

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 2.

УДК 515.165.7+517.938.5+514.763.2

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-125-140

**Бифуркации магнитных геодезических потоков на торических
поверхностях вращения**

И. Ф. Кобцев, Е. А. Кудрявцева

Кобцев Иван Федорович — Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (г. Москва).

e-mail: int396.kobtsev@mail.ru

Кудрявцева Елена Александровна — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: eakudr@mech.math.msu.su

Аннотация

Изучаются магнитные геодезические потоки, инвариантные относительно вращений, на двумерном торе. Предполагается, что пара 2π -периодических функций (f, Λ) , задающая динамическую систему, удовлетворяет условиям общего положения, при этом функция Λ , задающая магнитное поле, принимает значения в окружности, если магнитное поле не является точным. Описана топология слоения Лиувилля данной интегрируемой системы вблизи ее особых орбит и особых слоев, найдены типы этих особенностей. Описана топология слоения Лиувилля на неособых трехмерных изоэнергетических многообразиях путем вычисления инварианта Фоменко–Цишанга. Показано, что слоения Лиувилля для геодезического потока и для неточного магнитного геодезического потока на любом изоэнергетическом многообразии имеют разную топологию. Описаны все возможные бифуркационные диаграммы отображений момента таких интегрируемых систем.

Ключевые слова: точный магнитный геодезический поток, интегрируемая система, топология слоения Лиувилля, бифуркационная диаграмма.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Кобцев И.Ф., Кудрявцева Е.А. Бифуркации магнитных геодезических потоков на торических поверхностях вращения // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 125–140.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 2.

UDC 515.165.7+517.938.5+514.763.2

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-125-140

Bifurcations of magnetic geodesic flows on toric surfaces of revolution

I. F. Kobtsev, E. A. Kudryavtseva

Kobtsev Ivan Fedorovich — Bauman Moscow State Technical University (Moscow).*e-mail: int396.kobtsev@mail.ru***Kudryavtseva Elena Alexandrovna** — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).*e-mail: eakudr@mech.math.msu.su***Abstract**

We study magnetic geodesic flows invariant under rotations on the 2-torus. The dynamical system is given by a generic pair of 2π -periodic functions (f, Λ) , where the function Λ takes values in a circle if the magnetic field is not exact. Topology of the Liouville fibration of the given integrable system near its singular orbits and singular fibers is described. Types of these singularities are computed. Topology of the Liouville fibration on regular 3-dimensional isoenergy manifolds is described by computing the Fomenko-Zieschang invariant. It is shown that Liouville fibrations for geodesic flow and non-exact magnetic geodesic flow on any isoenergy manifold have different topology. All possible bifurcation diagrams of the momentum maps of such integrable systems are described.

Keywords: exact magnetic geodesic flow, integrable system, topology of the Liouville fibration, bifurcation diagram.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

Kobtsev, I. F., Kudryavtseva, E. A. 2025, “Bifurcations of magnetic geodesic flows on toric surfaces of revolution”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 125–140.

1. Введение

Магнитный геодезический поток описывает движение заряженной частицы по риманову многообразию (M, g) в идеальном магнитном поле. При этом магнитное поле задано произвольной замкнутой 2-формой β на M . Если риманова метрика и магнитное поле инвариантны относительно гладкого эффективного действия группы S^1 на M и $\dim M = 2$, то магнитный геодезический поток интегрируем по Лиувиллю [1]. При этом в случае компактного M все интегральные многообразия компактны и почти все являются двумерными торами с квазипериодической динамикой (лиувиллевы торы), и возникает задача изучения топологии и особенностей соответствующего слоения Лиувилля. Связана ли топология слоения Лиувилля

Если M трехмерно, то 2-форма β связана с векторным полем магнитной индукции B формулой $\beta = * \downarrow B$, где $\downarrow$ — операция опускания индекса и $*$ — операция Ходжа. Если M — двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$, то вектор магнитной индукции B пропорционален единичному вектору нормали n к поверхности, т.е. имеет вид $B = \lambda n$, где λ — гладкая функция на M , при этом $\beta = \lambda d\sigma$, где $d\sigma$ — ориентированная форма площади на M .

для данной задачи при больших уровнях энергии и для геодезического потока? Наша работа посвящена решению этих задач для магнитных геодезических потоков на двумерном торе M .

В частном случае геодезических потоков (при отсутствии магнитного поля) на поверхностях вращения задача была решена Т.З. Нгуеном и Л.С. Поляковой [1, том 2, теорема 3.9]. Также был изучен случай натуральных механических систем, инвариантных относительно вращений, на сфере [2], торе [3], бутылке Клейна [3] и проективной плоскости [4]. В статье [5], посвященной родственной задаче — изучению интегрируемой системы с линейным по импульсам периодическим интегралом на алгебре Ли $e(3)$, были классифицированы невырожденные особенности отображения момента, найдена топология неособых 3-мерных изоэнергетических многообразий Q_h^3 и описаны бифуркации торов Лиувилля на них. В работе [6] рассматривалась задача, полученная из поставленной в [2] задачи добавлением магнитного поля, т.е. гироскопических сил (с сохранением требования S^1 -инвариантности римановой метрики, магнитного поля и потенциала). При выполнении некоторых условий “общности положения” на тройку функций, задающую эту систему, в [6] были классифицированы невырожденные и вырожденные особенности, найдены молекулы Фоменко на Q_h^3 (включая описание бифуркаций торов Лиувилля) [7, 8], метки на некоторых ребрах молекулы и описана топология Q_h^3 .

В работе [9] проведено более подробное исследование задачи из [6] в частном случае, когда потенциал равен нулю (т.е. исследовались магнитные геодезические потоки на сфере, инвариантные относительно вращений). В частности, были вычислены все метки для инвариантов Фоменко–Цишанга [10, 11, 12], кодирующих слоение Лиувилля на изоэнергетических 3-мерных многообразиях (тем самым, было завершено вычисление меток, начатое в [6]). При этом в работе [9] обнаружилось несколько новых интересных феноменов, показывающих, что такая задача представляет интерес. Во-первых, было показано, что различные магнитные геодезические потоки характеризуются (задаются) плоской кривой в плоскости (f, Λ) , которая по сути дела является произвольной за исключением некоторых граничных условий на ее концах. Тем самым, все интересующие нас инварианты могут быть описаны в терминах этой кривой [9, теоремы 3.3, 3.7, 4.2, 4.8, 5.13, 5.17]. При этом обнаружился несколько неожиданный геометрический факт: для описания этих инвариантов полезно перейти к проективно двойственной кривой. Во-вторых, был обнаружен новый тип вырожденных особенностей — “несимметричная эллиптическая вилка” [9, теорема 3.7], который не упоминался в других работах, в том числе в [6]. Таким образом, даже без потенциала система оказалась очень богатой.

В настоящей работе изучаются, как и в [9], магнитные геодезические потоки на поверхностях вращения, однако поверхность вращения предполагается гомеоморфной двумерному тору, а не сфере. При этом магнитное поле не предполагается точным (как оказалось, случай точного магнитного поля на торе существенно отличается от общего случая). Для этой интегрируемой системы классифицированы полулокальные особенности (теоремы 1 и 2) при условии, что пара функций f, Λ , задающая магнитный геодезический поток, находится в общем положении (см. условия 1–3 в $S2$), вычислены топологические инварианты Фоменко–Цишанга для слоения Лиувилля на неособых изоэнергетических многообразиях (теоремы 3 и 4, рис. 3 и 5). Показано, что слоение Лиувилля магнитного геодезического потока на торе, помимо 2-параметрических семейств регулярных слоев (торов Лиувилля), имеет конечное число 1-параметрических семейств критических слоев (эллиптического и гиперболического типов) и конечное число изолированных критических слоев: вырожденных (каскальные торы и “несимметричные эллиптические вилки”) и невырожденных (“расщепляющиеся” гиперболические особенности ранга 1 [6]). Описаны соответствующие 3-атомы (замечание 16 и рис. 1, 2). Отметим, что для магнитных геодезических потоков на торе, инвариантных относительно вращений и удовлетворяющих условиям общности положения 1–3 из $S2$, нетрудно получить (почти дословным повторением случая сферы [9, теорема 5.17]) описание всех бифуркационных диаграмм, а также связь между геометрическими свойствами кривой (f, Λ) и бифуркационной диаграммы, а также динамическими свойствами системы [9, теорема 5.13

и рис. 3, 7–10], с помощью которых легко построить бифуркационный комплекс по кривой (f, Λ) или по бифуркационной диаграмме (см. примеры на рис. 4 и 5).

