
ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 514.747.2

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-141-159

Классификация неразрешимых алгебр Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления

Ф. И. Лобзин

Лобзин Фёдор Игоревич — МГУ имени М.В. Ломоносова; Московский Центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: fadat@mail.ru

Аннотация

В работе представлена классификация алгебр Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления для алгебр Ли, изоморфных полупрямой сумме нетривиальной полупростой алгебры Ли и ненулевого разрешимого идеала.

Ключевые слова: скобка Пуассона, алгебра Ли, коприсоединенное представление, интегрируемые системы.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:

Лобзин Ф.И. Классификация неразрешимых алгебр Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 141–159.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 514.747.2

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-141-159

Classification of unsolvable Lie algebras with four-dimensional orbits of coadjoint representation

F. I. Lobzin

Lobzin Fedor Igorevich — Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).

e-mail: fadat@mail.ru

Abstract

The paper presents a classification of Lie algebras with four-dimensional coadjoint orbits for Lie algebras that are isomorphic to a semidirect sum of a nontrivial semisimple Lie algebra and a nonzero solvable ideal.

Keywords: Poisson bracket, Lie algebra, coadjoint representation, integrable systems.

Bibliography: 14 titles.

For citation:

Lobzin, F.I. 2025, "Classification of unsolvable Lie algebras with four-dimensional orbits of coadjoint representation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 141–159.

1. Введение

Важнейшим примером пуассонова многообразия является аффинное пространство Π с заданным на нем тензорным полем π^{ij} , удовлетворяющим свойствам

$$\pi^{jk}(x) = -\pi^{kj}(x),$$

$$\pi^{jk}\partial_k\pi^{lm} + \pi^{lk}\partial_k\pi^{mj} + \pi^{mk}\partial_k\pi^{jl} = 0.$$

Тензорное поле с такими свойствами называется тензором Пуассона.

Простейшим примером такого тензора является тензор, не зависящий от координат, однако изучение свойств подобного пуассонова многообразия сводится к простым задачам линейной алгебры. Следующим по сложности и важным примером является тензор Пуассона, линейно зависящий от координат x^k на Π :

$$\pi^{ij} = c_k^{ij} x^k. \quad (1)$$

Тогда для тензора c_k^{ij} условия, выписанные ранее, переписываются в виде

$$c_k^{ij} = -c_k^{ji},$$

$$c_e^{ad} c_d^{bc} + c_e^{bd} c_d^{ca} + c_e^{cd} c_d^{ab} = 0.$$

Отсюда видно, что любую линейную пуассонову структуру можно интерпретировать как тензор Пуассона на $\mathfrak{g}^*$ — пространстве, сопряженном некоторой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ со структурными константами из формулы (1).

Такой подход рассмотрен, например, в книге В.И. Арнольда [1]. Симплектические слои такого пуассонова многообразия совпадают с орбитами коприсоединенного представления. Иными словами, механическая система с n степенями свободы при таком подходе описывается алгеброй Ли, у которой орбиты коприсоединенного представления общего положения имеют размерность $2n$. Этот факт вызывает интерес к построению алгебр Ли с орбитами определенных размерностей, их классификации и изучению свойств получившихся интегрируемых систем.

Простейший случай среди интегрируемых систем — это системы с одной степенью свободы. Они моделируются алгебрами Ли, у которых орбиты коприсоединенного представления общего положения двумерные. Полная классификация таких алгебр Ли проведена в [2], где также приводятся ссылки на работы, посвященные конкретным интегрируемым системам, соответствующим этим алгебрами. В работе [3] изучена топология орбит общего положения в алгебрах из списка основной теоремы в [2].

Настоящая работа посвящена следующему по сложности и важному случаю интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Такие системы моделируются алгебрами Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления общего положения. Полная классификация таких алгебр Ли может быть полезна для решения различных задач теории интегрируемых систем, например, для построения полных бикоммутативных наборов многочленов и проверки обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко, сформулированной в [4], или для построения геодезических потоков на орбитах коприсоединенного представления с использованием конструкции, предложенной в [5]. В частности, в работе [6] рассматриваются примеры алгебр Ли с двумерными и четырехмерными орбитами коприсоединенного представления с рациональными инвариантами в контексте конструкции из [5].

Результаты о классификации алгебр Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления общего положения, полученные автором, основаны на известной теореме Леви, согласно которой любая алгебра изоморфна полупрямой сумме полупростой алгебры и разрешимого идеала. В данной статье рассматривается случай полупрямой суммы нетривиальной

полупростой алгебры с некоторым разрешимым идеалом. Для завершения классификации остается рассмотреть случай разрешимых алгебр Ли, который будет разобран в последующих работах автора.

2. Постановка задачи

Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над полем нулевой характеристики со структурными константами c_{ij}^k , $\mathcal{G}$ — ее группа Ли, $\mathfrak{g}^*$ — пространство линейных функционалов над $\mathfrak{g}$, а $\mathcal{A} = c_{ij}^k x_k$ — тензорное поле на $\mathfrak{g}^*$, зависящее от координат x_i , которое мы будем называть тензором Пуассона–Ли для алгебры $\mathfrak{g}$. Хорошо известно, что орбиты Ad^* (коприсоединенного представления группы $\mathcal{G}$ на пространстве $\mathfrak{g}^*$) являются симплектическими слоями пуассонова многообразия $(\mathfrak{g}^*, \mathcal{A})$. На практике оказывается удобно пользоваться следующим известным фактом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Размерность орбиты коприсоединенного представления общего положения равна $\max_{x \in \mathfrak{g}^*} \text{rank}(\mathcal{A}(x))$.*

Для дальнейших рассуждений будем использовать следующую формулировку известной теоремы Леви.

ТЕОРЕМА 1 (Леви). *Пусть $\mathfrak{g}$ — некоторая алгебра Ли, тогда возможны только следующие три случая:*

- $\mathfrak{g}$ полупроста,
- $\mathfrak{g}$ изоморфна $\mathfrak{s} +_{\varphi} \mathfrak{h}$ — полупрямой сумме нетривиальной полупростой алгебры и разрешимого идеала,
- $\mathfrak{g}$ разрешима.

ЗАМЕЧАНИЕ 18. *Здесь и далее тривиальной полупростой алгеброй мы будем считать одномерную алгебру Ли или алгебру Ли, состоящую из 0.*

Размерности орбит общего положения Ad^* полупростых алгебр Ли фактически выписаны, например, в [4]. Поэтому нетривиальными, в контексте классификации алгебр с четырехмерными орбитами Ad^* общего положения, являются второй и третий случаи. Данная статья посвящена классификации алгебр Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления, относящихся ко второму случаю.

В контексте интегрируемых систем нам интересны в первую очередь вещественные алгебры Ли. Приведем основной результат из работы [2], который сформулирован там для вещественных алгебр Ли.

