

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 2.

УДК 515.124.4+519.852.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-101-124

Симметрии выпуклых многогранников бинарных деревьев

А. О. Иванов, Д. А. Марханов

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (г. Москва).

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Марханов Дмитрий Алексеевич — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: demetryfotball@gmail.com

Аннотация

Задача о поиске минимальных параметрических заполнений конечного метрического пространства M сводится к классической задаче линейного программирования. Множество допустимых значений двойственной задачи представляет собой выпуклый многогранник Λ_G , который зависит только от типа заполнения G — дерева, множество вершин степени 1 которого совпадает с M , а остальные вершины имеют степень 3 (такие деревья называются бинарными, соединяющими M). Вершины этого многогранника играют важную роль при вычислении веса минимального заполнения.

Изоморфным бинарным деревьям, соединяющим одно и то же пространство M , соответствуют, вообще говоря, разные многогранники. В данной работе получен полный ответ на вопрос о том, как они связаны между собой. Кроме того, в работе обсуждается вопрос об устройстве объединения U множеств вершин всех многогранников Λ_G , соответствующих всевозможным бинарным деревьям G , соединяющим данное множество M . Множество $U = U(m)$ зависит только от количества m точек в множестве M . Оказывается при $m \leq 6$ множество $U(m)$ является выпуклым, то есть представляет собой множество вершин некоторого выпуклого многогранника. Выпуклость $U(m)$ при больших m — это открытый вопрос.

Ключевые слова: конечное метрическое пространство, минимальное параметрическое заполнение, линейное программирование, многогранник бинарного дерева, группа перестановок, выпуклость.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Иванов А.О., Марханов Д.А. Симметрии выпуклых многогранников бинарных деревьев // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 101–124.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 2.

UDC 515.124.4+519.852.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-101-124

Convex Polyhedra of Binary Trees and their Symmetries

A. O. Ivanov, D. A. Markhanov

Ivanov Alexandr Olegovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University; Bauman Moscow State Technical University (Moscow).

e-mail: aoivamech.math.msu.su

Markhanov Dmirtii Alexeevich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: demetryfotball@gmail.com

Abstract

Problem of finding minimal parametric fillings of a finite metric space M can be reduced to classical linear programming. The set of admissible values of the dual problem is a convex polyhedron Λ_G that depends on the filling type G , i.e., on a tree, whose set of degree 1 vertices equals M , and all other vertices have degree 3 (such trees are referred as binary trees connecting M). Vertices of this polyhedron have an important role in minimal filling weight calculation.

Generally speaking, isomorphic binary trees connecting the same space M correspond to different polyhedra. In the present paper a complete answer on the relations between such polyhedra is obtained. Besides, the question on the structure of the set U obtained as the union of the vertices of all polyhedra Λ_G over all binary trees connecting a given set M . This set $U = U(m)$ depends on the number of points m in the set M . It turns out that the set $U(m)$ is convex for $m \leq 6$, i.e., it is a vertex set of a convex polyhedron. Convexity of $U(m)$ for other m is an open question.

Keywords: finite metric space, minimal parametric filling, linear programming, convex polyhedron of a binary tree, permutation group, convexity

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Ivanov, A.O., Markhanov, D.A. 2025, “Convex polyhedra of binary trees and their symmetries”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 101–124.

1. Введение

Задачи об оптимальном соединении привлекают специалистов не только из-за наличия многочисленным приложениям, но и благодаря их математической нетривиальности и красоте. Их изучение требует синтетических методов, находящихся на стыке геометрии, комбинаторики, вариационного исчисления, выпуклого анализа. Классическим примером задачи этого типа — задача Штейнера о поиске кратчайшей сети, соединяющей заданный конечный набор точек метрического пространства, см. [1]. Недавно в [2] появилось еще одно обобщение этой задачи — задача о минимальном заполнении конечного метрического пространства [2], [3], [4], в основу которого легли идеи теории М. Громова о минимальном заполнении риманова многообразия, см. [5].

