

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 2.

УДК 514

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-90-100

Устойчивость решений задачи Ферма – Торичелли в нормированных плоскостях

Д. А. Илюхин

Илюхин Даниил Александрович — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: daniil.ilukhin@math.msu.ru

Аннотация

В статье изучается устройство неединственных решений задачи Ферма – Торичелли в нормированных плоскостях. Была поставлена проблема наличия свойства устойчивости у таких решений. Получены результаты в виде необходимых и достаточных условий для устойчивости всех решений для наборов из трёх точек в нормированной плоскости. Кроме того, в качестве иллюстрации были рассмотрены бифуркационные диаграммы решений и исследовано их строение.

Ключевые слова: проблема Ферма – Торичелли, нормирующий функционал, устойчивость решений задачи Ферма – Торичелли.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Илюхин Д.А. Устойчивость решений задачи Ферма – Торичелли в нормированных плоскостях // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 90–100.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 2.

UDC 514

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-90-100

The stability of Fermat – Torricelli problem's locus in normed planes

D. A. Ilyukhin

Ilyukhin Daniil Alexandrovich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: daniil.ilukhin@math.msu.ru

Abstract

The article studies the structure of non-unique solutions of the Fermat–Torricelli problem in normed planes. The problem of the presence of the stability property for such solutions was posed. The results were obtained in the form of necessary and sufficient conditions for the stability of all solutions for sets of three points in a normed plane. In addition, as an illustration, bifurcation diagrams of solutions were considered and their structure was investigated.

Keywords: Fermat – Torricelli problem, norming functional, stability of Fermat – Torricelli problem's locus.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Ilyukhin, D.A. 2025, “The stability of Fermat – Torricelli problem's locus in normed planes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 90–100.

1. Введение

Задача поиска точки, минимизирующей сумму расстояний от неё до заданного множества точек в метрическом пространстве, впервые упоминается в 17 веке. В 1643 году Ферма поставил задачу для трёх точек на евклидовой плоскости, и в том же веке Торричелли предложил решение этой проблемы ([3]).

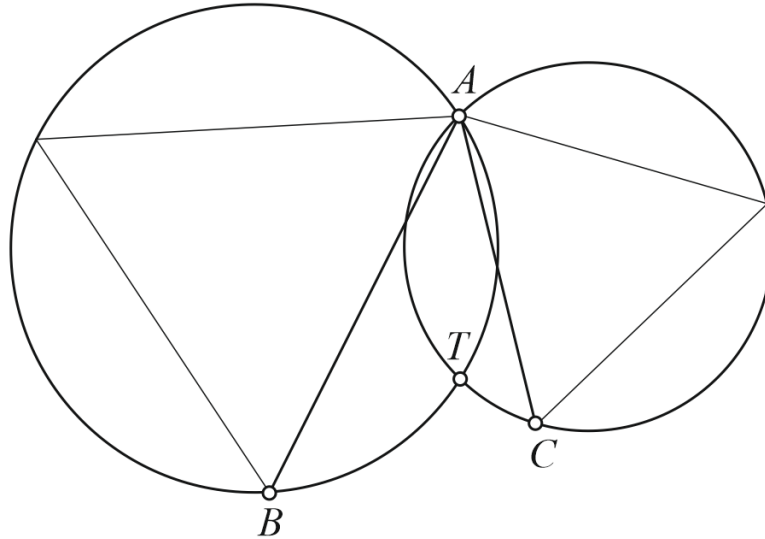


Рис. 1: Конструкция, предложенная Торричелли. Точка T является решением задачи для заданных точек A, B, C ([13])

С тех пор были рассмотрены различные обобщения этой проблемы. Задача была сформулирована для произвольных количества точек, размерности пространства, а также нормы, заданной в этом пространстве. Простота формулировки позволяет рассматривать задачу даже в произвольном метрическом пространстве. К примеру, задача для четырёх точек на евклидовой плоскости решена Д. Фаньяно ([2], [10]). А для случая пяти точек было доказано, что задача неразрешима в радикалах, доказательство приведено в [1] и [5]. Кроме того, существует обобщённая задача, в которой вершины рассматриваются вместе с некоторыми положительными величинами, называемых весами. О развитии взвешенной задачи можно прочитать в работах [14], [15], [12]. В частности, были доказаны существование и единственность решения такой задачи для трёх точек на евклидовой плоскости ([10]).