ТЕОРЕМА 2 ([2]). *С точностью до прямой суммы с центром произвольной размерности существуют одна бесконечная серия и шесть исключительных алгебр Ли над полем действительных чисел, размерность орбит коприсоединенного представления которых равна 2:*

- 1) бесконечная серия — полупрямые суммы вида $\mathbb{R} +_{\varphi} \mathbb{R}^n$;
- 2) трехмерная простая алгебра Ли $\mathfrak{so}(3)$;
- 3) трехмерная простая алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$;

- 4) *четырёхмерная разрешимая алгебра Ли $A_{4,8}$, которая в подходящем базисе e_i задается коммутационными соотношениями (указаны только ненулевые)*

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = -e_3;$$

- 5) *четырёхмерная разрешимая алгебра Ли $A_{4,10}$, которая в подходящем базисе e_i задается коммутационными соотношениями (указаны только ненулевые)*

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_4] = -e_3, \quad [e_3, e_4] = e_2;$$

- 6) *пятимерная разрешимая алгебра Ли $A_{5,3}$, которая в подходящем базисе e_i задается коммутационными соотношениями (указаны только ненулевые)*

$$[e_3, e_4] = e_5, \quad [e_3, e_5] = e_1, \quad [e_4, e_5] = e_3;$$

- 7) *шестимерная нильпотентная алгебра Ли $A_{6,3}$, которая в подходящем базисе e_i задается коммутационными соотношениями (указаны только ненулевые)*

$$[e_1, e_2] = e_6, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_2, e_3] = e_5.$$

Основную теорему 3 в этой работе мы докажем над полем комплексных чисел. Это сделано, в первую очередь, для удобства записи и рассуждений. Полную же классификацию для вещественного случая мы получим позже при помощи следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ и $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — алгебры Ли над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно, такие что их структурные константы совпадают как элементы поля $\mathbb{R}$. Тогда размерности их орбит общего положения относительно коприсоединенного представления равны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 1 нам необходимо доказать равенство

$$\max_{x \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{R}})^*} \text{rank}(\mathcal{A}^{\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}}(x)) = \max_{x \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*} \text{rank}(\mathcal{A}^{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(x)),$$

которое следует из того, что у вещественной матрицы ранг над полем вещественных и комплексных чисел один и тот же. $\square$

Классификация будет выполнена с точностью до изоморфизма. Благодаря предложению 2 оказывается возможным изучать этот вопрос над полем комплексных чисел. Поэтому далее, если не указано иного, все алгебры будут пониматься как алгебры над полем комплексных чисел. Чтобы получить полную классификацию вещественных алгебр с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 4, будет необходимо классифицировать все вещественные формы комплексных алгебр, являющихся представителями классов изоморфности. Классификации вещественных алгебр с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 4 посвящена теорема 5.

3. Основной результат

Сформулируем, наконец, основной результат этой статьи.

ТЕОРЕМА 3. Пусть у некоторой комплексной алгебры Ли, представимой в виде полупрямой суммы $\mathfrak{s} +_{\varphi} \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{s}$ — нетривиальная полупростая алгебра Ли, а $\mathfrak{h}$ — разрешимый идеал, орбиты общего положения коприсоединенного представления четырехмерны. Тогда она изоморфна одной из следующих алгебр:

- *прямая сумма полупростой и разрешимой алгебр с двумерными орбитами коприсоединенного представления общего положения;*
- *полупрямая сумма $sl(2) +_{\varphi} \mathbb{C}^2$ по стандартному представлению;*
- *полупрямая сумма $sl(2) +_{\varphi} \mathbb{C}^3$ по присоединенному представлению.*

ЗАМЕЧАНИЕ 19. *Первый случай из этого списка фактически сводится к всевозможным попарным суммам комплексификаций алгебр из списка в теореме 2. Однако теорема 2 доказана только для вещественных алгебр Ли. Ее можно обобщить и для алгебр над некоторыми другими полями, что будет необходимо при работе с разрешимыми алгебрами Ли. Это обобщение автор планирует сделать в своей следующей работе, посвященной данной теме.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что прямая сумма алгебр с двумерными орбитами Ad^* общего положения будет алгеброй с четырехмерными орбитами Ad^* общего положения. Пусть теперь представление φ , связанное с полупрямой суммой $\mathfrak{s} +_{\varphi} \mathfrak{h}$, нетривиально. Разберем отдельно три варианта.

1. Разрешимый идеал $\mathfrak{h}$ коммутативен и размерность орбит Ad^* подалгебры $\mathfrak{s}$ общего положения равна 2. Рассмотрим сначала случай нетривиальной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{s}$, размерность орбиты Ad^* общего положения которой равна 2. Согласно теореме 2 алгебра $\mathfrak{s}$ изоморфна либо $sl(2)$, либо $so(3)$. Хорошо известно, что над полем комплексных чисел эти алгебры изоморфны. Воспользуемся теперь классификацией всевозможных неприводимых представлений $sl(2)$.

ТЕОРЕМА 4 (см. [7]). *Пусть в $sl(2, \mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$ выбран базис h, y, x , такой что $[h, y] = -2y$, $[h, x] = 2x$, $[x, y] = h$. Тогда для любого неприводимого представления φ алгебры Ли $sl(2, \mathbb{F})$ на векторном пространстве V существует базис $v_0, \dots, v_{n-1}$ в V , такой что*

$$[h, v_i] = (n-1-2i)v_i, \quad [y, v_i] = (i+1)v_{i+1}, \quad [x, v_i] = (n-i)v_{i-1}, \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad v_{-1} = v_n = 0.$$

При помощи этой теоремы оказывается возможным доказать следующее утверждение, интересное не только в контексте поставленной задачи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Размерность орбиты коприсоединенного представления общего положения алгебры $sl(2, \mathbb{C}) +_{\varphi} V$ (или $sl(2, \mathbb{R}) +_{\varphi} V$) равна*

- *четырем, если размерность V равна двум или трем;*
- *шести в остальных случаях.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тензор Пуассона–Ли для таких алгебр выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{sl(2)} & * \\ * & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{A}^{sl(2)}$ — тензор Пуассона–Ли для $sl(2)$, а $*$ — матрица размера $3 \times n$. Далее для явного описания тензоров Пуассона–Ли этих алгебр мы будем пользоваться теоремой 4. Из вида матрицы ясно, что их ранг не превышает 6. В статье [8] разобраны все случаи, когда представление раскладывается в сумму двумерных. Из этих результатов следует, что единственный случай среди полупрямых сумм $sl(2)$ с коммутативным идеалом по представлению, разложимому на двумерные, с четырехмерными орбитами Ad^* общего положения размерности 4 — это, когда $\dim V = 2$. В работе [8] рассматривались только вещественные алгебры, однако, согласно теореме 2, интересующий нас результат из [8] верен и над полем комплексных чисел. Пусть теперь

размерность V равна 3. Существует только одно трехмерное представление алгебры Ли $sl(2)$, поэтому для доказательства утверждения предложения 3 в этом случае достаточно показать, что максимум по всем возможным коекторам с координатами (h, y, x, v_0, v_1, v_2) ранга тензора Пуассона–Ли

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2y & 2x & 2v_0 & 0 & -2v_2 \\ 2y & 0 & -h & v_1 & 2v_2 & 0 \\ -2x & h & 0 & 0 & 2v_0 & v_1 \\ -2v_0 & -v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2v_2 & -2v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 2v_2 & 0 & -v_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

равен 4. Определитель $\mathcal{A}$ равен квадрату определителя подматрицы $\mathcal{A}'$, где

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 2v_0 & 0 & -2v_2 \\ v_1 & 2v_2 & 0 \\ 0 & 2v_0 & v_1 \end{pmatrix}.$$

Определитель $\mathcal{A}'$ равен 0, а значит ранг $\mathcal{A}$ меньше 6. Покажем, что он равен 4. Рассмотрим минор, полученный вычеркиванием первой и четвертой строки и первого и четвертого столбца:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -h & 2v_2 & 0 \\ h & 0 & 2v_0 & v_1 \\ -2v_2 & -2v_0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4v_1^2 v_2^2.$$

Пусть теперь размерность V равна $n > 3$ и представление φ неприводимо. Тогда для некоторого коектора $(h, y, x, v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ тензор Пуассона–Ли будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2y & 2x & (n-1)v_0 & (n-3)v_1 & \dots & (n-1-2i)v_i & \dots & (2-n)v_{n-1} \\ 2y & 0 & -h & v_1 & 2v_2 & \dots & (i+1)v_{i+1} & \dots & 0 \\ -2x & h & 0 & 0 & (n-1)v_0 & \dots & (n-i)v_{i-1} & \dots & v_{n-2} \\ -(n-1)v_0 & -v_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ -(n-3)v_1 & -2v_2 & -(n-1)v_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ -(n-1-2i)v_i & -(i+1)v_{i+1} & -(n-i)v_{i-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ (n-2)v_{n-1} & 0 & -v_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Как уже говорилось ранее, ранг этого тензора меньше или равен 6. Для того чтобы показать, что максимум ранга этого тензора по всем коекторам равен 6, рассмотрим этот тензор для коектора вида $(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ и минор в нем, полученный вычеркиванием всех столбцов и строчек кроме первых шести. Этот минор будет равен $(n-2)^2(n-3)^2v_1^6$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим еще два частных случая, которые в дальнейшем помогут нам завершить доказательство предложения 3.

