

Доказательство. Положим $P = A' \times_{\ell^1} X$, $Q = B \times_{\ell^1} Y$.

Если $\operatorname{dist}_{GH}(P, Q) = \infty$, то искомое неравенство очевидно.

Предположим, что $\operatorname{dist}_{GH}(P, Q) < \infty$. Выберем произвольное соответствие R между P и Q с конечным искажением $c := \operatorname{dis} R$.

Пусть также x_0, $x_1 \in X$ таковы, что $|x_0 x_1| = t$.

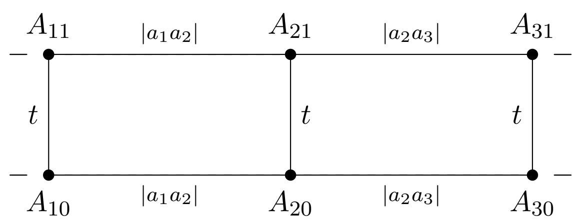
Так как $A' \in [A]$, то найдётся соответствие S между A и A' с искажением $\operatorname{dis} S = w < \infty$.

Поскольку $A \subset \mathbb{R}$ — неограниченное подмножество, существуют точки $p_1 < p_2 < \ldots < p_{2n+1}$ из A такие, что $d_i := |p_i p_{i+1}| > 100(t + c + w + \operatorname{diam} Y)$ для всех $i = 1, \ldots, 2n+1$. Выберем произвольные $a_i \in S(p_i)$.

Положим $A_{ij} = (a_i, x_j) \in A' \times_{\ell^1} X$, $i = 1, \ldots, 2n+1$, $j = 0, 1$.

Заметим, что для всех $1 \leqslant i < k \leqslant 2n+1$, $j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ выполнены равенства

$$|A_{ij} A_{k\,j+1}| = |a_i a_k| + t, \; |A_{ij} A_{kj}| = |a_i a_k|.$$



Выберем $B_{ij} = (b_{ij}, y_{ij}) \in R(A_{ij})$ произвольным образом.

Заметим, что выполнены неравенства

$$|B_{ik} B_{jl}| \geqslant |b_{ik} - b_{jl}| = |B_{ik} B_{jl}| - \operatorname{dist}_Y(y_{ik}, y_{jl}) \geqslant |B_{ik} B_{jl}| - \operatorname{diam} Y.$$

Лемма 3. *Для произвольных $1 \leqslant i < j < k \leqslant 2n+1$ и α, β, γ из $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, точка $b_{j\beta}$ лежит строго между $b_{i\alpha}$ и $b_{k\gamma}$.*

Доказательство. По определению искажения выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |b_{i\alpha} b_{k\gamma}| &\geqslant |B_{i\alpha} B_{k\gamma}| - \operatorname{diam} Y \geqslant |A_{i\alpha} A_{k\gamma}| - (\operatorname{diam} Y + c) \geqslant \\ &\geqslant |a_i a_k| - (\operatorname{diam} Y + c) \geqslant |p_i p_k| - (\operatorname{diam} Y + c + w) = \\ &= (d_i + \ldots + d_{k-1}) - (\operatorname{diam} Y + c + w). \end{aligned}$$

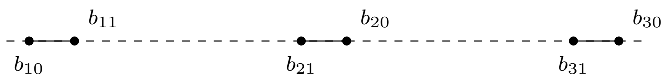
Предположим, что доказываемое утверждение неверно. Тогда

$$\begin{aligned} |b_{i\alpha} b_{k\gamma}| &= \big||b_{i\alpha} b_{j\beta}| - |b_{j\beta} b_{k\gamma}|\big| \leqslant \max\big\{|b_{i\alpha} b_{j\beta}|, |b_{j\beta} b_{k\gamma}|\big\} \leqslant \max\big\{|B_{i\alpha} B_{j\beta}|, |B_{j\beta} B_{k\gamma}|\big\} \leqslant \\ &\leqslant \max\big\{|A_{i\alpha} A_{j\beta}| + c, |A_{j\beta} A_{k\gamma}| + c\big\} \leqslant \max\big\{|a_i a_j| + t + c, |a_j a_k| + t + c\big\} \leqslant \\ &\leqslant \max\big\{|p_i p_j| + t + c + w, |p_j p_k| + t + c + w\big\} = \\ &= \max\big\{(d_i + \ldots + d_{j-1}) + w + t + c, (d_j + \ldots + d_{k-1}) + w + t + c\big\} < \\ &< (d_i + \ldots + d_{k-1}) - w - c - \operatorname{diam} Y, \end{aligned}$$

где последнее неравенство выполнено, поскольку $d_l > 2(w+c)+t+\operatorname{diam} Y$ для каждого l — противоречие. $\square$

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что пары точек $\{b_{ij},\, b_{i\,j+1}\}$ расположены на прямой по возрастанию индексов i.