В этом контексте, *заполнением* конечного метрического пространства M называется такой связный граф $G = (V, E)$ с весовой функцией ω на ребрах, который соединяет точки пространства M (то есть $M \subset V$) так, что вес любого пути в графе G между произвольными точками

из M не меньше, чем расстояние между этими точками в метрическом пространстве M . Граф G называется *типом* заполнения. Пусть тип G заполнения фиксирован. Если весовая функция ω такова, что вес заполнения $\omega(G)$ минимален, то заполнение называется *минимальным параметрическим заполнением типа G* . Точная нижняя грань весов $\omega(G)$ минимальных параметрических заполнений по всем возможным типам G графов, соединяющих M , называется *весом минимального заполнения*, а взвешенный граф, на котором этот инфимум достигается — *минимальным заполнением пространства M* . Существование минимального заполнения для произвольного конечного метрического пространства доказано в [2]. Там же показано, что в качестве типа заполнения G достаточно брать так называемые *бинарные деревья*, то есть деревья, степени вершин которых равны 1 или 3, причем множество вершин степени 1 совпадает с M . Более подробно о минимальных заполнениях см. раздел 2.1 ниже, а также [6].

Минимальные заполнения конечных метрических пространств тесно связаны с решениями проблемы Штейнера — кратчайшими деревьями. Действительно, пусть $M \subset X$ — конечное подмножество метрического пространства X . Тогда расстояние между точками в X превращает M в конечное метрическое пространство, а каждое дерево с вершинами в X , которое соединяет M (то есть содержит M как подмножество множества своих вершин), задает заполнение метрического пространства M , если в качестве весовой функции взять длину ребер в X . Поэтому вес минимального заполнения для M дает оценку снизу на длину кратчайшего дерева, соединяющего M . Такие оценки бывают полезны при доказательстве того, что конкретное дерево является кратчайшим. В работах П. Бородина и Б. Беднова [7] полностью описаны банаховы пространства, в которых эта оценка оказывается точной.

Введение в рассмотрение обобщенных заполнений [3] позволило А. Еремину получить общую формулу веса минимального параметрического заполнения в терминах так называемых неприводимых мультиобходов, см. [8], подтвердив, в модифицированном виде, высказанную в [2] гипотезу о связи обходов дерева (см. ниже) и веса минимального заполнения. Однако, полученная формула предполагает экспоненциально большой и комбинаторно сложный перебор, причем ограничения на объекты перебора — неприводимых мультиобходов, — очень грубые.

Еще в работе [2] было замечено, что задача о минимальном параметрическом заполнении сводится к задаче линейного программирования. Двойственная задача, см. например [13], в этом случае — это классическая задача линейного программирования, ее множество допустимых значений — выпуклый многогранник Λ_G , зависящий только от типа G минимального параметрического заполнения. От функции расстояния на метрическом пространстве M зависит только целевая функция, максимум которой соответствует весу минимального параметрического заполнения. Максимум целевой функции достигается в одной из вершин многогранника Λ_G . В работах А. Иванова, А. Тужилина [4] и О. Щербакова [9], [10] была дана геометрическая интерпретация формулы Еремина. Оказалось, что точки многогранника Λ_G с рациональными координатами соответствуют мультиобходам дерева G , а вершины многогранника Λ_G — неприводимым мультиобходам. Таким образом, с этой точки зрения, формула Еремина представляет собой классический результат теории линейного программирования: максимум целевой функции может быть найден как максимум ее значений в вершинах многогранника допустимых значений. Отметим, что в работе [9] показано, что максимум может достигаться в любой из вершин многогранника Λ_G . Таким образом, задача поиска веса минимального параметрического заполнения сводится к нахождению всех вершин многогранника Λ_G .

Одним и тем же бинарным деревом типа G можно по-разному соединять точки пространства M (си. примеры ниже). Цель данной работы — исследовать, как может меняться многогранник Λ_G , в зависимости от того, как одно и то же дерево G соединяет M . Разные способы соединения множества M деревом G можно задавать изменением нумерации элементов множества M , то есть элементами группы перестановок S_m , где m — количество элементов в M . В этих терминах удалось получить полный ответ, см. теорему 1.

Также в работе обсуждается следующий вопрос. Одно и то же множество M можно соединить разными (не изоморфными) бинарными деревьями. Каждому такому дереву соответствует несколько выпуклых многогранников (следствие 2). В работах [4] и [9] разобраны случаи $|M| \leq 5$, см. также ниже. Показано, что объединение множеств вершин всех этих многогранников также представляет собой множество вершин выпуклого многогранника. В данной работе разобран случай $|M| = 6$. Оказалось, что имеет место тот же результат.

2. Основные определения

В данном разделе приведены необходимые определения и результаты.