Пусть φ — прямая сумма одного трехмерного и одного двумерного представлений. Тогда тензор Пуассона–Ли для некоторого ковектора $(h, y, x, v_0^1, v_1^1, v_2^1, v_0^2, v_1^2)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2y & 2x & 2v_0^1 & 0 & -2v_2^1 & v_0^2 & -v_1^2 \\ 2y & 0 & -h & v_1^1 & 2v_2^1 & 0 & v_1^2 & 0 \\ -2x & h & 0 & 0 & 2v_0^1 & v_1^1 & 0 & v_0^2 \\ -2v_0^1 & -v_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2v_2^1 & -2v_0^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2v_2^1 & 0 & -v_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_0^2 & -v_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1^2 & 0 & -v_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг этого тензора меньше или равен 6. Рассмотрим минор, полученный вычеркиванием четвертых и пятых столбцов и строчек. Этот минор равен $(-2v_2^1 v_1^2 v_0^2 + v_1^2 v_1^2 v_1^2)^2$, что не равно тождественно нулю, а значит, максимум ранга этого тензора по всем ковекторам равен 6.

Пусть φ — прямая сумма двух трехмерных представлений. Тензор Пуассона–Ли для некоторого ковектора $(h, y, x, v_0^1, v_1^1, v_2^1, v_0^2, v_1^2, v_2^2)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2y & 2x & 2v_0^1 & 0 & -2v_2^1 & 2v_0^2 & 0 & -2v_2^2 \\ 2y & 0 & -h & v_1^1 & 2v_2^1 & 0 & v_1^2 & 2v_2^2 & 0 \\ -2x & h & 0 & 0 & 2v_0^1 & v_1^1 & 0 & 2v_0^2 & v_1^2 \\ -2v_0^1 & -v_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2v_2^1 & -2v_0^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2v_2^1 & 0 & -v_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2v_0^2 & -v_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2v_2^2 & -2v_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2v_2^2 & 0 & -v_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, рассмотрим в нем минор, полученный вычеркиванием четвертых, пятых и девярых столбцов и строчек. Этот минор равен $(-4v_1^2 v_2^1 v_0^2 + 4v_0^2 v_2^2 v_1^2)^2$, то есть он не равен тождественно нулю. Получается, что для почти всех ковекторов ранг этого тензора равен 6.

Если размерность V равна $n > 3$ и представление φ приводимо, то возможны следующие случаи:

- (1) разложение представления φ на неприводимые представления содержит неприводимое представление размерности четыре или больше;
- (2) разложение представления φ на неприводимые представления содержит хотя бы одно двумерное представление и хотя бы одно трехмерное представление;
- (3) разложение представления φ на неприводимые представления содержит только трехмерные представления;
- (4) разложение представления φ на неприводимые представления содержит только двумерные представления.

Если алгебра принадлежит первым трем типам (в смысле предыдущего списка), то она содержит в качестве подалгебры соответственно одну из трех подалгебр:

- (1) $sl(2) +_{\varphi} V$, $\dim V > 3$ и φ неприводимо;
- (2) $sl(2) +_{\varphi} V$, $\dim V = 5$ и φ раскладывается в прямую сумму двумерного и трехмерного представлений;

- (3) $sl(2) +_{\varphi} V$, $\dim V = 6$ и φ раскладывается в прямую сумму двух трехмерных представлений.

Ясно, что размерность орбиты Ad^* общего положения у алгебры больше или равна, чем у ее подалгебры, и следовательно, размерность орбиты Ad^* общего положения алгебр первых трех типов равна 6. Как говорилось ранее, случай, когда все неприводимые представления в разложении φ двумерны, разобран в работе [8]. Предложение 3 доказано. $\square$

2. Разрешимый идеал $\mathfrak{h}$ некоммутативен и размерность орбит Ad^* подалгебры $\mathfrak{s}$ общего положения равна 2. Для того, чтобы воспользоваться результатами, касающимся представлений $sl(2)$, докажем лемму.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{s} +_{\varphi} \mathfrak{h}$ — полупрямая сумма по представлению φ , и пусть размерность орбиты общего положения действия Φ^* (сопряженного к Φ — представлению группы, соответствующему φ) равна k . Тогда размерность орбиты общего положения коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{s} +_{\varphi} \mathfrak{h}$ больше или равна $2k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Размерность орбиты Ad^* общего положения для алгебры $\mathfrak{s} +_{\varphi} \mathfrak{h}$ равна максимуму по всем $z \in (\mathfrak{s} +_{\varphi} \mathfrak{h})^*$ из рангов матрицы соответствующего тензора Пуассона–Ли, который имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\mathfrak{s}} & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B}^{\top} & \mathcal{A}^{\mathfrak{h}} \end{pmatrix}.$$

Максимум по всем $z \in (\mathfrak{s} +_{\varphi} \mathfrak{h})^*$ не меньше, чем максимум по всем функционалам z , равным нулю на подалгебре $\mathfrak{s}$, т.е. максимум из рангов матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B}^{\top} & \mathcal{A}^{\mathfrak{h}} \end{pmatrix},$$

а ранг этой матрицы не меньше ранга матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B}^{\top} & 0 \end{pmatrix},$$

который равен удвоенной размерности орбиты общего положения действия Φ^* , поскольку фактически в матрице $\mathcal{B}$ по строкам записаны координаты векторов $\varphi^*(e_i)z$ (где e_i образуют базис в $\mathfrak{s}$), порождающих касательное пространство к орбите действия Φ^* в точке z . $\square$

Нетрудно понять, что при доказательстве предложения 3 фактически показано, что размерность орбит Φ^* общего положения не меньше 3 во всех случаях, когда размерность представления φ больше 3. А значит, согласно лемме 1, нам необходимо разобрать только случаи, когда представление φ двумерно или трехмерно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Не существует алгебры Ли $sl(2) +_{\varphi} \mathfrak{h}$, такой что представление φ неприводимое двумерное и идеал $\mathfrak{h}$ некоммутативен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из тождества Якоби следует коммутативность идеала $\mathfrak{h}$. Пусть v_0, v_1 из $\mathfrak{h}$ таковы, что, с одной стороны, представление φ действует на них по формулам из теоремы 4, а с другой стороны, $[v_0, v_1] = \alpha v_0 + \beta v_1$. Тогда

$$[h, [v_0, v_1]] + [v_1, [h, v_0]] + [v_0, [v_1, h]] = [h, \alpha v_0 + \beta v_1] + [v_1, v_0] + [v_0, v_1] = \alpha v_0 - \beta v_1 = 0,$$

откуда следует, что $\alpha = \beta = 0$ и идеал $\mathfrak{h}$ коммутативен. $\square$