В этой статье будет рассматриваться классический вариант задачи: поиск точки, для которой достигается минимум суммы расстояний до элементов подмножества метрического пространства. Такую формулировку будем называть *обобщённой проблемой Ферма – Торричелли* (или просто *проблемой Ферма – Торричелли*). Работа опирается на статью [11], в ней описано применение геометрического подхода к задаче и изложены некоторые новые результаты, которые получены в рамках вещественных конечномерных нормированных пространств.

В предыдущей статье [7] были достигнуты результаты по определению необходимых и достаточных условий единственности решений задачи Ферма – Торричелли для любых n точек в произвольном конечномерном нормированном пространстве. Теперь поставлена цель по исследованию устойчивости неединственных решений и условий на нормированное пространство, обеспечивающих такое свойство для всех наборов.

Выражаю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.А. Тужилину, а также д.ф.-м.н. профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Проблема Ферма – Торичелли и методы её решения

В этом разделе рассмотрим современные методы решения задачи Ферма – Торичелли в рамках конечномерных нормированных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Точка x_0 называется точкой Ферма – Торичелли для точек $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, если $x = x_0$ минимизирует $\sum_{i=1}^n |xx_i|$. Множество всех таких точек обозначим $\text{ft}(A)$.

Из свойств функции $\sum_{i=1}^n |xx_i|$ можно получить следующее утверждение про множество решений задачи Ферма – Торичелли, см. например [4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ – точки в пространстве. Тогда $\text{ft}(A)$ – непустое, компактное и выпуклое множество.

Теперь будет изложен геометрический метод построения решения задачи Ферма – Торичелли. Чтобы его использовать, наряду с исходным пространством X нужно рассматривать двойственное к нему пространство X^* , состоящее из линейных функционалов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функционал $\varphi \in X^*$ называется нормирующим для вектора $x \in X$, если $\|\varphi\| = 1$ и $\varphi(x) = \|x\|$.

Следующая теорема является критерием принадлежности некоторой точки множеству решений задачи Ферма – Торичелли.

ТЕОРЕМА 1 ([6], [8]). Пусть $x_0, x_1, \dots, x_n$ – точки в пространстве и $x_0 \neq x_i$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда x_0 – точка Ферма – Торичелли для $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ тогда и только тогда, когда для каждого вектора $x_i - x_0$, $i = 1, \dots, n$, существует нормирующий функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 0$.

Допустим, что найдена точка, являющаяся решением для множества A . Теперь с помощью функционалов из теоремы 1 можно построить всё множество $\text{ft}(A)$. Для этого введём новый объект.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть даны функционал $\varphi \in X^*$ и точка $x \in X$. Определим конус $C(x, \varphi) = x - \{a : \varphi(a) = \|a\|\}$.

ТЕОРЕМА 2 ([6]). Пусть $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ – точки в пространстве и $p \in \text{ft}(A) \setminus A$. По теореме 1 для каждого вектора $x_i - p$, $i = 1, \dots, n$, существует нормирующий функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 0$. Тогда $\text{ft}(A) = \cap_{i=1}^n C(x_i, \varphi_i)$.

Теоремы 1 и 2 составляют геометрический метод поиска решения задачи Ферма – Торичелли. Чтобы описать применение этой теоремы, рассмотрим пример с вершинами равнобедренного треугольника в шестиугольной норме (рисунок 2).

Во-первых, найдём хотя бы одно решение. Возьмём $p = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ и с помощью теоремы 1 докажем, что $p \in \text{ft}(A)$. Для этого рассмотрим векторы $x_1 - p, x_2 - p, x_3 - p$ и построим их нормирующие функционалы. Так как они лежат на одних направлениях с внутренними точками уплощений, то для каждого из векторов $x_i - p$ существует ровно один функционал φ_i , линия уровня которого содержит соответствующее уплощение. Уплощения равноудалены от начала координат и задают равносторонний треугольник, следовательно, сумма функционалов, построенных по ним, равна нулю, и условие теоремы выполнено.