Во всех доказательствах вначале подробно изучается случай точного магнитного поля, а затем — общий случай.

2. Магнитный геодезический поток на торе

Опишем построение магнитного геодезического потока на поверхности вращения M , гооморфной тору. Для этого введем на торе M стандартные угловые координаты $r \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и определим риманову метрику $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$. Здесь $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ — гладкая функция, которая продолжается до гладкой L -периодической функции на $\mathbb{R}$.

Гамильтониан и симплектическая структура магнитного геодезического потока на торе имеют вид

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)}, \quad \omega = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi + \pi^* \beta,$$

где $\pi : T^*M \rightarrow M$ — каноническая проекция. Потребуем, чтобы 2-форма β на торе, задающая магнитное поле, была S^1 -инвариантна. Это значит, что она пропорциональна форме площади $d\sigma = f(r)dr \wedge d\varphi$ с коэффициентом пропорциональности, зависящем только от r , т.е. имеет вид $\beta = \lambda(r)f(r)dr \wedge d\varphi$ для некоторой гладкой L -периодической функции $\lambda(r)$ (по модулю равной длине вектора магнитной индукции, см. сноску). Ввиду гладкости функции $\lambda(r)f(r)$, мы можем представить ее в виде $\lambda(r)f(r) = \Lambda'(r)$ для некоторой гладкой функции $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, т.е.

$$\beta = \Lambda'(r)dr \wedge d\varphi.$$

Очевидно, ввиду L -периодичности функций $f(r)$ и $\lambda(r)$, что функция $\Lambda'(r) = \lambda(r)f(r)$ тоже L -периодична (однако сама функция $\Lambda(r)$ будет L -периодичной лишь тогда, когда $\Lambda(0) = \Lambda(L)$).

Если магнитное поле β точно всюду на торе, то $0 = \int_M \beta = 2\pi \int_0^L \Lambda'(r)dr = 2\pi(\Lambda(L) - \Lambda(0))$, поэтому $\Lambda(L) = \Lambda(0)$, значит функция $\Lambda(r)$ (а не только ее производная) является L -периодичной. Значит, $\beta = d\alpha$, где $\alpha = \Lambda(r)d\varphi$ — гладкая 1-форма на торе (т.н. магнитный потенциал). Это предположение позволяет привести симплектическую структуру к стандартной, выполнив (всюду на кокасательном расслоении к тору!) замену

$$(p_r, p_\varphi, r, \varphi) \rightarrow (p_r, K = p_\varphi + \Lambda(r), r, \varphi),$$

которая в бескоординатной записи имеет вид $(p, q) \rightarrow (p + \alpha, q)$, где $q \in M$, $p \in T_q^*M$. При этом гамильтониан и симплектическая структура системы на T^*M примут вид

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{(K - \Lambda(r))^2}{2f^2(r)}, \quad \omega = dp_r \wedge dr + dK \wedge d\varphi. \quad (1)$$

Эта гамильтонова система интегрируема и задает точный магнитный геодезический поток $T(f, \Lambda)$ на торе. Под ее *особенностями* будем понимать критические точки *отображения момента*

$$\mathcal{F} = (H, K) : T^*M \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Как и в случае сферы [9, предположение 2.4], наложим на функции f, Λ следующие условия:

- 1') $f(r) > 0$, $\Lambda(r)$ — L -периодические функции Морса;
- 2) $(\Lambda'(r))^2 + (f'(r))^2 > 0$;
- 3) ориентированная кривизна плоской кривой (f, Λ) имеет только простые нули.

Если магнитное поле не предполагается точным, будем накладывать на гладкие функции $f, \Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ условия 2, 3, приведенные выше, и следующее условие:

1) $f(r) > 0$, $\Lambda(r)$ — функции Морса, при этом $f(r)$ и $\Lambda'(r)$ являются L -периодическими. Обозначим

$$\tau := \Lambda(L) - \Lambda(0).$$

Тогда условие точности магнитного поля принимает вид $\tau = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Если магнитное поле не является точным, т.е. $\tau \neq 0$, то функция $\Lambda(r)$ индуцирует (однозначную) гладкую L -периодическую функцию $\Lambda(r) \bmod \tau$ со значениями в окружности $R/\tau\mathbb{Z}$. Накроем тор M цилиндром $\widetilde{M}$ с координатами $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и $r \in \mathbb{R}$, и определим на цилиндре $\widetilde{M}$ функцию $L(r)$, магнитное поле $\widetilde{\beta}$ и 1-форму $\widetilde{A}$ теми же формулами, что и выше. Это магнитное поле на цилиндре $\widetilde{M}$ является точным, поэтому индуцированный магнитный геодезический поток на $T^*\widetilde{M}$ является точным и имеет дополнительный первый интеграл $K = p_\varphi + \Lambda(r)$, и система принимает вид (1) при указанной замене координат на $T^*\widetilde{M}$. Ясно, что этот первый интеграл на $T^*\widetilde{M}$ обладает свойством эквивариантности

$$K(p_r, p_\varphi, r + L, \varphi) = K(p_r, p_\varphi, r, \varphi) + \tau,$$

а изначальный магнитный геодезический поток на T^*M имеет корректно определенный первый интеграл $K \bmod \tau = p_\varphi + \Lambda(r) \bmod \tau$ со значениями в окружности $\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}$.

Из такого S^1 -значного первого интеграла можно получить “обычный” — вещественнозначный — первый интеграл, например $\cos(2\pi K/\tau) = \cos(2\pi(p_\varphi + \Lambda(r))/\tau)$. Домножением метрики на положительный коэффициент можно нормировать $L = 2\pi$. В случае неточного магнитного поля ($\tau \neq 0$) можно нормировать $\tau = 2\pi$ домножением импульсов и энергии на ненулевые коэффициенты. Но мы не будем этого делать.

Мы не будем налагать других ограничений на систему, кроме условий гладкости (см. выше) и условий 1—3 общности положения. Случай однородных ($\lambda = \text{const}$, см. [9]) точных магнитных геодезических потоков билиардного типа на некоторых кусочно-плоских поверхностях вращения (гомеоморфных сфере, тору, диску и цилиндру) изучен в [13].

Пусть $\{r_i\}_{i=1}^n$ — критические точки f , а $\{r_j^*\}_{j=1}^N$ — критические точки Λ . Обозначим $I = [0, L] \setminus \{r_i\}_{i=1}^n$. Обозначим $\mathcal{O}_{\rho,k} = \{(p_r, K, r, \varphi) : p_r = 0, K = k, r = \rho, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ — окружность, зависящая от пары параметров $\rho \in [0, L]$, $k \in \mathbb{R}$. При этом в случае неточного магнитного поля ($\tau \neq 0$) эта окружность содержится в $T^*\widetilde{M}$ и задана в координатах (p_r, K, r, φ) на $T^*\widetilde{M}$.

3. Полулокальные особенности слоения Лиувилля

Следующая теорема описывает топологию слоения Лиувилля вблизи особых орбит (т.е. полулокальные особенности системы).

ТЕОРЕМА 1. Если функции f, Λ удовлетворяют условиям 1 и 2 из $S2$, то особые точки магнитного геодезического потока $T(f, \Lambda)$ на торе (соответственно индуцированного магнитного потока на накрывающем цилиндре в случае неточного магнитного поля) образуют следующие два семейства особых точек ранга 1:

- (i) $\mathcal{C}_1^k = \bigcup_{r \in I} \mathcal{O}_{r, k(r)}$, где $k(r) = \Lambda(r) - f(r) \frac{\Lambda'(r)}{f'(r)}$,
- (ii) $\mathcal{C}_1^\Lambda = \bigcup_{r \in [0, L]} \mathcal{O}_{r, \Lambda(r)}$.