Для трехмерного представления φ уже существует алгебра вида $sl(2) +_{\varphi} \mathfrak{h}$ с некоммутативным идеалом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть алгебра Ли представима в виде $sl(2) +_{\varphi} \mathfrak{h}$, причем представление φ трехмерно, а идеал $\mathfrak{h}$ некоммутативен. Тогда идеал $\mathfrak{h} = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ задается коммутационными соотношениями $[v_0, v_1] = 2v_0$, $[v_1, v_2] = 2v_2$, $[v_0, v_2] = v_1$, и представление φ действует на $\mathfrak{h}$ по формулам из теоремы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[v_i, v_j] = c_{ij}^k v_k$. Выпишем тождество Якоби:

$$\begin{aligned} [x, [v_0, v_1]] + [v_1, [x, v_0]] + [v_0, [v_1, x]] &= [x, c_{01}^0 v_0 + c_{01}^1 v_1 + c_{01}^2 v_2] - 2[v_0, v_0] = \\ &= 2c_{01}^1 v_0 + c_{01}^2 v_1 = 0 \Rightarrow c_{01}^1 = c_{01}^2 = 0. \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} [y, [v_1, v_2]] + [v_2, [y, v_1]] + [v_1, [v_2, y]] &= [y, c_{12}^0 v_0 + c_{12}^1 v_1 + c_{12}^2 v_2] + 2[v_2, v_2] = \\ &= c_{12}^0 v_1 + 2c_{12}^1 v_2 = 0 \Rightarrow c_{12}^0 = c_{12}^1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [h, [v_0, v_2]] + [v_2, [h, v_0]] + [v_0, [v_2, h]] &= [h, c_{02}^0 v_0 + c_{02}^1 v_1 + c_{02}^2 v_2] + 2[v_2, v_0] + 2[v_0, v_2] = \\ &= 2c_{02}^0 v_0 - 2c_{02}^2 v_2 = 0 \Rightarrow c_{02}^0 = c_{02}^2 = 0. \end{aligned}$$

Получаем, что $[v_0, v_1] = c_{01}^0 v_0$, $[v_0, v_2] = c_{02}^1 v_1$, $[v_1, v_2] = c_{12}^2 v_2$. Вычислим значения $c_{01}^0, c_{02}^1, c_{12}^2$:

$$\begin{aligned} [x, [v_1, v_2]] + [v_2, [x, v_1]] + [v_1, [v_2, x]] &= [x, c_{12}^2 v_2] + 2[v_2, v_0] = c_{12}^2 v_1 - 2c_{02}^1 v_1 = 0 \Rightarrow c_{12}^2 = 2c_{02}^1, \\ [x, [v_0, v_2]] + [v_2, [x, v_0]] + [v_0, [v_2, x]] &= [x, c_{02}^1 v_1] - [v_0, v_1] = 2c_{02}^1 v_0 - c_{01}^0 v_0 = 0 \Rightarrow c_{01}^0 = 2c_{02}^1. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что если $\mathfrak{h}$ некоммутативен, то с точностью до изоморфизма $c_{01}^0 = 2$, $c_{02}^1 = 1$, $c_{12}^2 = 2$. Проверим, наконец, тождество Якоби для оставшихся троек:

$$\begin{aligned} [y, [v_0, v_1]] + [v_1, [y, v_0]] + [v_0, [v_1, y]] &= [y, 2v_0] - 2[v_0, v_2] = 2v_1 - 2v_1 = 0, \\ [y, [v_0, v_2]] + [v_2, [y, v_0]] + [v_0, [v_2, y]] &= [y, v_1] + [v_2, v_1] = 2v_2 - 2v_2 = 0, \\ [h, [v_0, v_1]] + [v_1, [h, v_0]] + [v_0, [v_1, h]] &= [h, 2v_0] + 2[v_1, v_0] = 4v_0 - 4v_0 = 0, \\ [h, [v_1, v_2]] + [v_2, [h, v_1]] + [v_1, [v_2, h]] &= [h, 2v_2] + 2[v_1, v_2] = -4v_2 + 4v_2 = 0. \end{aligned}$$

Предложение 5 доказано. $\square$

Нетрудно заметить, что идеал $\mathfrak{h}$ из предыдущего предложения не является разрешимым, а значит алгебр вида $sl(2) +_{\varphi} \mathfrak{h}$ с орбитами Ad^* общего положения размерности 4 и с нетривиальным φ и некоммутативным $\mathfrak{h}$ не существует.

3. Размерность орбит Ad^* общего положения подалгебры $\mathfrak{s}$ равна 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Не существует алгебры Ли, представимой в виде суммы по нетривиальному представлению нетривиальной полупростой алгебры Ли с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 4 и разрешимого идеала.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из результатов из статьи [4] следует, что над полем комплексных чисел существует только одна полупростая алгебра Ли с орбитами Ad^* общего положения размерности 4 и она изоморфна $sl(2) \oplus sl(2)$. Ясно, что в алгебре $(sl(2) \oplus sl(2)) +_{\varphi} \mathfrak{h}$ есть идеал, изоморфный полупрямой сумме $sl(2) +_{\varphi_1} \mathfrak{h}$ по нетривиальному представлению φ_1 . Получаем, что алгебра $(sl(2) \oplus sl(2)) +_{\varphi} \mathfrak{h}$ изоморфна полупрямой сумме $sl(2) +_{\varphi_2} (sl(2) +_{\varphi_1} \mathfrak{h})$ и предложение следует из предложения 3 и леммы 1. $\square$

Теорема 3 полностью доказана. $\square$

4. Следствие из теоремы 3 для вещественных алгебр Ли

Основной практический интерес представляют интегрируемые системы, соответствующие вещественным алгебрам Ли. Этот раздел посвящен работе с вещественными формами комплексной алгебры $sl(2)$ и ее полупрямых сумм. Далее мы будем пользоваться общепринятыми обозначениями $sl(2, \mathbb{C})$ для комплексной алгебры и $sl(2, \mathbb{R})$ и $so(3, \mathbb{R})$ для вещественных алгебр. Докажем следствие из теоремы 3 для вещественных алгебр Ли.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathfrak{g}$ некоторой вещественной алгебры, представимой в виде полупрямой суммы $\mathfrak{s} +_{\varphi} \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{s}$ — нетривиальная полупростая алгебра Ли, а $\mathfrak{h}$ — разрешимый идеал, орбиты общего положения коприсоединенного представления четырехмерны. Тогда она изоморфна одной из следующих алгебр:

- прямая сумма полупростой и разрешимой алгебры с двумерными орбитами коприсоединенного представления общего положения;
- полупрямая сумма $sl(2, \mathbb{R}) +_{\varphi} \mathbb{R}^2$ по стандартному представлению;
- полупрямая сумма $sl(2, \mathbb{R}) +_{\varphi} \mathbb{R}^3$ по присоединенному представлению;
- полупрямая сумма $so(3, \mathbb{R}) +_{\varphi} \mathbb{R}^3$ по стандартному трехмерному представлению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 следует, что список из теоремы 3 можно воспринимать как список комплексификаций всех вещественных алгебр Ли с орбитами общего положения Ad^* размерности 4. Иными словами, для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть всевозможные вещественные формы алгебр из списка в теореме 3. Вещественная форма прямой суммы алгебры Ли — это прямая сумма вещественных форм, следовательно, первый случай сводится к всевозможным прямым суммам алгебр из списка в теореме 2.

Разберемся теперь с оставшимися случаями. Пусть $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — комплексная алгебра Ли, а $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ — ее вещественная форма. Тогда из разложения $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ следует существование естественной инволюции σ , удовлетворяющей свойствам:

- (1) $\sigma(\sigma(\xi)) = \xi$;
- (2) $\sigma(\xi + \eta) = \sigma(\xi) + \sigma(\eta)$;
- (3) $\sigma(\lambda\xi) = \bar{\lambda}\sigma(\xi)$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
- (4) $\sigma([\xi, \eta]) = [\sigma(\xi), \sigma(\eta)]$.

Более того, если определена инволюция алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, удовлетворяющая этим свойствам, то по ней однозначно восстанавливается вещественная форма. Действительно, множество неподвижных точек инволюции σ замкнуто относительно сложения, умножения на вещественный скаляр и коммутации. Покажем единственность. Разложение $\xi = \frac{1}{2}(\xi + \sigma(\xi)) + i\frac{1}{2i}(\xi - \sigma(\xi))$ единственно, так как если $\xi = \eta + i\theta$, то $\sigma(\xi) = \eta - i\theta$, откуда $\eta = \frac{1}{2}(\xi + \sigma(\xi))$ и $\theta = \frac{1}{2i}(\xi - \sigma(\xi))$. Таким образом, для классификации вещественных форм нам достаточно классифицировать все возможные инволюции σ .