Теперь воспользуемся теоремой 2, чтобы отыскать все решения. Построим конус, задаваемый функционалом φ_2 и вектором $x_2 - p$. Так как функционал является нормирующим для всех точек уплощения, множество $\{a : \varphi_2(a) = \|a\|\}$ представляет собой набор лучей, выходящих из начала координат и проходящих через точки уплощения, то есть угол, стороны

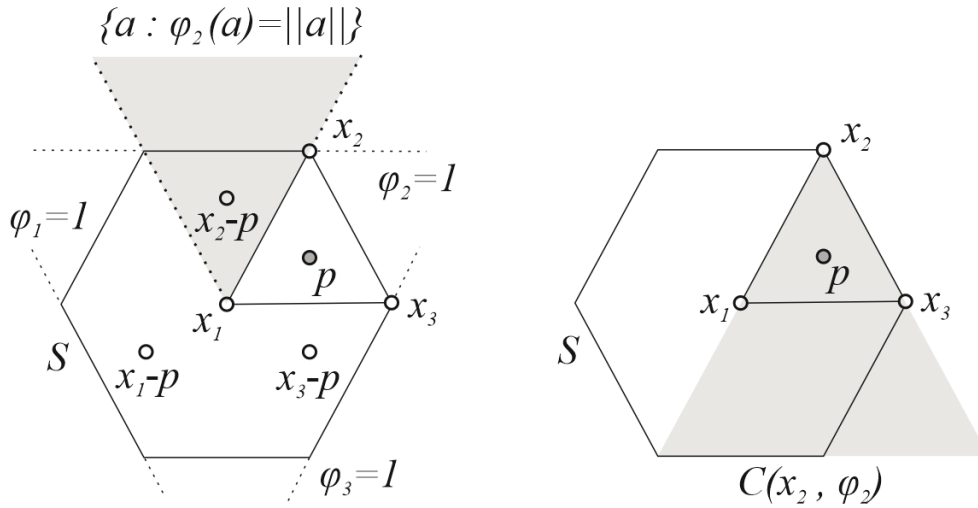


Рис. 2: Построение полного множества решений для точек x_1, x_2, x_3 на плоскости с шестиугольной нормой

которого содержат две соседние вершины. Теперь отразим угол относительно начала координат и совершим параллельный перенос так, чтобы вершина угла оказалась в точке x_2 . После аналогичного построения двух других конусов получим, что их пересечением является весь треугольник $x_1x_2x_3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Утверждение теоремы 2 не зависит от выбора точки p и функционалов φ_i .

Геометрический метод даёт общее описание решений задачи Ферма – Торричелли для различных заданных множеств — это пересечение некоторых конусов с вершинами, расположенными в точках этого множества. В случае плоскости это наблюдение позволяет сформулировать следующие утверждения:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 ([11]). Пусть $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ — точки на плоскости. Тогда $\text{ft}(A)$ — выпуклый многоугольник, который может вырождаться в отрезок или точку.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 ([11]). Пусть в пространстве точки множества $A = \{x_1, \dots, x_{2k+1}\}$ расположены на одной прямой в порядке их нумерации. Тогда $\text{ft}(A) = \{x_{k+1}\}$.

3. Конфигурационные пространства для задачи Ферма – Торричелли и устойчивость её решений

Пусть X — нормированное пространство размерности d . Рассмотрим в нём задачу Ферма – Торричелли для n точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Конфигурационным пространством $C_{X,n}$ называется евклидово пространство $\mathbb{R}^{nd}(x_{11}, \dots, x_{1d}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nd})$, точкам которого соответствуют наборы точек пространства X .

3.1. Устойчивость решений задачи Ферма – Торричелли

Наборы точек нормированного пространства разделяются на два класса в зависимости от характера единственности их решения задачи Ферма – Торричелли. Чтобы изучить, как устро-

ена граница между ними в конфигурационном пространстве, рассмотрим свойство устойчивости решений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть решение задачи Ферма – Торичелли для набора точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ единственно (неединственно). Будем говорить, что решение устойчиво, если существует окрестность набора $\mathbf{x}$ в конфигурационном пространстве $S_{X,n}$ такая, что для любого набора из этой окрестности решение задачи Ферма – Торичелли тоже единственно (неединственно).

Назовём X пространством с устойчивой n -единственностью (n -неединственностью), если любое единственное (неединственное) решение для n точек является устойчивым.