Образом семейства $\mathcal{C}_1^k$ при отображении момента $\mathcal{F} = (H, K) : T^*M \rightarrow \mathbb{R}^2$ в случае точного магнитного поля (соответственно $\mathcal{F} = (H, K) : T^*\widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ в случае неточного магнитного поля) является кривая $\gamma_1 = \{(h(r), k(r)) \mid r \in I\}$, где $h(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda'(r)}{f'(r)} \right)^2$, а

образом семейства C_1^Λ — вертикальный отрезок $\gamma_2 = \{(0, \Lambda(r)) \mid r \in [0, L]\}$. Особых точек ранга 0 система $T(f, \Lambda)$ не имеет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из описания особых точек магнитного геодезического потока $S(f, \Lambda)$ на сфере [9, теорема 3.3] следует, что множество точек ранга 1 системы $T(f, \Lambda)$ на торе задается теми же формулами, что и у системы $S(f, \Lambda)$. А поскольку координаты $(r \bmod L, \varphi \bmod 2\pi)$ определены всюду на торе, то система $T(f, \Lambda)$ не имеет точек ранга 0. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что если магнитное поле является точным ($\tau = 0$), то все функции $\Lambda(r), k(r), h(r)$ являются L -периодичными. В общем случае функция $k(r)$, задающая первое семейство особых точек в теореме 1, и кривые γ_1, γ_2 обладают свойством эквивариантности

$$k(r + L) = k(r) + \tau, \quad h(r + L) = h(r), \quad \gamma_j(r + L) = \gamma_j(r) + (0, \tau), \quad j = 1, 2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Эффективным потенциалом системы $T(f, \Lambda)$ называется функция

$$U_k(r) = \frac{(k - \Lambda(r))^2}{2f^2(r)},$$

где k — вещественный параметр. В случае точного магнитного поля ($\tau = 0$) эффективный потенциал является L -периодичным, т.е. корректно определен на торе. В общем случае он корректно определен лишь на накрытии $\tilde{M}$ тора M и обладает свойством инвариантности

$$U_{k+\tau}(r + L) = U_k(r).$$

$r \in [0, L]$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции f, Λ удовлетворяют условиям 1 и 2 из $S2$. Тогда типы критических окружностей магнитного геодезического потока $T(f, \Lambda)$ на торе определяются следующими условиями:

- 1) Для любого $r \in [0, L]$ такого, что $f'(r) \neq 0$, следующие условия (a)–(d) равносильны:
 - (a) критическая орбита $\mathcal{O}_{r, k(r)}$ из семейства C_1^k системы $T(f, \Lambda)$ невырождена,
 - (b) $U''_{k(r)}(r) \neq 0$,
 - (c) $k'(r)\Lambda'(r) \neq 0$,
 - (d) $(f'(r)\Lambda''(r) - f''(r)\Lambda'(r))\Lambda'(r) \neq 0$.

Если $U''_{k(r)}(r) > 0$, то критическая окружность имеет эллиптический тип, а если $U''_{k(r)}(r) < 0$ — гиперболический; при этом $\operatorname{sgn} U''_{k(r)}(r) = \operatorname{sgn}(-k'(r)\Lambda'(r)) = \operatorname{sgn}(f'(r)\Lambda''(r) - f''(r)\Lambda'(r))\Lambda'(r) = -\operatorname{sgn} \frac{d^2 f(\Lambda)}{d\Lambda^2}$. Здесь $f(\Lambda)$ — локальная функция, график которой совпадает с кривой $(f(r), \Lambda(r))$, $r \notin \{r_j^*\}_{j=1}^N$.

2) Любая критическая орбита $\mathcal{O}_{r, \Lambda(r)}$ системы $T(f, \Lambda)$, содержащаяся в $C_1^\Lambda \setminus (C_1^\Lambda \cap C_1^k)$, является невырожденной и имеет эллиптический тип.

3) Если функции f, Λ удовлетворяют также условию 3 из $S2$, то вырожденные критические окружности $\mathcal{O}_{r, k(r)}$ семейства C_1^k могут быть одного из двух типов:

(i) параболическая окружность [14, 15, 16, 17, 18, 19] — при таком $r \in I$, что $\Lambda''(r)f'(r) - \Lambda'(r)f''(r) = 0$; ее образ при отображении момента — обыкновенная полукубическая точка возврата кривой γ_1 . Росток слоения Лиувилля в соответствующей вырожденной орбите $\mathcal{O}_{r_\ell^*, k(r_\ell^*)}$ имеет тип “параболическая орбита”;

(ii) критическая орбита, содержащаяся в обоих семействах C_1^k, C_1^Λ — при таком $r \in I$, что $\Lambda'(r) = 0$; ее образ при отображении момента — точка касания кривых γ_1 и γ_2 . Росток слоения Лиувилля в соответствующей вырожденной орбите $\mathcal{O}_{r_j^*, \Lambda(r_j^*)}$ имеет тип “несимметричная эллиптическая вилка” [14, 20, 9].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяет доказательство теоремы 3.7 из [9]. $\square$

4. Инварианты грубой лиувиллевой эквивалентности системы

Рассмотрим плоскую кривую $\Gamma(r) = (f(r), \Lambda(r))$ и ее отражение $\Gamma_-(r) = (-f(r), \Lambda(r))$. Если магнитное поле точно, то эти кривые замкнуты: $\Gamma(r+L) = \Gamma(r)$, $\Gamma_-(r+L) = \Gamma_-(r)$. Рассмотрим все прямые в плоскости (f, Λ) со следующим свойством: кривая Γ и ее отражение Γ_- лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой. Ясно, что такая прямая существует: например, прямая $\{f = 0\}$. Легко видеть, что в точности две такие прямые касаются обеих кривых Γ и Γ_- , и что эти прямые имеют вид $\{(f, \Lambda) : \Lambda = k_0 \pm a_0 f\}$ для некоторых констант $a_0 > 0$ и k_0 . Положим $h_0 = a_0^2/2$. Для неточного магнитного поля положим $h_0 = +\infty$.

Итак, в случае точного магнитного поля выполнено $\Gamma \subset \{(f, \Lambda) : |\Lambda - k_0| \leq \sqrt{2h_0}f\}$ и кривая Γ касается обеих прямых $\{\Lambda = k_0 \pm \sqrt{2h_0}f\}$ (в общем случае h_0 — это точная верхняя грань абсцисс точек пересечения гиперболических дуг бифуркационной кривой γ_1 , обладающих следующим свойством: тангенсы углов наклона касательных к дугам кривой в точке пересечения имеют разные знаки, см. первую часть теоремы 2, рис. 4, 5 и замечание 17).

В следующих двух теоремах рассматривается первый интеграл K в случае точного магнитного поля ($\tau = 0$), а в случае неточного магнитного поля ($\tau \neq 0$) — функция $K \bmod \tau$ (тоже обозначаемая через K), принимающая значения в окружности $\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}$. Под молекулой Фоменко функции $K|_{Q_h^3}$ будем понимать граф Рибса этой функции, каждой вершине которого сопоставлен соответствующий 3-атом с указанием соответствующей биекции между множеством его граничных торов и множеством всех ребер, инцидентных данной вершине [7, 9].