В рассматриваемой ситуации верно следующее простое утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть некоторая комплексная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна полупрямой сумме $\mathfrak{s} +_{\varphi} \mathbb{C}^n$ полупростой алгебры $\mathfrak{s}$ и коммутативного идеала $\mathbb{C}^n$. Тогда для инволюции σ , удовлетворяющей свойствам 1-4, верно, что $\sigma(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}$ и $\sigma(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^n$. ■

Пусть алгебра изоморфна $sl(2, \mathbb{C}) +_{\varphi} \mathbb{C}^2$ ($sl(2, \mathbb{C}) +_{\varphi} \mathbb{C}^3$). И пусть σ — отображение из этой алгебры в себя, удовлетворяющее свойствам 1–4, выписанным ранее. Из леммы 2 получаем, что в алгебре $sl(2, \mathbb{C}) +_{\varphi} \mathbb{C}^2$ ($sl(2, \mathbb{C}) +_{\varphi} \mathbb{C}^3$) идеал $\mathbb{C}^2$ ($\mathbb{C}^3$) будет инвариантен относительно σ . Аналогично, из леммы 2 следует, что подалгебра $sl(2, \mathbb{C})$ инвариантна относительно σ .

Изучим теперь, какие инволюции, удовлетворяющие свойствам 1–4, бывают на алгебре $sl(2, \mathbb{C})$. На самом деле, решение этой задачи известно в общем случае, однако мы проведем здесь эти рассуждения для рассматриваемого частного случая явно. Из свойств 2 и 4 инволюции σ получаем

$$-2\sigma(y) = \sigma([h, y]) = [\sigma(h), \sigma(y)], \quad 2\sigma(x) = \sigma([h, x]) = [\sigma(h), \sigma(x)]. \quad (2)$$

Легко проверить, что полученные соотношения для $\sigma(h)$ в $sl(2, \mathbb{C})$ могут быть выполнены только если $\sigma(h) = ah$. Тогда из первого свойства инволюции σ следует, что $a = \pm 1$. Пусть для начала $a = 1$, тогда из равенств (2) получаем:

$$\begin{cases} \sigma(h) = h, \\ \sigma(x) = x, \\ \sigma(y) = y. \end{cases}$$

Иначе говоря, в этом случае инволюция задается естественным образом: $\sigma(\xi + i\eta) = \xi - i\eta$. Вещественная форма $sl(2, \mathbb{C})$ при такой инволюции изоморфна $sl(2, \mathbb{R})$. По предложению 3 получаем, что существуют два случая алгебр, представимых в виде $sl(2, \mathbb{R}) +_{\varphi} V$, с орбитами Ad^* общего положения размерности 4:

- полупрямая сумма $sl(2, \mathbb{R}) +_{\varphi} \mathbb{R}^2$ по стандартному представлению;
- полупрямая сумма $sl(2, \mathbb{R}) +_{\varphi} \mathbb{R}^3$ по присоединенному представлению.

Пусть теперь $a = -1$, тогда из равенств 2 получаем:

$$\begin{cases} \sigma(h) = -h, \\ \sigma(x) = y, \\ \sigma(y) = x. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $\sigma([x, y]) = [\sigma(x), \sigma(y)]$. Распространим эту инволюцию на всю алгебру $sl(2, \mathbb{C})$ при помощи свойств 1–3. Множество неподвижных элементов относительно такой инволюции натянуто на ih , $\frac{x+y}{2}$, $i\frac{x-y}{2}$, и нетрудно проверить, что это векторное пространство над полем действительных чисел, с естественным ограничением коммутатора изоморфно $so(3, \mathbb{R})$.

Остается определить то, каким образом σ отображает коммутативный идеал. Хорошо известно, что не существует неприводимых четномерных представлений $so(3)$. Этот факт в рассматриваемом случае можно также доказать, если попытаться построить на $sl(2, \mathbb{C}) +_{\varphi} (\mathbb{C}^2)$ инволюцию с описанными свойствами.

Определим теперь действие инволюции σ на подпространстве $\mathbb{C}^3$ алгебры $so(3) +_{\varphi} (\mathbb{C}^3)$. Воспользуемся свойством 4 инволюции σ :

$$-[h, \sigma(v_1)] = [\sigma(h), \sigma(v_1)] = \sigma([h, v_1]) = 0,$$

$$[x, \sigma(v_2)] = [\sigma(y), \sigma(v_2)] = \sigma([y, v_2]) = 0,$$

$$[y, \sigma(v_0)] = [\sigma(x), \sigma(v_0)] = \sigma([x, v_0]) = 0.$$

Поскольку у элементов представления $\varphi(h)$, $\varphi(y)$, $\varphi(x)$ ядро определяется однозначно, получаем

$$\sigma(v_0) = \alpha v_2, \quad \sigma(v_1) = \beta v_1, \quad \sigma(v_2) = \gamma v_0.$$

Определим теперь значения α, β, γ :

$$\alpha v_1 = [x, \sigma(v_0)] = [\sigma(y), \sigma(v_0)] = \sigma([y, v_0]) = \sigma(v_1) = \beta v_1,$$

$$2\beta v_0 = [x, \sigma(v_1)] = [\sigma(y), \sigma(v_1)] = \sigma([y, v_1]) = 2\sigma(v_2) = 2\gamma v_0.$$

Получаем, что $\alpha = \beta = \gamma$, и из свойства $\sigma(\sigma(\xi)) = \xi$ следует, что $\alpha = \beta = \gamma = 1$ или $\alpha = \beta = \gamma = -1$. Убедимся, что выполняется свойство 4 инволюции σ :

$$2\alpha v_2 = [y, \sigma(v_1)] = [\sigma(x), \sigma(v_1)] = \sigma([x, v_1]) = 2\sigma(v_0) = 2\alpha v_2,$$

$$2\alpha v_1 = [y, \sigma(v_2)] = [\sigma(y), \sigma(v_2)] = \sigma([y, v_2]) = 2\sigma(v_2) = 2\alpha v_1,$$

$$2\alpha v_2 = [-h, \sigma(v_0)] = [\sigma(h), \sigma(v_0)] = \sigma([h, v_0]) = 2\sigma(v_0) = 2\alpha v_2,$$

$$-2\alpha v_0 = [-h, \sigma(v_2)] = [\sigma(h), \sigma(v_2)] = \sigma([h, v_2]) = -2\sigma(v_2) = -2\alpha v_0.$$

Итак, получается, что на базисных векторах алгебры $sl(2, \mathbb{C}) +_{\varphi} \mathbb{C}^3$ инволюция σ при $\alpha = -1$ может действовать только следующим образом:

$$\sigma(h) = -h, \sigma(y) = x, \sigma(x) = y, \sigma(v_0) = \alpha v_2, \sigma(v_1) = \alpha v_1, \sigma(v_2) = \alpha v_0, \alpha = \pm 1.$$

На всю алгебру $sl(2, \mathbb{C}) +_{\varphi} \mathbb{C}^3$ инволюция распространяется таким образом, чтобы удовлетворять первым трем свойствам. Множество неподвижных элементов относительно такой инволюции при $\alpha = 1$ натянуто на $ih, \frac{x+y}{2}, i\frac{x-y}{2}, v_1, v_0 + v_2, i(v_0 - v_2)$, а при $\alpha = -1$ натянуто на $ih, \frac{x+y}{2}, i\frac{x-y}{2}, iv_1, i(v_0 + v_2), -(v_0 - v_2)$. Если взять эти векторы в качестве базисных и рассмотреть это векторное пространство над полем действительных чисел, с естественным ограничением коммутатора оно будет изоморфно $so(3, \mathbb{R}) +_{\varphi} \mathbb{R}^3$, где сумма берется по стандартному представлению $so(3, \mathbb{R})$. $\square$

5. Свойства и приложения

Инварианты коприсоединенного представления и топология орбит.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{C}$ называется функцией Казимира или Ad^* -инвариантной функцией, если она постоянна на всех орбитах коприсоединенного представления.