Выберем индексы $i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_{2n+1} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ так, что:
1) b_{1i_1} — самая левая точка из всех b_{ij}, $i = 1, \ldots, 2n+1$, $j = 0, 1$;
2) $|A_{ji_j} A_{j+1\, i_{j+1}}| = t + |a_j a_{j+1}|$ для каждого $j = 1, \ldots, 2n$.



Тогда выполнены неравенства

$$
\begin{aligned}
&c + w + (d_1 + \ldots + d_{2n}) = c + w + |p_1 p_{2n+1}| \geqslant c + |a_{1i_1} a_{2n+1\, i_{2n+1}}| = \\
&\quad = c + |A_{1i_1} A_{2n+1\, i_{2n+1}}| \geqslant |B_{1i_1} B_{2n+1\, i_{2n+1}}| \geqslant |b_{1i_1} b_{2n+1\, i_{2n+1}}| = \sum_{k=1}^{2n} |b_{ki_k} b_{k+1\, i_{k+1}}| \geqslant \\
&\quad \geqslant \sum_{k=1}^{2n} \big(|B_{ki_k} B_{k+1\, i_{k+1}}| - \operatorname{diam} Y\big) \geqslant \sum_{k=1}^{2n} \big(|A_{ki_k} A_{k+1\, i_{k+1}}| - c - \operatorname{diam} Y\big) = \\
&\quad = \sum_{k=1}^{2n} |a_k a_{k+1}| + (t - c - \operatorname{diam} Y) \cdot 2n \geqslant |a_{1i_1} a_{2n+1\, i_{2n+1}}| + (t - c - \operatorname{diam} Y) \cdot 2n \geqslant \\
&\geqslant |p_{1i_1} p_{2n+1\, i_{2n+1}}| - w + (t - c - \operatorname{diam} Y) \cdot 2n = (d_1 + \ldots + d_{2n}) - w + (t - c - \operatorname{diam} Y) \cdot 2n.
\end{aligned}
$$

Получаем, что

$$
c + \frac{2w}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1} \operatorname{diam} Y \geqslant \frac{2n}{2n+1} t.
$$

В силу того что t можно выбрать сколь угодно близким к $\operatorname{diam} X$, а n — сколь угодно большим, получаем, что $c \geqslant \operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y$.

Теперь в силу произвольности выбранного соответствия R искомая оценка следует из предложения 1. $\square$

Следствие 1. 1) *Предположим, что $A, B \subset \mathbb{R}$, $X, Y \in [\Delta_1]$, A и B — неограниченные. Тогда*

$$
\operatorname{dist}_{GH}(A \times_{\ell^1} X,\, B \times_{\ell^1} Y) \geqslant \left|\frac{\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y}{2}\right|.
$$

2) *Если $A \in [\mathbb{R}]$, $X \in [\Delta_1]$, то*

$$
\operatorname{dist}_{GH}\big(A \times_{\ell^1} X,\, \mathbb{R}\big) \geqslant \frac{\operatorname{diam} X}{2}.
$$

Доказательство. 1) Поскольку $A, B \subset \mathbb{R}$ — неограниченные подмножества, согласно теореме 4 выполнены неравенства

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}_{GH}(A \times_{\ell^1} X,\, B \times_{\ell^1} Y) &\geqslant \frac{\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y}{2}, \\
\operatorname{dist}_{GH}(B \times_{\ell^1} Y,\, A \times_{\ell^1} X) &\geqslant \frac{\operatorname{diam} Y - \operatorname{diam} X}{2},
\end{aligned}
$$

откуда следует искомое неравенство.