ТЕОРЕМА 3. В магнитном геодезическом потоке $T(f, \Lambda)$ на торе

1) *изоэнергетическое многообразие $Q_h^3 = \{H = h\} \subset T^*M$ является неособым тогда и только тогда, когда $h \neq 0$. При любом $h > 0$ оно диффеоморфно трехмерному тору T^3 ;*

2) *если пара функций f, Λ удовлетворяет условиям 1–3 из S2 и значение $h > 0$ отлично от абсцисс точек возврата кривой γ_1 , то $K|_{Q_h^3}$ — функция Ботта и молекула Фоменко функции Ботта $K|_{Q_h^3}$ является связным графом, в концевых вершинах которого стоят 3-атомы A , а в других вершинах — седловые 3-атомы $V = V_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \times S^1$ или $P = P_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \times S^1$ (определенные в замечании 16 (а) ниже), при этом молекула Фоменко имеет вид, описанный в замечании 16 (d). Более точно:*

(i) *если $0 < h < h_0$ (это автоматически выполнено для неточного магнитного поля), то молекула Фоменко имеет единственный цикл и не содержит 3-атомов P ;*

(ii) *в случае $h = h_0$ молекула Фоменко является деревом и содержит единственный 3-атом P , причем P отличен от $P_{+ \dots +} \times S^1$ и $P_{- \dots -} \times S^1$;*

(iii) *в случае $h > h_0$ молекула Фоменко имеет единственный цикл и содержит ровно два 3-атома вида P , причем они соединены двумя ребрами и имеют вид $P_{+ \dots +} \times S^1$ и $P_{- \dots -} \times S^1$;*

(iv) *в случае $h \geq h_0$ все 3-атомы V молекулы Фоменко, расположенные “выше” 3-атомов P , имеют вид $V_{+ \dots +} \times S^1$, а расположенные “ниже” 3-атомов P — вид $V_{- \dots -} \times S^1$.*

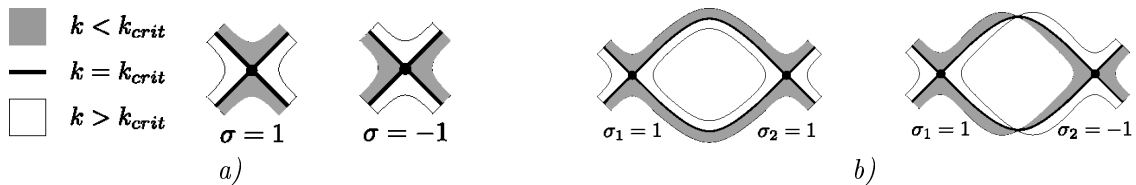


Рис. 1: а) определение помеченного креста, б) правила склейки крестов

ЗАМЕЧАНИЕ 16. (а) Аналогично построению 3-атома $V = V_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \times S^1$ в [6] и [9, замечание 4.3], будем строить 3-атомы P как результат умножения соответствующего 2-атома

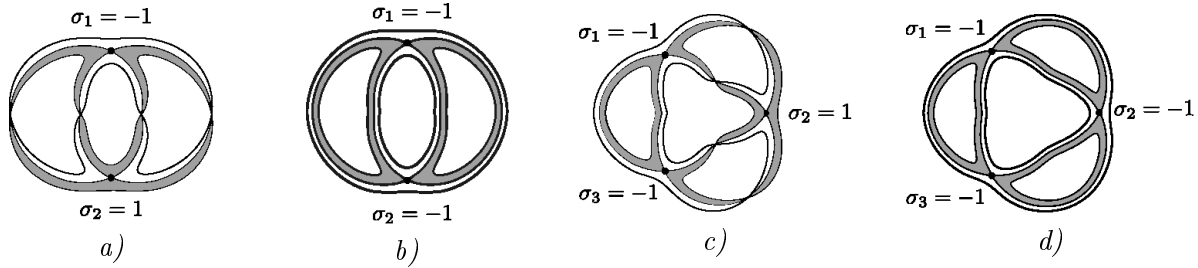


Рис. 2: Примеры 2-атомов, возникающих в системе на торе: а) $P_{-+} = C_1$, б) $P_{--} = C_2$, в) $P_{-+-} = E_2$, г) $P_{---} = E_3$

$P_{\sigma_1 \dots \sigma_m}$ на окружность. При этом 2-атом $P_{\sigma_1 \dots \sigma_m}$ тоже строится склейкой крестов, помеченных знаками $\sigma_i = \pm 1$ (см. рис. 1 или [9, замечание 4.3]). Но, в отличие от 2-атома $V_{\sigma_1 \dots \sigma_m}$ (особый слой которого — цепь окружностей), особый слой 2-атома $P_{\sigma_1 \dots \sigma_m}$ определяется как замкнутая цепь окружностей (рис. 2).

(б) Нетрудно показать, что 2-атомы $V_{\sigma_1 \dots \sigma_m}$, $P_{+ \dots +}$ и $P_{- \dots -}$ вложимы в плоскость, т.е. имеют род 0, а остальные 2-атомы $P_{\sigma_1 \dots \sigma_m}$ вложимы в тор, но не в плоскость, т.е. имеют род 1. Также отметим, что 2-атомы $V_{\sigma_1 \dots \sigma_m}$ совпадают с 2-атомами $V_m^{\eta_1 \dots \eta_m}$, появляющимися в натуральных механических системах с магнитным полем [6] и магнитных геодезических потоках [9] на сферических поверхностях вращения, а также в интегрируемых системах с линейным периодическим первым интегралом для алгебры Ли $e(3)$ [5]. Знакоопределенные 2-атомы $V_{+ \dots +}$ и $V_{- \dots -}$ (соответственно $P_{+ \dots +}$ и $P_{- \dots -}$) появляются в натуральных механических системах на сферических [2] (соответственно торических [3]) поверхностях вращения. 2-Атомы $V_{\sigma_1 \dots \sigma_m}$ и $P_{\sigma_1 \dots \sigma_m}$ появляются в однородных [9] точных магнитных геодезических потоках бильярдного типа на кусочно-гладких поверхностях вращения (гомеоморфных сфере, тору, диску и цилиндру) [13, рис. 21–23, 27, 28].

(в) Согласно теореме 3, 3-атомы P возникают только у точных магнитных геодезических потоков и только при $h \geq h_0$. Если пара функций f, Λ удовлетворяет дополнительному условию “общности положения в сильном смысле” [9, предположение 3.12], то в магнитном геодезическом потоке $T(f, \Lambda)$ на торе могут возникнуть только следующие виды седловых 3-атомов в молекуле Фоменко боттовской функции $K|_{Q_h^3}$: $V_\sigma \times S^1$, $P_\sigma \times S^1$, $V_{\sigma_1 \sigma_2} \times S^1$ и $P_{\sigma_1 \sigma_2} \times S^1$ (топологически устроенные как 3-атомы B , D_1 , D_2 , см. [9, рис. 5], C_1 и C_2 , см. рис. 2, а, б и замечание 17). Отметим, что свойства (iii) и (iv) из теоремы 3 верны и для геодезического потока на торе (при условии, что f — функция Морса и $\Lambda \equiv 0$). С учетом (i) получаем, что слоения Лиувилля для любого неточного магнитного геодезического потока на любом уровне энергии и для геодезического потока имеют разную топологию.

(г) Опишем алгоритм построения молекулы Фоменко функции $K|_{Q_h^3}$ по функциям f, Λ и неособому уровню энергии h . Построим в плоскости (k, r) графики функций $g_\pm(r) = \Lambda(r) \pm \sqrt{2hf(r)}$. Затем склеим боковые стороны области $\{(k, r) \in \mathbb{R} \times [0, L] : g_-(r) \leq k \leq g_+(r)\}$ между этими графиками по правилу $(k, 0) \sim (k + \tau, L)$ и обозначим через Π_h результат этой склейки (это будет область в цилиндре $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$, гомеоморфная цилиндру вида $[0, 1] \times S^1$). Далее разобьем “цилиндрическую” область Π_h на горизонтальные слои вида $\Pi_h \cap \{k = \text{const}\}$ и стянем каждый из них в точку. В полученном графе рассмотрим все ребра, которые соответствуют нестягиваемым на цилиндре слоям (как нетрудно показать, количество таких ребер может быть только 0 или 1), и заменим каждое из этих ребер на пару ребер с общими началом и концом. Наконец, каждой свободной вершине полученного графа сопоставим 3-атом A , нижней и верхней вершинам упомянутого выше двукратного ребра сопоставим 3-атомы

В случае сферы [9] область Π_h была плоской.

$P_{-...-} \times S^1$ и $P_{+...+} \times S^1$ соответственно. Всем остальным вершинам, расположенным выше 3-атома $P_{+...+} \times S^1$, сопоставим 3-атомы $V_{+...+} \times S^1$, а расположенным ниже 3-атома $P_{-...-} \times S^1$ — 3-атомы $V_{-...-} \times S^1$. При этом сложность атома $V_{+...+} \times S^1$ (или $P_{+...+} \times S^1$) равна количеству ребер, выходящих из соответствующей вершины; аналогично сложность атома $V_{-...-} \times S^1$ (или $P_{-...-} \times S^1$) равна количеству ребер, входящих в соответствующую вершину.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение теоремы 3. Согласно доказательству пункта 1 теоремы [9, теорема 4.2], имеем $Q_h^3 \cong STM$. В случае $M = T^2$ получаем $Q_h^3 \cong STT^2 \cong T^3$.