На практике функции Казимира удобно вычислять при помощи следующего известного утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Функция f — функция Казимира для алгебры Ли с тензором Пуассона–Ли $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}(df) = 0$.

Набор инвариантов коприсоединенного представления для прямых сумм получается объединением наборов инвариантов каждого слагаемого. Вычислим эти инварианты для $sl(2) +_{\varphi} \mathbb{R}^3$. Как было показано ранее, тензор Пуассона–Ли для алгебры $sl(2) +_{\varphi} \mathbb{R}^3$ выглядит следующим образом:

$$\mathcal{A}^{sl(2)+_{\varphi}\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 & -2y & 2x & 2v_0 & 0 & -2v_2 \\ 2y & 0 & -h & v_1 & 2v_2 & 0 \\ -2x & h & 0 & 0 & 2v_0 & v_1 \\ -2v_0 & -v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2v_2 & -2v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 2v_2 & 0 & -v_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что дифференциалы функций $2v_2v_0 - \frac{(v_1)^2}{2}$ и $\frac{1}{2}hv_1 + v_2x - v_0y$ зануляют матрицу $\mathcal{A}^{sl(2)+\varphi\mathbb{R}^3}$, а значит, эти функции являются функциями Казимира. Инварианты для алгебр $sl(2)+\varphi\mathbb{R}^2$ и $so(3)+\varphi\mathbb{R}^3$ вычислены в [8] (отметим, что основной результат, касающийся алгебр вида $so(n)+\varphi(\mathbb{R}^n)^k$ в работе [8], содержит ошибку, которая исправлена в [9]).

Интересным вопросом является топология орбит коприсоединенного представления. Оказывается, что в алгебрах, рассмотренных в данной статье, топология орбит не является очень богатой.

ТЕОРЕМА 6. Пусть вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна полупрямой сумме $\mathfrak{s} + \varphi V$ нетривиальной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{s}$ и коммутативного идеала V . Пусть у алгебры Ли $\mathfrak{g}$ орбиты общего положения коприсоединенного представления имеют размерность 4. Тогда возможны только следующие случаи:

- орбиты общего положения коприсоединенного представления для прямой суммы полупростой и разрешимой алгебр с двумерными орбитами коприсоединенного представления общего положения гомеоморфны прямому произведению пары, где каждый множитель либо плоскость, либо цилиндр, либо сфера;
- орбиты общего положения коприсоединенного представления для полупрямой суммы $sl(2, \mathbb{R}) + \varphi \mathbb{R}^2$ по стандартному представлению гомеоморфны прямому произведению цилиндра на двумерную плоскость;
- орбиты общего положения коприсоединенного представления для полупрямой суммы $sl(2, \mathbb{R}) + \varphi \mathbb{R}^3$ по присоединенному представлению гомеоморфны прямому произведению цилиндра на двумерную плоскость;
- орбиты общего положения коприсоединенного представления для полупрямой суммы $so(3, \mathbb{R}) + \varphi \mathbb{R}^3$ по стандартному трехмерному представлению гомеоморфны касательному расслоению двумерной сферы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы нам достаточно рассмотреть орбиты алгебр из списка в теореме 5. В работе [3] доказано, что двумерные орбиты общего положения гомеоморфны либо плоскости, либо цилиндру, либо сфере. Из этого результата следует, что орбиты общего положения коприсоединенного представления прямых сумм полупростой алгебры Ли и разрешимого идеала гомеоморфны прямому произведению пары, где каждый множитель гомеоморфен либо плоскости, либо цилиндру, либо сфере.

Хорошо известно, что орбиты общего положения алгебры $so(3, \mathbb{R}) + \varphi \mathbb{R}^3$ гомеоморфны касательному расслоению сферы. Также нетрудно убедиться, что у алгебры $so(2, 1, \mathbb{R}) + \varphi \mathbb{R}^3$, которая изоморфна $sl(2, \mathbb{R}) + \varphi \mathbb{R}^3$, орбиты общего положения гомеоморфны касательному расслоению цилиндра или плоскости, т.е. произведению плоскости на цилиндр или плоскость.

Разберем оставшийся случай. В статье [8] показано, что функцией Казимира для $sl(2, \mathbb{R}) + \varphi \mathbb{R}^2$ является функция $yv_0^2 - 2hv_0v_1 - xv_1^2$. При фиксированных v_0, v_1 , не равных вместе нулю, уравнение $yv_0^2 - 2hv_0v_1 - xv_1^2 = a$ задает плоскость. Получается расслоение со слоем плоскость над проколотой плоскостью, натянутой на v_0, v_1 . Проколота плоскость гомеоморфна цилиндру. Из соображений ориентируемости ясно, что в данном случае расслоение гомеоморфно прямому произведению цилиндра на двумерную плоскость. $\square$

Инварианты Жордана–Кронекера. В различных задачах важную роль играют размеры жордановых и кронекеровых блоков в разложении пучков: $(\mathcal{A}_x - \lambda \mathcal{A}_a)_{ij} = (c_{ij}^k x_k - \lambda c_{ij}^k a_k)$, где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $(x_k), (a_k) \in \mathfrak{g}^*$. Подробнее о разложении Жордана–Кронекера и его роли в построении полных бикоммутативных наборов многочленов

можно прочитать в работе [4]. Отдельно интересно, какие именно наборы различных инвариантов Жордана–Кронекера могут реализовываться на различных алгебрах Ли. Изучим этот вопрос для алгебр Ли из теоремы refmain.

Из определения следует, что наборы инвариантов Жордана–Кронекера для алгебры и ее комплексификации (вещественной формы) совпадают. Инварианты Жордана–Кронекера для алгебр вида $sl(2, \mathbb{R}) +_{\varphi} (\mathbb{R}^2)^n$ и $so(3, \mathbb{R}) +_{\varphi} (\mathbb{R}^3)^n$ вычислены в [9]. Инварианты Жордана–Кронекера прямых сумм получаются объединением соответствующих наборов инвариантов, полученных отдельно для каждого слагаемого. Тем самым из теоремы 3 и результатов работ [2] и [9] можно получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть некоторая алгебра изоморфна полупрямой сумме нетривиальной полупростой алгебры Ли и разрешимого идеала. Пусть размерность орбит общего положения коприсоединенного представления у этой алгебры равна 4. Тогда с точностью до произвольного числа кронекеровых блоков размера 1 возможны следующие наборы инвариантов Жордана–Кронекера:*

- один жорданов блок размера 2 и один кронекеров блок размера 3,
- два кронекерова блока размера 3,
- один кронекеров блок размера 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже говорилось ранее, последние два случая из теоремы 3 и, соответственно, последние три случая из теоремы 5 разобраны в работе [9]. Нам остается разобрать только случаи прямых сумм полупростой и разрешимой алгебр Ли из списка в теореме 2.

Инварианты Жордана–Кронекера всех полупростых алгебр Ли вычислены в [4]. Из этих результатов следует, что для алгебр $so(3)$ и $sl(2)$ набор инвариантов состоит только из одного кронекерова блока размера 3. Вычислим теперь инварианты Жордана–Кронекера разрешимых алгебр из теоремы 2. У четырехмерных алгебр Ли $A_{4,8}$ и $A_{4,10}$ центр одномерный и индекс равен двум. Более того, нетрудно убедиться, что коразмерность сингулярного множества у этих алгебр больше 1, откуда получаем, что их инварианты Жордана–Кронекера состоят из одного кронекерова блока размера 1 и одного кронекерова блока размера 3. У пятимерной алгебры $A_{5,3}$ центр двумерный и индекс равен трем. Аналогично нетрудно убедиться, что коразмерность ее сингулярного множества больше 1. Получаем, что ее инварианты Жордана–Кронекера состоят из двух кронекеровых блоков размера 1 и одного кронекерова блока размера 3. И, наконец, у шестимерной нильпотентной алгебры Ли центр двумерный и индекс равен четырем. Легко проверить, что коразмерность ее сингулярного множества больше 1, а значит ее инварианты Жордана–Кронекера состоят из трех кронекеровых блоков размера 1 и одного кронекерова блока размера 3.