2) Применив неравенство теоремы 4 для пространств $A \times_{\ell^1} X$ и $\mathbb{R} \times_{\ell^1} \Delta_1$, получим искомое неравенство. $\square$

Следствие 2. *Пусть X — ограниченное метрическое пространство, $A \subset \mathbb{R}$ — неограниченное подмножество. Тогда для любых неотрицательных t_1, t_2 выполнено*

$$\mathrm{dist}_{GH}\big(A \times_{\ell^1} (t_1X),\, A \times_{\ell^1} (t_2X)\big) = \frac{|t_1 - t_2|}{2} \operatorname{diam} X.$$

Доказательство. Положим $A_t = A \times_{\ell_1} (tX)$. Из теоремы 4 вытекает, что $\mathrm{dist}_{GH}(A_{t_1},\, A_{t_2}) \geqslant \geqslant \frac{|t_1-t_2| \operatorname{diam} X}{2}$. С другой стороны, по теореме 2 верно равенство $\mathrm{dist}_{GH}\big(t_1X,\, t_2X\big) = = |t_1 - t_2| \operatorname{diam} X$. Тогда из леммы 2 следует, что $\mathrm{dist}_{GH}(A_{t_1},\, A_{t_2}) \leqslant \frac{|t_1-t_2| \operatorname{diam} X}{2}$. Следовательно, $\mathrm{dist}_{GH}(A_{t_1},\, A_{t_2}) = \frac{|t_1-t_2|}{2} \operatorname{diam} X$, что и требовалось доказать. □

Следствие 3. *Для произвольного ограниченного метрического пространства X кривая $\mathbb{R} \times_{\ell^1} (tX)\colon t \in [0, +\infty)$ является геодезической в классе Громова – Хаусдорфа.*

Пример 7. *Покажем, что для произвольных $P = A \times_{\ell^1} X$ и $Q = B \times_{\ell^1} Y$ таких, что $A, B \in [\mathbb{R}]$, $X, Y \in [\Delta_1]$, оценка $\mathrm{dist}_{GH}(P, Q) \geqslant |\operatorname{diam}(X) - \operatorname{diam}(Y)|/2$, вообще говоря, неверна.*

Рассмотрим $P = (\mathbb{R} + c) \times_{\ell_1} [0,1]$ и $Q = \mathbb{R} \times_{\ell^1} \big([0,1] + c\big)$. Здесь $\mathbb{R} + c$, $[0,1] + c$ — это пространства $\mathbb{R}$, $[0,1]$ с метриками, индуцированными из $\mathbb{R}$ и увеличенными на константу $c > 0$. Пространства P и Q изометричны посредством тождественного отображения, однако разность диаметров их ограниченных множителей равна c.

Теорема 5. *Для произвольных $\lambda > 1$, $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$\mathrm{dist}_{GH}\big(\mathbb{Z}^n,\, \lambda\mathbb{Z}^n\big) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Пусть $R \in \mathcal{R}\big(\mathbb{Z}^n,\, \lambda\mathbb{Z}^n\big)$ — соответствие с искажением $c := \operatorname{dis} R < \infty$. Так как сдвиг $\mathbb{Z}^n$ на целочисленный вектор является изометрией, то без ограничения общности можно считать, что $(0, 0) \in R$.

Предположим, что R биективно. Тогда рассмотрим шар $B = B^{\mathbb{Z}^n}_{\lambda t}(0)$ для некоторого $t > 0$. Заметим, что $R(B) \subset B' = B^{\lambda\mathbb{Z}^n}_{\lambda t + c}(0)$. Через $N(t)$, $N'(t)$ обозначим количества точек в шарах B и B' соответственно. Согласно теореме 3 при $t \to \infty$ выполнены равенства

$$N(t) = \operatorname{Vol} B^{\mathbb{R}^n}_1(0)\lambda^n t^n\big(1 + o(1)\big), \tag{1}$$

$$N'(t) = \operatorname{Vol} B^{\mathbb{R}^n}_1(0)\Big(t + \frac{c}{\lambda}\Big)^n\big(1 + o(1)\big). \tag{2}$$

Поскольку R биективно, то из включения $R(B) \subset B'$ следует, что $N'(t) \geqslant N(t)$. Однако из формул (1), (2) следует, что $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{N'(t)} = \lambda^n > 1$ — противоречие.

Значит, R не является биективным. Тогда $c \geqslant 1$. В силу произвольности R по предложению 1 получаем искомое неравенство. □

Следствие 4. *Отображение $[\mathbb{R}^n] \times (0; +\infty) \to [\mathbb{R}^n]$, $(A, \lambda) \to \lambda A$ не является непрерывным по λ.*

Следствие 5. *Кривая $\lambda\mathbb{Z}^n$, $\lambda \in (0; \infty)$ не является непрерывной в классе Громова – Хаусдорфа. В частности, она не является геодезической.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богатый С.А., Тужилин А.А. Класс Громова–Хаусдорфа: полнота и геометрия облаков // ArXiv e-prints. 2021. arXiv:2110.06101.

2. Бураго Д., Бураго Ю., Иванов С. Курс метрической геометрии. М.: МЦНМО, 2004. 512 с. (Пер. с англ.: Burago D., Burago Yu., Ivanov S. A Course in Metric Geometry. Providence: AMS, 2001).