Для доказательства второго утверждения теоремы представим изоэнергетическое многообразие Q_h^3 как прямое произведение окружности на трансверсальное сечение

$$Q_h^3 \cap \{\varphi = \text{const}\} = \{K = k_{\pm}(p_r, r) : (p_r, r) \in \mathbb{R} \times [0, L], \varphi = \text{const}\} / \sim, \quad (2)$$

где $k_{\pm}(p_r, r) = \Lambda(r) \pm \sqrt{2h - p_r^2 f(r)}$, при этом “боковые стороны” графиков функций $k_{\pm}(p_r, r)$ в пространстве (p_r, k, r) склеиваются в торическую поверхность по правилу $(p_r, k, 0) \sim (p_r, k + \tau, L)$ ввиду свойства эквивариантности

$$k_{\pm}(p_r, r + L) = k_{\pm}(p_r, r) + \tau.$$

Доказательство второго утверждения теоремы почти полностью повторяет доказательство пункта 2 теоремы [9, теорема 4.2], но со следующим отличием: в системе $T(f, \Lambda)$ на торе в дополнение к трем описанным в доказательстве леммы [9, лемма 4.5] случаям (точка, окружность, цепь окружностей) линия уровня функции Морса $K \bmod \tau$ на трансверсальном сечении (2) может быть также замкнутой цепью окружностей. Последний вариант реализует 2-атом $P_{\sigma_1 \dots \sigma_m}$. Поэтому в молекуле Фоменко встречаются только 3-атомы вида A , $V = V_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \times S^1$ и $P = P_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \times S^1$.

Рассмотрим “цилиндрическую” область Π_h из замечания 16 (d). Заметим, что $g_{\pm}(r) = k_{\pm}(0, r)$ (см. [9, формула (4.1)]), поэтому склейка из определения Π_h согласована со свойством эквивариантности

$$g_{\pm}(r + L) = g_{\pm}(r) + \tau.$$

Рассмотрим координатную функцию $k \bmod \tau$ в цилиндре $(\mathbb{R} \times [0, L]) / \sim$. Пусть W — граф Рибба ограничения этой функции на “цилиндрическую” область Π_h .

В Π_h рассмотрим все стягиваемые по цилиндру слои $\Pi_h \cap \{k \bmod \tau = \text{const}\}$ (они существуют только в случае точного магнитного геодезического потока при $h \geq h_0$, их объединение C гомеоморфно цилиндру $[0, 1] \times S^1$), и заменим этот цилиндр C на объединение двух экземпляров этого цилиндра C , склеенных по основаниям. Результат этой операции обозначим через Π_h^* (это конечный клеточный комплекс). Отметим, что $\Pi_h^* \neq \Pi_h$, только если магнитный геодезический поток точный и $h > h_0$.

Функция $k \bmod \tau$ индуцирует на комплексе Π_h^* корректно определенную функцию, которую также будем обозначать через $k \bmod \tau$. Пусть W^* — граф Рибба этой функции, $p : \Pi_h^* \rightarrow W^*$ — каноническая проекция, $p_{\#} : \pi_1(\Pi_h^*) \rightarrow \pi_1(W^*)$ — индуцированный ею эпиморфизм. Если магнитный геодезический поток является неточным или $h < h_0$, то $\Pi_h^* = \Pi_h$ есть “цилиндрическая” область, а все связные компоненты линий уровня функции $k \bmod \tau$ на Π_h являются отрезками (т.е. стягиваемы), поэтому эпиморфизм $p_{\#}$ инъективен (т.е. является изоморфизмом), откуда $\pi_1(W^*) = \pi_1(W) \cong \pi_1(\Pi_h) \cong \mathbb{Z}$, значит граф Рибба $W^* = W$ имеет единственный цикл. Если магнитный геодезический поток является точным и $h = h_0$, то $\Pi_h^* = \Pi_h$ гомеоморфно цилиндру и все связные компоненты линий уровня функции k на этом цилиндре являются отрезками (т.е. стягиваемы), за исключением линии уровня $(\{k_0\} \times [0, L]) / \sim$, являющейся окружностью и деформационным ретрактом цилиндра Π_h , поэтому проекция этой окружности в граф Рибба W является вершиной этого графа и его деформационным ретрактом, откуда сразу получаем, что граф Рибба $W^* = W$ является деревом.

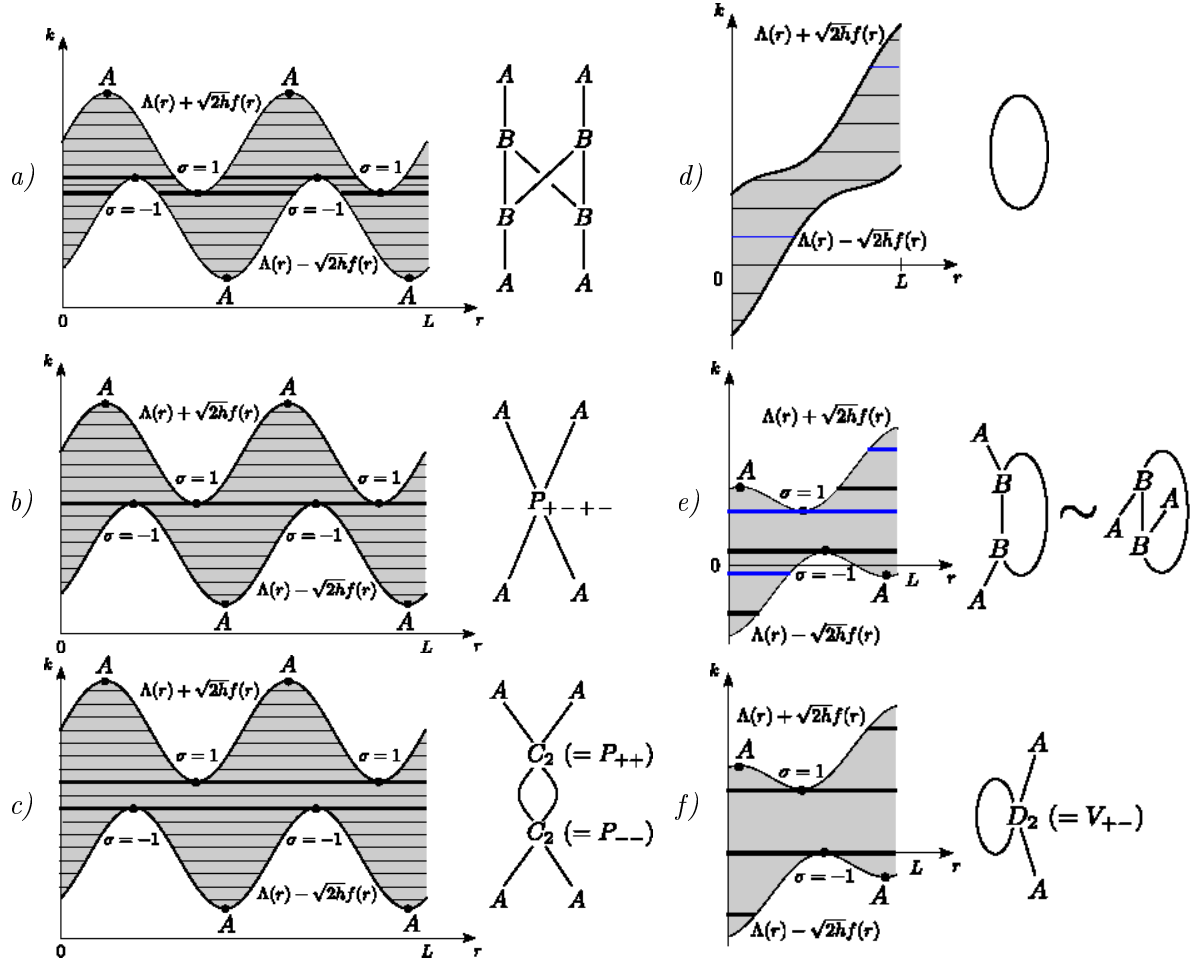


Рис. 3: Области Π_h в цилиндре $\{(k, r)\}/\sim$ и молекулы Фоменко на уровне энергии $h > 0$ для точного (a, b, c) и неточного (d, e, f) магнитных геодезических потоков на торе (примеры):
a) $0 < h < h_0$; b) $h = h_0$; c) $h > h_0$; d) $0 < h < h_c$; e) $h > h_c$, $h \notin \{h_1, h_2, \dots\}$; f)
 $h \in \{h_1, h_2, \dots\}$

Для завершения доказательства утверждений (i)–(iv) заметим, что в случае точного магнитного потока уровень энергии h_0 обладает следующими свойствами:

- (1) $\min_{r \in [0, L]} g_+(r) < \max_{r \in [0, L]} g_-(r)$ при $h < h_0$,
- (2) $\min_{r \in [0, L]} g_+(r) = \max_{r \in [0, L]} g_-(r) = k_0$ при $h = h_0$,
- (3) $\kappa^+ := \min_{r \in [0, L]} g_+(r) > \max_{r \in [0, L]} g_-(r) =: \kappa^-$ при $h > h_0$.