Осталось вычислить инварианты Жордана–Кронекера у алгебр вида $\mathbb{R} +_{\varphi} \mathbb{R}^n$, где φ — некоторое нетривиальное представление. Тензор Пуассона–Ли такой алгебры выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi^*(e)v_1 & \dots & \varphi^*(e)v_n \\ -\varphi^*(e)v_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varphi^*(e)v_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тот факт, что коразмерность сингулярного множества равна 1, равносильен в данном случае тому, что у всех миноров размерности 2 найдется общий делитель. Общий делитель у миноров такой матрицы будет тогда и только тогда, когда размерность образа оператора $\varphi^*(e)$ равна 1. В остальных случаях алгебра будет кронекеровой, следовательно, ее инварианты Жордана–Кронекера будут состоять из одного кронекерова блока размера 3 и $(n - 1)$ кронекеровых

блоков размера 1. В случае же, когда размерность образа оператора $\varphi^*(e)$ равна 1, инварианты Жордана–Кронекера состоят из одного жорданова блока размера 2 и $(n - 1)$ кронекеровых блоков размера 1. $\square$

Полные бикоммутативные наборы многочленов. Пусть $\mathfrak{g}$ — некоторая алгебра Ли со структурными константами c_{ij}^k , и пусть $\{f, g\} = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}$ и $\{f, g\}_a = c_{ij}^k a_k \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}$ — скобка Пуассона–Ли и скобка с замороженным аргументом $a \in \mathfrak{g}^*$ соответственно. Полным бикоммутативным относительно скобки Пуассона–Ли и скобки с замороженным аргументом набором многочленов мы будем называть функционально независимый почти всюду набор многочленов, попарно коммутирующих относительно скобки Пуассона–Ли и скобки с замороженным аргументом, состоящий из $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{g})$ функций. Построим полные бикоммутативные наборы многочленов для всех алгебр из списка в теореме 5. Подробнее про эту задачу можно прочитать в [4] (см. также [11, conjecture 5.5]).

Решим эту задачу для произвольного $a \in \mathfrak{g}^*$ для алгебр из списка в теореме 5. В работе [12] сформулировано усиление обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко (см. “argument shift conjecture” в [4]):

ГИПОТЕЗА (Сильная обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко). *Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для всех (не обязательно регулярных) элементов $a \in \mathfrak{g}^*$ существует полный бикоммутативный набор многочленов, то есть набор, функции из которого попарно коммутируют относительно скобки $\{\cdot, \cdot\}$ и скобки $\{\cdot, \cdot\}_a$.*

В работе [12] также предложен метод построения полных бикоммутативных наборов (которые в той работе назывались биинволютивными наборами) многочленов для сингулярных ковекторов, основанный на методе Мищенко–Фоменко сдвига аргумента, предложенном в [13].

ТЕОРЕМА 8 (Метод построения полных наборов в биинволюции для сингулярных элементов; см. [12]). *Пусть $\mathfrak{g}$ — такая алгебра Ли, что $\text{tr. deg } P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \text{ind } \mathfrak{g}$, и пусть для некоторого a из $\mathfrak{g}^*$ верно*

- 1) *для почти всех x из $\mathfrak{g}^*$ плоскость, натянутая на x, a в $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$, без прямой λa состоит только из регулярных элементов,*
- 2) $\text{ind}(\text{St}(a)) = \text{ind } \mathfrak{g}$.

Тогда объединение набора многочленов, полученного сдвигом на элемент $a \in \mathfrak{g}^$, с любым полным инволютивным набором многочленов, поднятым с $\text{St}(a)^*$, дает полный бикоммутативный относительно скобки Пуассона–Ли и скобки с замороженным аргументом $a \in \mathfrak{g}^*$ набор многочленов.*

При помощи этой теоремы и результатов, полученных в работах [4], [12], [14], можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 9. *Сильная обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко верна для любой алгебры Ли, представимой в виде полупрямой суммы нетривиальной полупростой алгебры Ли и разрешимого идеала, у которой орбиты коприсоединенного представления общего положения имеют размерность 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем гипотезу для всех четырех типов вещественных алгебр последовательно. Пусть для начала алгебра изоморфна прямой сумме алгебр из списка в теореме 2. Ясно, что в этом случае нам достаточно проверить эту гипотезу для каждого слагаемого отдельно или, что то же самое, проверить ее для всех алгебр из этого списка. Для все алгебр

кроме $\mathbb{R} +_{\varphi} \mathbb{R}^n$ гипотеза доказана в [14]. В этой алгебре есть коммутативный идеал размерности $\frac{1}{2}(\dim g + \operatorname{ind} g)$, его базис и будет полным бикоммутативным набором многочленов для скобки Пуассона–Ли и любой скобки с замороженным аргументом.

Для доказательства усиленной обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко для алгебр Ли из теоремы 5 достаточно проверить достаточные условия теоремы 8 для всех ковекторов последних трех алгебр Ли из теоремы 5.

Как было показано ранее, последние три алгебры из списка в доказательстве теоремы 5 кронекеровы в том смысле, что у них в общем положении в разложении Жордана–Кронекера нет жордановых блоков. В [4] показано, что для таких алгебр можно построить полный бикоммутативный относительно скобки Пуассона–Ли и скобки с регулярным замороженным аргументом набор при помощи метода сдвига аргумента. Иными словами, нам остается разобраться со случаем, когда скобка с замороженным аргументом задана сингулярным ковектором.

Проверим для этих алгебр выполнение достаточных условий теоремы 8. Из кронекеровости алгебр следует, что для них выполняется первое условие теоремы для всевозможных ковекторов $a \in \mathfrak{g}^*$. Пусть алгебра изоморфна $sl(2) +_{\varphi} \mathbb{R}^2$. Множество ее сингулярных ковекторов задается системой уравнений

$$\begin{cases} v_1^4 = 0, \\ v_0^4 = 0. \end{cases}$$

Тогда стационарная подалгебра $\operatorname{St}(a)$ любого ненулевого сингулярного ковектора $a = (a_h, a_y, a_x, 0, 0)$ натянута на векторы v_0, v_1 и $(2a_h, a_x, a_y, 0, 0)$. Покажем, что стационарная подалгебра $\operatorname{St}(a)$ некоммутативна. Действительно, пусть

$$\begin{cases} [2a_h h + a_y y + a_x x, v_0] = 2a_h v_0 + a_y v_1 = 0, \\ [2a_h h + a_y y + a_x x, v_1] = -2a_h + a_x v_0 = 0, \end{cases}$$

тогда $a_h = a_x = a_y = 0$. Так как стационарная подалгебра $\operatorname{St}(a)$ некоммутативна, то ее индекс не равен ее размерности, следовательно он равен 1, а значит, ко всем ненулевым сингулярным ковекторам этой алгебры возможно применить теорему 8 и построить полный бикоммутативный набор многочленов.

Пусть теперь алгебра изоморфна $sl(2) +_{\varphi} \mathbb{R}^3$. Множество ее сингулярных ковекторов задается системой уравнений

$$\begin{cases} v_0 = 0, \\ v_1 = 0, \\ v_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда стационарная подалгебра $\operatorname{St}(a)$ любого ненулевого сингулярного ковектора $a = (a_h, a_y, a_x, 0, 0)$ натянута на векторы v_0, v_1, v_2 и $(2a_h, a_x, a_y, 0, 0)$. Аналогично, эта подалгебра некоммутативна, а значит ее индекс меньше 4. Так как индекс подалгебры не может быть меньше индекса алгебры, то индекс этой подалгебры равен 2, следовательно, для всех ненулевых сингулярных ковекторов возможно применить теорему 8 и получить полный бикоммутативный набор многочленов.