Сначала покажем, что вопрос об устойчивости единственности решения тривиален.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть n нечётно. Пространство X является пространством с устойчивой n -единственностью тогда и только тогда, когда решение задачи Ферма – Торичелли единственно для любых n точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что в X есть набор точек такой, что решение неединственно. Можно считать, что оно содержит ноль. Рассмотрим соответствующее этому решению согласованное множество граней. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — набор внутренних точек этих граней. Для любого $\lambda > 0$ решение задачи для набора $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ тоже неединственно. Тогда в любой окрестности нуля лежит набор $\lambda\mathbf{x}$ с неединственным решением при достаточно малом $\lambda > 0$. При этом для самого нулевого набора решение единственно. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для чётного n пространств с устойчивой n -единственностью не существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для чётного числа различных точек, лежащих на одной прямой, решение всегда неединственно. Аналогично предыдущему доказательству получаем, что нулевой набор неустойчив. $\square$

Изучение устройства неединственных решений начнём с рассмотрения шестиугольных нормированных плоскостей.

ЛЕММА 1. Для каждой шестиугольной нормированной плоскости её набор согласованных множеств граней относится к одному из трёх типов:

- (1) Существуют только согласованные множества из трёх граней-отрезков и из трёх граней-точек $\iff$ Неединственными решениями являются только многоугольники.
- (2) Существуют все виды согласованных множеств кроме трёх граней-отрезков $\iff$ Неединственными решениями являются только отрезки.
- (3) Существуют только согласованные множества из трёх граней-точек $\iff$ Неединственных решений не существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что три грани-отрезка шестиугольной нормированной плоскости составляют согласованное множество. Для двух функционалов, опирающихся на две несоседние грани шестиугольника, дополняющий их до нуля функционал опирается на третью грань, поэтому согласованного множества из двух отрезков и точки не существует. Если в согласованное множество входят две точки, то они противоположные. Опирающиеся на них функционалы не могут дополнять функционал грани до нуля, так как точка пересечения опорных прямых лежит дальше точки пересечения опорных прямых прилежащих к ним граней, который действительно дополняет до нуля первый функционал.

Пусть существует согласованное множество из двух граней-точек и грани-отрезка. Грани-точки противоположны, через них проходит нулевой уровень функционала грани-отрезка. Можно поверачивать функционалы граней-точек вокруг самих точек так, чтобы точка их пересечения оставалась на линии уровня первого функционала $\varphi = -2$, при этом сумма функционалов будет оставаться нулевой. Повернём их так, что один из функционалов станет опорным для грани, прилежащей к опорной точке. Получим согласованное множество из двух граней-отрезков и одной грани-точки. Аналогично можно получить из согласованных двух отрезков и точки согласованные две точки и один отрезок. Утверждение доказано. $\square$

Как будет показано далее, оба типа шестиугольной плоскости обладают устойчивой 3-неединственностью. На рисунке 3 проиллюстрирован этот факт в виде бифуркационных диаграмм.