Поэтому при $h < h_0$ в молекуле Фоменко 3-атомов P нет, т.е. верно (i). Аналогично, в случае $h = h_0$ на уровнях $k \neq k_0$ функции K нет 3-атомов P , а на уровне $k = k_0$ находятся одновременно точки минимума функции $g_+(r)$ и точки максимума функции $g_-(r)$, т.е. соответствующий 2-атом имеет вид $P_{\sigma_1 \dots \sigma_m}$, при этом среди знаков $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ есть различные. Последнее означает, что такой 2-атом отличен от P_{+++} и P_{---} . Свойство (ii) доказано.

Если выполнено либо $h > h_0$, либо $h = h_0$ и $k \neq k_0$, то на уровне $K = k$, которому отвечает локальный минимум функции $g_+(r)$ (соответственно локальный максимум функции $g_-(r)$), все знаки σ_i положительны и равны 1 (соответственно отрицательны и равны -1), т.е.

наблюдается атом $V_{+...+}$ или $P_{+...+}$ (соответственно $V_{-...-}$ или $P_{-...-}$). При этом атом $P_{+...+}$ (соответственно $P_{-...-}$) отвечает глобальному минимуму функции g_+ (соответственно глобальному максимуму функции g_-). Если $h > h_0$, то все связные компоненты линий уровня функции k в комплексе Π_h^* являются отрезками (т.е. стягиваемы), за исключением линий уровня, содержащихся в подмножестве $\Pi_h^* \cap \{\kappa^- \leq k \leq \kappa^+\}$. Поэтому это подмножество (гомеоморфное двумерному тору) является деформационным ретрактом комплекса Π_h^* , а проекция этого подмножества в граф Рибба W^* (очевидно, состоящая из двух вершин и двух соединяющих их ребер) является деформационным ретрактом графа Рибба W^* . Свойства (iii) и (iv) доказаны.

Из свойств (i)–(iv) и построения комплекса Π_h^* и получаем, что верен алгоритм построения молекулы Фоменко функции $K|_{Q_h^3}$. Теорема 3 доказана. $\square$

5. Вычисление меток Фоменко – Цишанга

Теорема 3 и следующая теорема 4 описывают топологию слоения Лиувилля на неособом 3-мерном изоэнергетическом многообразии.

ТЕОРЕМА 4. *Если в магнитном геодезическом потоке $T(f, \Lambda)$ на торе пара функций f, Λ удовлетворяет условиям 1–3 из $S2$ и значение $h > 0$ отлично от абсцисс точек возврата кривой γ_1 , то $K|_{Q_h^3}$ — функция Ботта, и имеет место следующее:*

1) Молекула Фоменко функции Ботта $K|_{Q_h^3}$ имеет ровно один цикл при $h \neq h_0$ и является деревом при $h = h_0$. В ее вершинах степени 1 находятся 3-атомы A , а в других вершинах — седловые 3-атомы $V = V_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \times S^1$ или $P = P_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \times S^1$. При $h < h_0$ 3-атом P отсутствует, при $h = h_0$ — единствен и отличен от $P_{+...+} \times S^1$ и $P_{-...-} \times S^1$, а при $h > h_0$ таких 3-атомов ровно два, они соединены парой ребер и имеют вид $P_{+...+} \times S^1$ и $P_{-...-} \times S^1$.

2) Топологический инвариант Фоменко – Цишанга слоения Лиувилля на изоэнергетическом многообразии Q_h^3 (с ориентацией гиперболических орбит, заданной потоком $\text{sgrad } K = \tilde{\omega}^{-1}dK$) задается этой молекулой Фоменко со следующими метками:

- (i) $r = 0$, $\varepsilon = \pm 1$ на ребрах вида $A - V$ и $A - P$, где знак “–” берется в случае, когда 3-атом A соответствует локальному минимуму функции $K|_{Q_h^3}$, а знак “+” — в случае, когда 3-атом A соответствует локальному максимуму функции $K|_{Q_h^3}$;
- (ii) $r = \infty$, $\varepsilon = 1$ на ребрах вида $V - V'$, $P - P'$, $V - P$;
- (iii) все седловые атомы образуют единственную семью с меткой $n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение уже доказано в теореме 3.

Докажем второе утверждение, следуя доказательству [9, теорема 4.8]. Зафиксируем граничный тор 3-атома (тор Лиувилля). Ему отвечают значения $H = h = \text{const}$, $K = k = \text{const}$. Определим на нем два цикла

$$\alpha_r = \left\{ \pm \sqrt{2(h - U_k(r))}, K = k, r \in [r_1, r_2], \varphi = \text{const} \right\},$$

$$\alpha_\varphi = \{p_r = \text{const}, K = k, r = \text{const}, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\},$$

где $[r_1, r_2]$ — проекция на координату r тора Лиувилля, т.е. соответствующей связной компоненты области возможного движения $R_{h,k} = \{(r \bmod L, \varphi) : U_k(r) \leq h\}$ (здесь $R_{h,k}$ — проекция на конфигурационное многообразие интегрального многообразия, соответствующего значениям $H = h = \text{const}$, $K = k = \text{const}$), которая связана с “цилиндрической” областью Π_h из замечания 16 (d) соотношением $(\Pi_h \cap \{k = \text{const}\}) \times S^1 = \{k\} \times R_{h,k}$. Ориентация цикла α_φ задана направлением векторного поля $\text{sgrad } K = \omega^{-1}dK = (0, 0, 0, 1)$, а направление обхода цикла α_r выбрано так, что возрастанию r соответствуют $p_r > 0$, а убыванию r соответствуют $p_r < 0$. Как и в случае сферы, $\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}(v_{\alpha_r}, v_{\alpha_\varphi}, \text{grad } K, \text{grad } H) > 0$, см. [9, формула (4.3)]. Выразим допустимые базисы на граничных торах через циклы α_r, α_φ .

Важно отметить, что поведение системы на торе качественно отличается от системы на сфере, так как эффектов, сходных с “перебрасыванием” базисного цикла через полюс сферы, здесь не наблюдается. Это также является весомым аргументом в пользу прямого вычисления метки n .

Как и в случае сферы [9], на граничном торе 3-атома A допустимый базис выберем в виде $\lambda_A = -\alpha_r$, $\mu_A = \mp\alpha_\varphi$, а на граничных торах 3-атома V или P — в виде $\lambda_V = \alpha_\varphi$, $\mu_V = \mp\alpha_r$, при этом цикл на положительной границе 3-атома берется с верхним знаком, на отрицательной — с нижним знаком (знак $\mp$ в формуле для цикла μ_A — это знак $\sigma = \text{sgn}(k'/h')$ критической окружности 3-атома [9, замеч. 4.6]).