3. Эдвардс Д. Структура суперпространства // Исследования по топологии. М.: Мир, 1979. С. 45–62. (Пер. с англ.: Edwards D. The structure of superspace // Studies in Topology. N.Y.: Academic Press, 1975. P. 89–110).

4. Громов М. Группы полиномиального роста и экспансирующие отображения // Публикации Математического института высших научных исследований. 1981. Т. 53. С. 53–78. (Пер. с фр.: Gromov M. Groups of polynomial growth and expanding maps // Publications Mathematiques I.H.E.S. 1981. Vol. 53. P. 53–78).

5. Громов М. Метрические структуры для римановых многообразий. М.: Мир, 1991. 328 с. (Пер. с фр.: Gromov M. Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Paris: Cedic/Fernand Nathan, 1981).

6. Карлссон Г.Э., Мемоли Ф. Характеризация, устойчивость и сходимость методов иерархической кластеризации // Журнал машинного обучения. 2010. Т. 11, № 47. С. 1425–1470. DOI: 10.5555/1756006.1859911. (Пер. с англ.: Carlsson G.E., Memoli F. Characterization, stability and convergence of hierarchical clustering methods // J. Mach. Learn. Res. 2010. Vol. 11. P. 1425–1470).

7. Громов М. Метрические структуры для римановых и неримановых пространств. М.: МЦНМО, 2007. 496 с. (Пер. с англ.: Gromov M. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Boston: Birkhäuser, 1999).

8. Кан Х., Соболев А.В. Распределение точек целочисленной решетки в шаре с центром в диофантовой точке // Математика. 2010. Т. 56, № 1. С. 118–134. (Пер. с англ.: Kang H., Sobolev A.V. Distribution of integer lattice points in a ball centred at a diophantine point // Mathematika. 2010. Vol. 56(1). P. 118–134).

9. Лим С., Мемоли Ф., Смит З. Расстояние Громова–Хаусдорфа между сферами // ArXiv e-prints. 2022. arXiv:2105.00611v5.

10. Тужилин А.А. Лекции по геометрии расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа. М.: МГУ, 2020. 210 с. // ArXiv e-prints. 2019. arXiv:2012.00756.

11. Тужилин А.А. Кто изобрел расстояние Громова–Хаусдорфа? // Историко-математические исследования. 2017. Т. 18. С. 45–62 // ArXiv e-prints. 2016. arXiv:1612.00728.

12. Вихров А. Плотность метрических пространств в общем положении в классе Громова–Хаусдорфа // Топология и ее приложения. 2024. Т. 342. С. 108771. DOI: 10.1016/j.topol.2024.108771.

REFERENCES

1. Bogaty, S.A., Tuzhilin, A.A., 2021, “Gromov – Hausdorff class: its completeness and cloud geometry”, *ArXiv e-prints*, arXiv:2110.06101.

2. Burago, D., Burago, Yu., Ivanov, S., 2001, *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics 33, AMS.

3. Edwards, D., 1975, “The structure of superspace”, in *Studies in Topology*, Academic Press.

4. Gromov, M., 1981, “Groups of polynomial growth and expanding maps”, *Publications Mathematiques I.H.E.S.*, vol. 53, pp. 53–78.

5. Gromov, M., 1981, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Textes Math. 1.

6. Carlsson, G.E., Memoli, F., 2010, “Characterization, stability and convergence of hierarchical clustering methods”, *J. Mach. Learn.*, vol. 11, no. 47, pp. 1425–1470.

7. Gromov, M., 1999, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhäuser.

8. Kang, H., Sobolev, A.V., 2010, “Distribution of integer lattice points in a ball centred at a diophantine point”, *Mathematika*, vol. 56, no. 1, pp. 118–134.

9. Lim, S., Memoli, F., Smith, Z., 2022, “The Gromov – Hausdorff distance between spheres”, *ArXiv e-prints*, arXiv:2105.00611v5.

10. Tuzhilin, A.A., 2019, *Lectures on Hausdorff and Gromov – Hausdorff distance geometry*, arXiv:2012.00756.

11. Tuzhilin, A.A., 2016, “Who invented the Gromov – Hausdorff Distance?”, *ArXiv e-prints*, arXiv:1612.00728.

12. Vihrov, A., 2024, “Denseness of metric spaces in general position in the Gromov – Hausdorff class”, *Topol. Its Appl.*, vol. 342, 108771.

Получено: 15.12.2024
Принято в печать: 07.04.2025