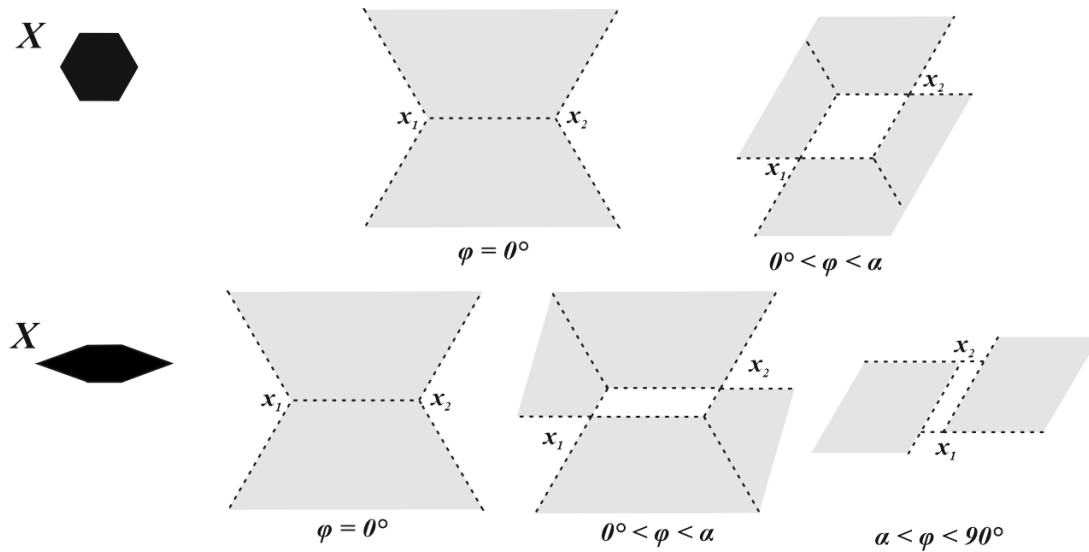


Рис. 3: Неединственные решения в шестиугольных нормах

ЛЕММА 2. Пусть для набора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ решение единственно (неединственно) и существуют окрестности для всех точек x_i кроме одной x_n такие, что для любого набора $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_{n-1}, x_n)$, где x'_i из окрестности x_i , решение тоже единственно (неединственно). Тогда решение устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению устойчивости решения единственность или неединственность должна сохраняться для всех точек некоторой окрестности набора. Это эквивалентно сохранению решения для наборов, где каждая компонента взята из окрестности компоненты исходного набора. Однако так как параллельный перенос набора точек сохраняет решение задачи Ферма – Торричелли, то можно ограничиться теми наборами, где одна из компонент остаётся на месте. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Все нормированные плоскости, норма на которых задаётся многоугольниками, обладают устойчивой 3-неединственностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ решение задачи Ферма – Торричелли неединственно и ноль входит в решение. Функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — нормирующие для x_1, x_2, x_3 . Нужно рассмотреть три варианта состава согласованного множества граней, соответствующего набору φ_i .

Случай 1. Пусть каждый функционал φ_i опирается на грань-отрезок.

Если хотя бы две точки $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ принадлежат внутренностям уплощений, то для них существуют окрестности такие, что для любого набора x'_1, x'_2, x_3 решение неединственно. Тогда по лемме 2 решение устойчиво.

Если две точки $\hat{x}_i$ и $\hat{x}_j$ — противоположные вершины единичной окружности, то параллельным переносом сдвинем набор вдоль диагонали единичной окружности, на которой лежит точка $\hat{x}_i$. Направление переноса нужно задать так, чтобы точка x_j сохранила свой нормирующий функционал. Получили предыдущий случай, для которого решение устойчиво.

Если точки $\hat{x}_i$ и $\hat{x}_j$ противоположны, то грани, на которые опираются их нормирующие функционалы, лежат с одной стороны от прямой, содержащей отрезок $\overline{x_i x_j}$. Значит, можно сдвинуть параллельным переносом набор x_1, x_2, x_3 в направлении, перпендикулярном отрезку $\overline{x_i x_j}$ так, что точки $\hat{x}_i, \hat{x}_j$ попадут внутрь уплощений.

Пусть все точки $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ не лежат внутри уплощений. Проверим сдвиги вдоль диаметров единичной окружности, содержащих точки x_i . Если для некоторого диаметра существует сдвиг, после которого две другие точки попадают внутрь уплощений, соответствующих своим функционалам, то получаем устойчивость. Если такого сдвига не существует, то конусы, выходящие из x_i , пересекаются только по нулю, и решение единственно.

Случай 2. Пусть функционалы φ_1 и φ_2 опираются на уплощения, а φ_3 — на вершину. Если точки $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ лежат внутри уплощений, то для них существуют окрестности такие, что для любого набора x'_1, x'_2, x_3 решение неединственно. Тогда по лемме 2 решение устойчиво.

Если одна из точек $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ — вершина, то сдвинем набор $\mathbf{x}$ вдоль диаметра единичной окружности, содержащего точку $\hat{x}_3$, так, чтобы все точки $\hat{x}_i$ сохранили свои функционалы.

Если обе точки $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ являются вершинами, то снова рассмотрим возможность сдвига вдоль диаметра, содержащего $\hat{x}_3$. В случае существования сдвига такого, что точки $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ попадают внутрь уплощений, получаем устойчивость. Если независимо от направления сдвига одна из точек не сохраняет свой нормирующий функционал, то исходные точки $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ расположены так, что конусы, выходящие из них пересекаются на диаметре, содержащем $\hat{x}_3$, только по нулю. В таком случае решение единственно, и, следовательно, такой случай не возникает.