Следовательно, на ребрах, соединяющих седловые 3-атомы, матрица склейки равна C_{VV} , на ориентированных ребрах вида $A \rightarrow V$ или $A \rightarrow P$ равна C_{AV} , а на ориентированных ребрах вида $V \rightarrow A$ или $P \rightarrow A$ равна C_{VA} , где $C_{VV} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C_{AV} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C_{VA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Из вида этих матриц склейки находим метки r, ε на ребрах, а также получаем, что вклад любого ребра в метку n равен 0. Поэтому и метка n также нулевая. Теорема доказана. $\square$

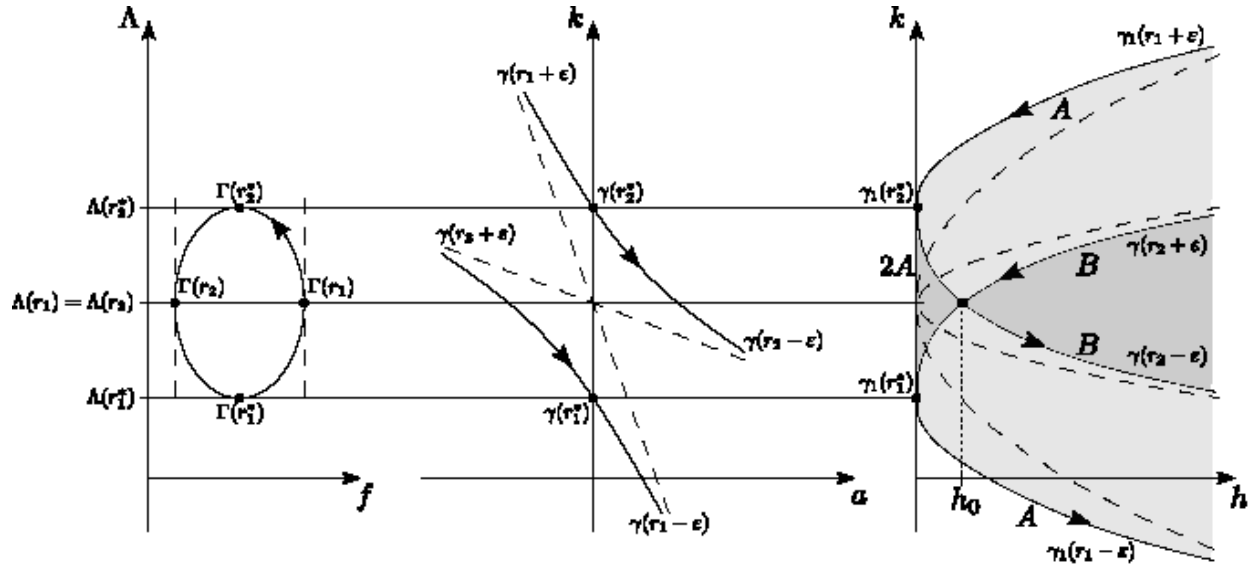


Рис. 4: Кривые $\Gamma = (f, \Lambda, 1)$, $\gamma = (a, -1, k)$ и $\gamma_1 = (h, k)$ для точного магнитного геодезического потока на торе (пример)

ЗАМЕЧАНИЕ 17. (а) На рис. 4 показан пример соответствующих кривых $\Gamma = (f, \Lambda, 1)$, $\gamma = (a, -1, k)$ и $\gamma_1 = (h, k) = (a^2/2, k)$ для точного магнитного геодезического потока на торе, при этом соответствующие проективные кривые $(f : \Lambda : 1)$ и $(a : -1 : k)$ проективно двойственны, как и в случае систем на сфере [9]. Бифуркационная диаграмма содержится в полуплоскости $\{h \geq 0\}$ и состоит из вертикального отрезка $\gamma_2 \subset \{h = 0\}$ и кривой γ_1 (ориентированной параметром $r \in I \subset [0, L]$), имеющей “двусторонние асимптоты-параболы” $\{h = U_{\Lambda(r_i)}(r_i)\}$ (показанные пунктиром). Все указанные асимптоты-параболы касаются оси $\{h = 0\}$ в своих вершинах. На рис. 4 метки A, B на дугах бифуркационной диаграммы описывают топологию слоения Лиувилля вблизи соответствующего 1-параметрического семейства невырожденных особых слоев (эллиптический 3-атом A , гиперболический 3-атом B). В плоскости (h, k) светло-серым цветом показаны области с одним тором Лиувилля в прообразе каждой точки; темно-серым цветом — с двумя торами Лиувилля в прообразе каждой точки. Молекулы Фоменко имеют вид $A - B = B - A$ для всех уровней энергии $h > 0$, кроме h_0 , а для уровня $h = h_0$ — вид $A - C_1 - A$. Здесь (h_0, k_0) — точка пересечения двух дуг бифуркационной кривой γ_1 , $C_1 = P_{-+}$ (рис. 2).

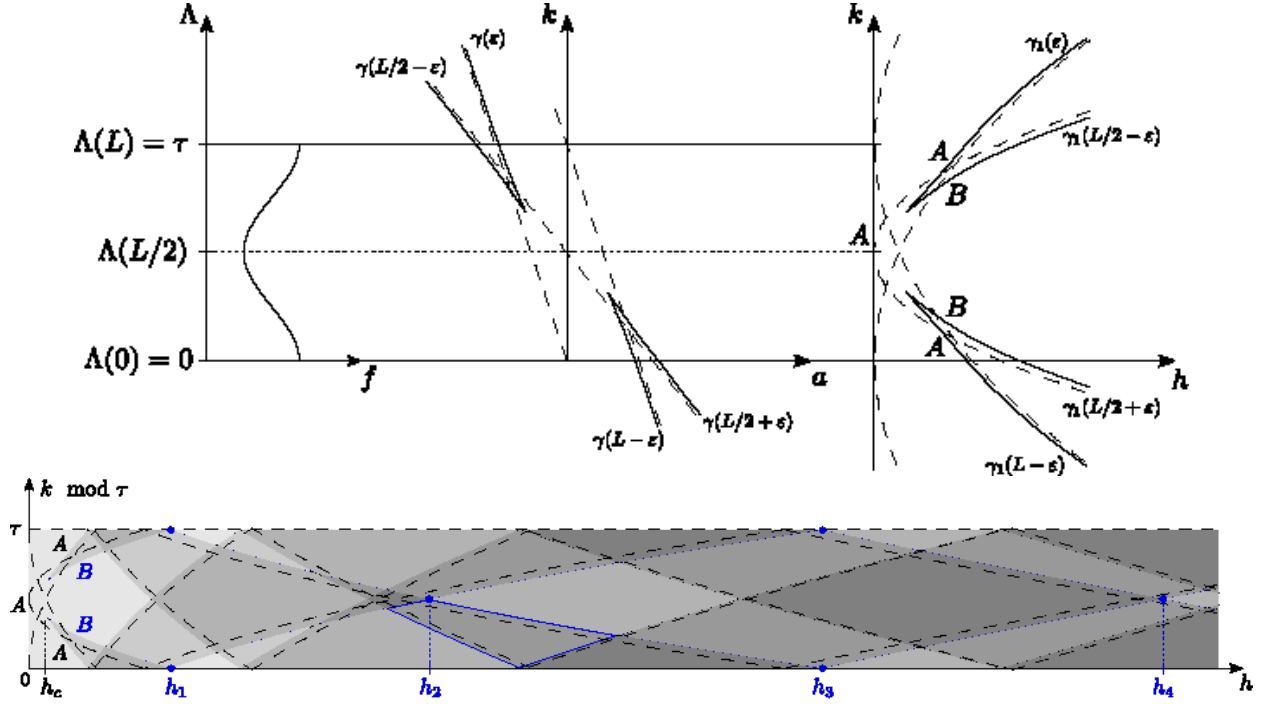


Рис. 5: Кривые $\Gamma = (f, \Lambda, 1)$, $\gamma = (a, -1, k)$, $\gamma_1 = (h, k)$ и бифуркационная диаграмма в цилиндре $(h, k \bmod \tau)$ для неточного магнитного геодезического потока на торе (пример)