Пусть теперь алгебра изоморфна $so(3) +_{\varphi} \mathbb{R}^3$. Выпишем тензор Пуассона–Ли этой алгебры:

$$\mathcal{A}^{so(3)+_{\varphi}\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 & z & -y & 0 & 2u_3 & -2u_2 \\ -z & 0 & x & u_2 & u_1 & 0 \\ y & -x & 0 & u_3 & 0 & u_2 \\ 0 & -u_2 & -u_3 & 0 & 0 & 0 \\ -2u_3 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_2 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество ее сингулярных ковекторов задается системой уравнений

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_2 = 0, \\ u_3 = 0. \end{cases}$$

Тогда стационарная подалгебра $\text{St}(a)$ любого ненулевого сингулярного ковектора $a = (a_x, a_y, a_z, 0, 0, 0)$ натянута на векторы u_1, u_2, u_3 и $(a_x, a_y, a_z, 0, 0, 0)$. Как и предыдущем случае, эта подалгебра некоммутативна, а значит, ее индекс меньше 4. Индекс подалгебры больше индекса алгебры, а значит и больше 0. Итак, индекс этой подалгебры равен 2, следовательно, для всех ненулевых сингулярных ковекторов возможно применить теорему 8 и получить полный бикоммутативный набор многочленов.

Отдельно хочется отметить, что в алгебрах $sl(2, \mathbb{R}) +_{\varphi} \mathbb{R}^2$, $sl(2, \mathbb{R}) +_{\varphi} \mathbb{R}^2$ и $so(3, \mathbb{R}) +_{\varphi} \mathbb{R}^3$ множество сингулярных элементов состоит из всех ковекторов, которые равны нулю на коммутативном идеале. Для всех таких алгебр полный бикоммутативный набор можно построить при помощи обобщения метода Садэтова. Об этом обобщении автор рассказывал на некоторых конференциях и семинарах. Работа, где будут изложены соответствующие результаты, готовится к печати. $\square$

6. Заключение

Случай, рассмотренный в данной работе, существенно отличается от всех, изученных в [2]. Выяснилось, что существует всего две неразложимые алгебры Ли, которые можно представить в виде полупрямой суммы полупростой алгебры и разрешимого идеала для алгебр с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 4. В то же время, среди алгебр с орбитами размерности 6 существует по меньшей мере одна бесконечная серия. Это указывает на то, что классификация алгебр с шестимерными орбитами также будет принципиально отличаться от классификации алгебр с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления общего положения.

Как упоминалось во введении, продолжается работа по классификации разрешимых алгебр Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления, чтобы дать полный ответ на поставленную задачу. Однако методы и идеи, представленные в данной статье, оказываются малоэффективными для этой задачи. Поэтому работа с разрешимыми алгебрами потребовала нового подхода, чему будет посвящена одна из следующих работ.

Особый интерес представляют приложения полученных результатов. После завершения полной классификации планируется применить ее для задач построения полных бикоммутативных наборов и исследования геодезических потоков на двумерных и четырехмерных орбитах коприсоединенного представления алгебр Ли с неполиномиальными инвариантами.

Автор выражает благодарность А. Ю. Коняеву за постановку задачи и внимание к работе, а также А. А. Ошемкову за помощь и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И., Математические методы классической механики.
2. Коняев А. Ю., Классификация алгебр Ли с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 2 // Матем. сб. 2014 Т. 205 С. 47–66.
3. Fomenko A. T., Konyaev A. Y., Geometry, dynamics and different types of orbits // J. Fixed Point Theory Appl. 2014. Vol 15. P. 49–66.

4. Bolsinov A. V., Zhang P., Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras // *Transformation Groups*. 2016. Vol. 21, P. 51–86.
5. Galinski A., Some metrics admitting nonpolynomial first integrals of the geodesic equation // *Physics Letters B*. 2021. Vol. 820. P.634050
6. Agapov S., Shubin V., Rational integrals of 2-dimensional geodesic flows: new examples // *Journal of Geometry and Physics*. 2021. Vol. 170. P. 104389.
7. Хамфрис Дж., Введение в теорию алгебр Ли и их представлений
8. Воронцов А. С., Инварианты алгебр Ли, представимых в виде полупрямой суммы с коммутативным идеалом // *Матем. сб.* 2009. Т.200. №8. С. 45–62.
9. Vorushilov K. S., Jordan–Kronecker invariants for semidirect sums defined by standard representation of orthogonal or symplectic Lie algebras // *Lobachevskii journal of Mathematics*. 2017. Vol. 38. no. 6. P. 1121–1130.
10. Ворушилов К. С., Инварианты Жордана–Кронекера для полупрямых сумм вида $\mathfrak{sl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $\mathfrak{gl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ // *Фундамент. и прикл. матем.* 2019. Т. 22. №6. С. 3–18.
11. Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S., Open problems, questions and challenges in finitedimensional integrable systems // *Phil. Trans. R.* 2018. vol.376.
12. Лобзин Ф. И., Построение многочленов в биинволюции для сингулярных элементов пространства сопряженного этой алгебре Ли // *Матем. сб.* 2024.
13. Мищенко А. С. Фоменко А. Т., Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // *Изв. АН СССР*. 1978. Сер. матем. Т. 42, №2. С. 396–415.
14. Лобзин Ф. И., Проверка обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко для алгебр Ли малой размерности // *Чебышевский сб.* 2023. Т. 24. №5. Р. 126–135.

REFERENCES

1. Arnold V. I., “Mathematical Methods of Classical Mechanics”.
2. Konyaev A. Yu. 2014, “Classification of Lie algebras with generic orbits of dimension 2 in the coadjoint representation”, *Sb. Math.*, Vol. 205, no. 1, pp. 45-62.
3. Fomenko A. T., Konyaev A. Y. 2014, “Geometry, dynamics and different types of orbits” *J. Fixed Point Theory Appl.*, Vol. 15, pp. 49-66.
4. Bolsinov A. V., Zhang P. 2016, “Jordan–Kronecker invariants of finite–dimensional Lie algebras”, *Transformation Groups.*, Vol. 21, pp. 51-86.
5. Galinski A. 2021, “Some metrics admitting nonpolynomial first integrals of the geodesic equation”, *Physics Letters B.*, Vol. 820, pp.634050.
6. Agapov S., Shubin V. 2021, “Rational integrals of 2-dimensional geodesic flows: new examples”, *Journal of Geometry and Physics.*, Vol. 170, pp. 104389.
7. Humphries J. “Introduction to the theory of Lie algebras and their representations”, *Springer*.
8. Vorontsov A. S. 2009, “Invariants of Lie algebras representable as semidirect sums with a commutative ideal” *Sb. Math.*, Vol. 200, no. 8, pp. 1149–1164.

9. Vorushilov K. S 2017, “Jordan–Kronecker invariants for semidirect sums defined by standard representation of orthogonal or symplectic Lie algebras” *Lobachevskii journal of Mathematics*. Vol. 38, no. 6, pp. 1121–1130.
10. Vorushilov K. S 2019, “Jordan–Kronecker invariants for semidirect sums $\mathfrak{sl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $\mathfrak{gl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ ” *Fundament. i prikl. of matem.* Vol. 22, no. 6, pp. 3–18.
11. Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S. 2018 Open problems, questions and challenges in finitedimensional integrable systems // *Phil. Trans. R.* 2018. vol.376.
12. Lobzin F. I. 2024 “Construction of polynomials in bi-involution for singular elements of the space conjugate to Lie algebra” *Sb. Math.*.
13. Mishchenko A. S. Fomenko A. T. 1978, “Euler equations on finite-dimensional Lie groups”, *Math. USSR-Izv.*, Vol. 12, no. 2, pp. 371–389.
14. Lobzin F. I. 2023, “Verification of the generalized hypothesis of Mishchenko–Fomenko for Lie algebras of small dimension” *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 24, no 5, pp. 126–135.

Получено: 12.02.2025

Принято в печать: 07.04.2025