Случай 3. Пусть функционал φ_1 опирается на уплощение, а φ_2 и φ_3 — на вершины. Тогда эти вершины противоположны, и можно повернуть φ_2 и φ_3 вокруг точек касания так, что один из них станет опираться на уплощение. Таким образом, тому же набору $\mathbf{x}$ теперь соответствует согласованное множество из двух уплощений и вершины. Этот случай уже разобран, значит, решение устойчиво. $\square$

Для полного описания норм с устойчивой 3-неединственностью дополним определение согласованного множества граней единичной сферы из [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Возьмём конечное множество граней F единичной сферы S пространства Минковского. Для каждой $f_i \in F$ выберем опорную гиперплоскость π_i так, что $\pi_i \cap S = f_i$. Пусть гиперплоскость π_i задаёт поверхность уровня $\varphi_i = 1$ некоторого линейного функционала φ_i . Если найдётся набор опорных гиперплоскостей такой, что сумма построенных функционалов равна нулевому, то такое множество граней называется согласованным.

Согласованное множество граней $F_0 = \{f_1^0, \dots, f_n^0\}$ называется максимальным, если не существует другого согласованного множества $F = \{f_1, \dots, f_n\}$, полностью покрывающего его, то есть такого, что $f_i^0 \subset f_i$ для любого $i = 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 3. В нормированной плоскости существует набор из трёх точек с неустойчивым неединственным решением, если и только если у её единичной окружности найдётся максимальное согласованное множество граней из двух точек и уплощения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждение доказательства утверждения 6 для случаев 1 и 2 верно и для произвольных нормированных плоскостей. Случай 3 также имеет место, если согласованное

множество из уплощения и двух вершин не является максимальным. Таким образом, если искомое согласованное множество отсутствует, то все неединственные решения устойчивы.

Допустим, что единичная окружность имеет согласованное множество F_M из уплощения и двух вершин, и оно максимально. Тогда в некоторой окрестности этих вершин отсутствуют уплощения, а также какие-либо грани других согласованных множеств. Пусть этой окрестности соответствует конус с углом раствора ε и с вершиной в нуле. Рассмотрим набор вершин треугольника, основание которого параллельно прямой, соединяющей вершины из F_M , а третья вершина равноудалена от двух других вершин и находится на достаточно малом расстоянии от основания так что острые углы треугольника меньше, чем ε . Решение для этого набора неединственно и соответствует рассматриваемым граням F_M .

Сдвинем на малое расстояние одну из вершин основания треугольника так, что основание треугольника сменит направление. Допустим, что решение нового набора снова неединственно, тогда одно из решений лежит в треугольнике и не является одной из его вершин. Сдвинем треугольник так, что это решение совпадает с нулём. Лучи, проведённые из нуля к вершинам основания треугольника, должны пересекать согласованные грани единичной окружности. Так как эти пересечения находятся в ε -окрестности вершин из F_M , но не являются ими, то получаем противоречие.

□

3.2. Бифуркационные диаграммы решений

Рассмотрим задачу Ферма – Торричелли для трёх точек в нормированной плоскости. Существуют преобразования плоскости, которые для любого набора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ переводят их множество решений $\text{ft}(\mathbf{x})$ в $\text{ft}(\mathbf{x}')$ — множество решений изменённого набора. Такими преобразованиями являются сдвиги и гомотетии с центром в нуле.

Будем считать, что набор из трёх точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ задаётся полярным углом φ вектора $\overline{x_1x_2}$ и положением точки x_3 относительно этого вектора. Для фиксированного угла φ рассмотрим *бифуркационную диаграмму решений* — разобьём плоскость на два подмножества. Одно из них отвечает положениям точки x_3 , для которых множество $\text{ft}(\mathbf{x})$ состоит из единственного решения, другое — положениям, соответствующим неединственным решениям.