(b) На рис. 5 показан пример аналогичных кривых для магнитного поля, не являющегося точным. В этом случае плоская кривая (f, Λ) не является замкнутой, но индуцирует замкнутую кривую в цилиндре $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z})$. Ее проективно двойственная кривая $(a : -1 : k)$ тоже незамкнута, но индуцирует замкнутую кривую $(a, k \bmod \tau)$ в этом цилиндре. Получаем бифуркационную диаграмму в полуцилиндре $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z})$, состоящую из кривой $\gamma_1 = (h, k \bmod \tau) = (a^2/2, k \bmod \tau)$ и граничной окружности $\gamma_2 = \{0\} \times (\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z})$ полуцилиндра. В этом полуцилиндре светло-серым цветом показаны области с одним тором Лиувилля в прообразе каждой точки, а более темными цветами — с большими количествами торов Лиувилля в прообразе каждой точки. Молекула Фоменко является окружностью при $0 < h < h_c$ (рис. 3,d); для всех уровней энергии $h > h_c$, кроме $h_1, h_2, \dots$, она имеет вид как на рис. 3,e; для уровней энергии $h \in \{h_1, h_2, \dots\}$ она имеет вид как на рис. 3,f. Здесь h_c — это абсцисса обеих точек возврата бифуркационной кривой γ_1 , уровни энергии $h_1 < h_2 < \dots$ — это абсциссы точек пересечения гиперболических дуг кривой γ_1 (в этих точках тангенсы углов наклона касательных имеют разные знаки), $D_2 = V_{+-}$ (см. первую часть теоремы 2 и замечание 16 (с)). Неограниченность такой последовательности уровней энергии $h_1, h_2, \dots$ доказывается аналогично построению значения h_0 для точного магнитного поля (см. начало раздела 4).

Авторы приносят благодарность А.Т. Фоменко за постановку задачи, А.В. Болсинову и А.А. Ошемкову за ценные комментарии и обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.
2. Кантонистова Е.О. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле // Матем. сб. 2016. Т. 207, №3. С. 47–92.
3. Тимонина Д.С. Лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков в потенциальном поле на двумерных многообразиях вращения: торе и бутылке Клейна // Матем. сб. 2018. Т. 209, №11. С. 103–136.
4. Антонов Е.И., Козлов И.К. Лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков на проективной плоскости в потенциальном поле // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, №2. С. 10–25.
5. Kozlov I., Oshemkov A. Integrable systems with linear periodic integral for the Lie algebra $e(3)$ // Lobachevskii J. Math. 2017. Vol. 38. P. 1014–1026.
6. Кудрявцева Е.А., Ошемков А.А. Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, №2. С. 244–265.
7. Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Серия матем. 1986. Т. 50, №6. С. 1276–1307.
8. Фоменко А.Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // Доклады АН СССР. 1986. Т. 287, №5. С. 1071–1075.
9. Kobtsev I.F., Kudryavtseva E.A. Bifurcations of magnetic geodesic flows on surfaces of revolution // Russian Journal of Mathematical Physics (in print).
10. Фоменко А.Т., Цишанг Х. О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике // Доклады АН СССР. 1987. Т. 294, №2. С. 283–287.
11. Фоменко А.Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил. 1988. Т. 22, №4. С. 38–51.
12. Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. 1990. Т. 54, №3. С. 546–575.
13. Ведюшкина В.В., Пустовойтов С.Е. Классификация слоений Лиувилля интегрируемых топологических билиардов в магнитном поле // Матем. сб. 2023. Т. 214, №2. С. 23–57.
14. Болсинов А.В., Рихтер П., Фоменко А.Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. 2000. Т. 191, №2. С. 3–42.
15. Efstathiou K., Giacobbe A. The topology associated with cusp singular points // Nonlinearity. 2012. V. 25. P. 3409–3422.

16. Bolsinov A. V., Guglielmi L., Kudryavtseva E. A. Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems with two degrees of freedom // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2018. V. 376, №2131. 20170424.
17. Lerman L. M., Umanskii Ya. L. The structure of a Poisson action of R^2 on a four-dimensional symplectic manifold. I // Selecta Math. Sov. 1987 (transl. from Russian preprint of 1981). V. 6. P. 365–396.
18. Lerman L. M., Umanskii Ya. L. Classification of four-dimensional integrable Hamiltonian systems and Poisson actions of R^2 in extended neighborhoods of simple singular points. I // Russian Acad. Sci. Sb. Math. 1994. V. 77, №2. P. 511–542.
19. Kudryavtseva E., Martynchuk N. Existence of a smooth Hamiltonian circle action near parabolic orbits and cuspidal tori // Regular and Chaotic Dynamics. 2021. V. 26, №6. P. 732–741.
20. Kudryavtseva E. A. Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems // Europ. J. Math. 2022. V. 8. P. 1487–1549.

REFERENCES

1. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, London, N.Y., Washington.
2. Kantonistova, E. O. 2016, “Topological classification of integrable Hamiltonian systems in a potential field on surfaces of revolution”, *Sb. Math.*, vol. 207, no. 3, pp. 358–399.
3. Timonina, D. S. 2018, “Liouville classification of integrable geodesic flows in a potential field on two-dimensional manifolds of revolution: the torus and the Klein bottle”, *Sb. Math.*, vol. 209, no. 11, pp. 1644–1676.
4. Antonov, E. I. & Kozlov, I. K. 2020, “Liouville classification of integrable geodesic flows on a projective plane in potential field”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 10–25.
5. Kozlov, I. & Oshemkov, A. 2017, “Integrable systems with linear periodic integral for the Lie algebra $e(3)$ ”, *Lobachevskii J. Math.*, vol. 38, pp. 1014–1026. <https://doi.org/10.1134/S1995080217060063>
6. Kudryavtseva, E. A. & Oshemkov, A. A. 2020, “Bifurcations of integrable mechanical systems with magnetic field on surfaces of revolution”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 244–265.
7. Fomenko, A. T. 1987, “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 29, no. 3, pp. 629–658.
8. Fomenko, A. T. 1986. “Morse theory of integrable Hamiltonian systems”, *Soviet Math. Dokl.*, vol. 33, no. 2, pp. 502–506.
9. Kobtsev, I. F. & Kudryavtseva, E. A. 2024, “Bifurcations of magnetic geodesic flows on surfaces of revolution”, *Russian Journal of Mathematical Physics* (in print).
10. Fomenko, A. T. & Zieschang, H. 1987, “On the topology of the three-dimensional manifolds arising in Hamiltonian mechanics”, *Soviet Math. Dokl.*, vol. 35, no. 2, pp. 520–534.
11. Fomenko, A. T. 1988, “Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, vol. 22, no. 4, pp. 286–296.

12. Fomenko, A. T. & Zieschang, H. 1991, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Math. USSR Izv.*, vol. 36, no. 3, pp. 567–596.
13. Vedyushkina, V. V. & Pustovoitov, S. E. 2023, “Classification of Liouville foliations of integrable topological billiards in magnetic fields”, *Sb. Math.*, vol. 214, no. 2, pp. 166–196.
14. Bolsinov, A. V., Richter, P. H. & Fomenko, A. T. 2000, “The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top”, *Sb. Math.*, vol. 191, no. 2, pp. 151–188.
15. Efstathiou, K. & Giacobbe, A. 2012, “The topology associated with cusp singular points”, *Nonlinearity*, vol. 25, pp. 3409–3422.
16. Bolsinov, A. V., Guglielmi, L. & Kudryavtseva, E. A. 2018, “Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems with two degrees of freedom”, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 376, no. 2131, 20170424.
17. Lerman, L. M. & Umanskii, Ya. L. 1987, “The structure of a Poisson action of R^2 on a four-dimensional symplectic manifold. I”, *Selecta Math. Sov.* (transl. from Russian preprint of 1981), vol. 6, pp. 365–396.
18. Lerman, L. M. & Umanskii, Ya. L. 1994, “Classification of four-dimensional integrable Hamiltonian systems and Poisson actions of R^2 in extended neighborhoods of simple singular points. I”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, vol. 77, no. 2, pp. 511–542.
19. Kudryavtseva, E. & Martynchuk, N. 2021, “Existence of a smooth Hamiltonian circle action near parabolic orbits and cuspidal tori”, *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 26, no. 6, pp. 732–741.
20. Kudryavtseva, E. A. 2022, “Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems”, *Europ. J. Math.*, vol. 8, pp. 1487–1549.

Получено: 13.01.2025

Принято в печать: 07.04.2025