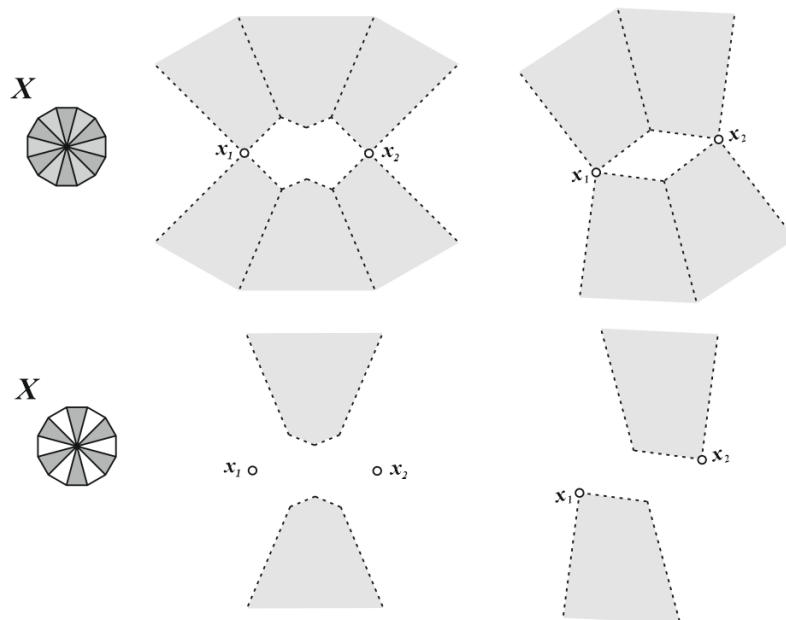


Рис. 4: Бифуркационные диаграммы для многоугольной нормы и нормы с уплощениями

Изучим свойства бифуркационных диаграмм. Так как для любых трёх точек, лежащих на одной прямой, решение единственно и совпадает с одной из этих точек, то получаем первое свойство:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Прямая, содержащая точки x_1 и x_2 , входит в подмножество единственных решений.*

Вид решения задачи Ферма–Торичелли зависит только от направления границ конусов, пересечением которых оно является, отсюда верно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Каждому максимальному согласованному множеству уплощений единичной окружности поставим в соответствие набор углов $\{(\varphi_{11}, \varphi_{12}), \dots, (\varphi_{n1}, \varphi_{n2})\}$, где $(\varphi_{i1}, \varphi_{i2})$ — это полярные углы концов грани f_i . Если грань — точка, то $\varphi_{i1} = \varphi_{i2}$. Эти наборы углов однозначно задают вид бифуркационных диаграмм для данной нормированной плоскости.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Пусть для нормированной плоскости известно множество всех максимальных наборов из трёх согласованных граней. Тогда для любой бифуркационной диаграммы подмножество неединственных решений разбивается на непересекающиеся области такие, что каждому набору соответствует одна область.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пересечение двух разных областей означало бы, что для одного и того же набора точек можно подобрать два разных максимальных согласованных множества, дающих совпадающее решение.

Допустим, что это так. Так как наборы максимальны, то они различаются хотя бы по двум элементам. Если хотя бы один элемент одного набора не пересекается ни с одним из другого, то и соответствующие решения не пересекаются. Пусть два элемента отличны и пересекаются с элементами другого набора по точке, тогда конусы пересекаются по лучу. Получаем, что решение — отрезок. Но в этом случае множества состоят из двух граней-отрезков и одной вершины, причём вершины из разных множеств противоположны. Тогда они могут быть решением для одного и того же набора точек только в том случае, если две точки x_1, x_2 лежат на прямой, соединяющей вершины. Оба множества граней образуют одну и ту же область неединственности — объединение конусов, выходящих из точек отрезка x_1x_2 .

Таким образом, если две разные области неединственности пересекаются, то они совпадают, что и требовалось доказать. $\square$

4. Заключение

Исследование конфигурационных пространств показало, что задача об устойчивости неединственных решений задачи Ферма–Торичелли нетривиальна и позволяет продолжить расширение классификации нормированных пространств относительно характера решений, встречающихся в них.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bajaj C. The algebraic degree of geometric optimization problems. // 1988. Discr. Comput. Geom., 3, 177–191.
2. Boltyanski V., Martini H., Soltan V. Geometric methods and optimization problems. // 1999. Kluwer Acad. Publ.
3. Brazil M., Graham R. L., Thomas D. A., Zachariasen M. On the History of the Euclidean Steiner Tree Problem // 2013.

4. Cieslik D. The Fermat-Steiner-Weber-problem in Minkowski spaces. // 1988. Optimization 19, 485–489.
5. Cockayne E. J., Melzak Z. A. Euclidean constructibility in graph-minimization problems. // 1969. Math. Mag., 42, 206–208.
6. Durier R., Michelot C. Geometrical properties of the Fermat-Weber problem. // 1985. Europ. J. Oper. Res. 20, 332–343.
7. Илюхин Д. А. 2022, “Проблема Ферма–Торричелли в случае трёх точек в нормированных плоскостях“, Чебышевский сборник. Т. 23(5): 72-86.
8. Иванов А. О., Тужилин А. А. Разветвленные геодезические в нормированных пространствах. // 2002. Изв. РАН. Сер. матем., 66:5, 33–82
9. Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. // 2003. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований.
10. Kupitz Y. S., Martini H. Geometric aspects of the generalized Fermat–Torricelli problem. // 1997. Bolyai Society Mathematical Studies 6, 55-127.
11. Martini H., Swanepoel K. J., Weis G. The Fermat–Torricelli problem in normed planes and spaces. // 2002. Journal of Optimization Theory and Applications 115, 283-314.
12. Nguyen S. D. Constrained Fermat-Torricelli-Weber Problem in real Hilbert Spaces // 2018. ArXiv e-prints. arXiv:1806.04296.
13. Torricelli E. De maximis et minimis. // 1919. Opere di Evangelista Torricelli, Faenza, Italy.
14. Uteshev A. Y. Analytical solution for the generalized Fermat–Torricelli problem // 2014. The American Mathematical Monthly 121(4), 318–331.
15. Zachos A. N. An analytical solution of the weighted Fermat-Torricelli problem on the unit sphere // 2014. ArXiv e-prints. arXiv:1408.6495.

REFERENCES

1. Bajaj, C., 1988, “The algebraic degree of geometric optimization problems”, *Discr. Comput. Geom.*, vol. 3, pp. 177–191.
2. Boltyanski, V., Martini, H., Soltan, V., 1999, “Geometric methods and optimization problems”, Kluwer Acad. Publ.
3. Brazil, M., Graham, R.L., Thomas, D.A., Zachariasen, M., 2013, “On the History of the Euclidean Steiner Tree Problem”.
4. Cieslik, D., 1988, “The Fermat-Steiner-Weber-problem in Minkowski spaces”, *Optimization*, vol. 19, pp. 485–489.
5. Cockayne, E.J., Melzak, Z.A., 1969, “Euclidean constructibility in graph-minimization problems”, *Math. Mag.*, vol. 42, pp. 206–208.
6. Durier, R., Michelot, C., 1985, “Geometrical properties of the Fermat-Weber problem”, *Europ. J. Oper. Res.*, vol. 20, pp. 332–343.

7. Ilyukhin, D.A., 2022, “The Fermat–Torricelli problem in the case of three-point sets in normed planes”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 72–86.
8. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A., 2002, “Branching geodesics in normed spaces”, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 66, no. 5, pp. 905–948.
9. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A., 2003, “Extreme Networks Theory”, Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Investigations.
10. Kupitz, Y.S., Martini, H., 1997, “Geometric aspects of the generalized Fermat–Torricelli problem”, *Bolyai Society Mathematical Studies*, vol. 6, pp. 55–127.
11. Martini, H., Swanepoel, K.J., Weis, G., 2002, “The Fermat–Torricelli problem in normed planes and spaces”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 115, pp. 283–314.
12. Nguyen, S.D., 2018, “Constrained Fermat-Torricelli-Weber Problem in real Hilbert Spaces”, *ArXiv e-prints*, arXiv:1806.04296.
13. Torricelli, E., 1919, “De maximis et minimis”, *Opere di Evangelista Torricelli*, Faenza, Italy.
14. Uteshev, A.Y., 2014, “Analytical solution for the generalized Fermat–Torricelli problem”, *The American Mathematical Monthly*, vol. 121, no. 4, pp. 318–331.
15. Zachos, A.N., 2014, “An analytical solution of the weighted Fermat-Torricelli problem on the unit sphere”, *ArXiv e-prints*, arXiv:1408.6495.

Получено: 08.12.2024

Принято в печать: 07.04.2025