2.1. Минимальные заполнения конечных метрических пространств

Пусть M — произвольное конечное множество и $G = (V, E)$ — некоторый связный простой граф с множеством вершин V и множеством ребер E . Для краткости ребро графа, соединяющее его вершины u и v , будем обозначать просто через uv . Будем говорить, что G соединяет M , если $M \subset V$. В этом случае также будем говорить, что M — *граница* графа G . (Отметим, что граница графа определена не однозначно, ее выбор зависит от конкретной задачи.) В дальнейшем мы всегда предполагаем, что у графа фиксирована некоторая граница, возможно пустая. *Дерево* — это связный граф без циклов, граница которого содержит все его вершины степени 1 и 2. Дерево будем называть *бинарным*, если степени его вершин равны 1 или 3, а граница совпадает с множеством всех его вершин степени 1.

Пусть теперь $\mathcal{M} = (M, \rho)$ — конечное псевдометрическое пространство (в отличие от метрики, расстояния между разными точками могут быть равны нулю), $G = (V, E)$ — связный граф, соединяющий M , и $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ — некоторая вещественная неотрицательная функция, называемая обычно *весовой функцией* и порождающая *взвешенный граф* $\mathcal{G} = (G, \omega)$. *Весом* взвешенного графа $\mathcal{G}$ называется величина $\omega(\mathcal{G})$, равная сумме весов всех ребер этого графа. Функция ω задает на V псевдометрику d_ω , а именно, расстояние между вершинами графа $\mathcal{G}$ определяется как наименьший из весов маршрутов, соединяющих эти вершины в графе G . Если для любых точек p и q из M выполняется $\rho(p, q) \leq d_\omega(p, q)$, то взвешенный граф $\mathcal{G}$ называется *заполнением* пространства $\mathcal{M}$, а граф G — *типом* этого заполнения. Число $\text{mf}(\mathcal{M})$, равное $\inf \omega(\mathcal{G})$ по всем заполнениям $\mathcal{G}$ пространства $\mathcal{M}$, назовем *весом минимального заполнения*, а заполнение $\mathcal{G}$, для которого $\omega(\mathcal{G}) = \text{mf}(\mathcal{M})$, — *минимальным заполнением*. Если минимизировать вес заполнений фиксированного типа, то получаем *минимальные параметрические заполнения*, вес которых обозначается через $\text{mpf}(\mathcal{M}, G)$. В работе [2] показано, что и минимальное заполнение существует для любого конечного псевдометрического пространства, и что при поиске минимальных заполнений пространства M достаточно ограничиться бинарными деревьями с границей M .

В дальнейшем нам будет полезно следующее определение. Пара граничных вершин бинарного дерева называется *усами*, если эти вершины имеют общую соседнюю вершину (степень которой, очевидно, равна трем). Ребра, инцидентные вершинам усов, также будем называть усами. Хорошо известно, что каждое бинарное дерево с четырьмя и более граничными вершинами имеет не менее двух усов.

Оказывается, не обязательно требовать, чтобы веса всех рёбер в параметрическом заполнении были неотрицательными, а именно, можно искать минимум веса среди заполнений с произвольной, необязательно неотрицательной, весовой функцией. Такие заполнения называются *обобщенными*. В работе [3] доказано, что при переходе к обобщенным минимальным заполнениям сохраняется большинство свойств минимальных заполнений. Один из замечательных фактов состоит в том, что для всякого конечного псевдометрического пространства веса минимального и минимального обобщённого заполнений равны, т.е. минимум веса на

множестве заполнений с неотрицательной весовой функцией совпадает с минимумом веса на более широком множестве заполнений с произвольной весовой функцией, см. [3].

2.2. Линейное программирование

Напомним формулировку так называемой *общей задачи линейного программирования*, сокращенно ОЗЛП. Рассмотрим n -мерное линейное пространство, которое нам будет удобно представить как $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$. Векторы из $\mathbb{R}^n$ запишем в виде $x = (x_1, x_2)$, где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$. Пусть задана линейная функция $F(x) = \langle f_1, x_1 \rangle + \langle f_2, x_2 \rangle$, где $f_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, а угловые скобки обозначают стандартное скалярное произведение. Задача состоит в том, чтобы найти наименьшее значение функции F , называемой в этом контексте *целевой*, на подмножестве $X \subset \mathbb{R}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$, заданном системой линейных уравнений и линейных неравенств так:

$$X = \{x = (x_1, x_2) \mid A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq b_1, \quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2, \quad x_1 \geq 0\}, \quad (1)$$

где неравенства на векторах понимаются как покомпонентные, A_{ij} — фиксированные матрицы размера $m_i \times n_j$, а $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$. Множество X называется *множеством допустимых значений переменных*. Если X не пусто, то X представляет собой замкнутое выпуклое многогранное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. В последнем случае положим $F_* = \inf_{x \in X} F(x)$, а если F_* конечно, то $X_* = \{x \in X : F(x) = F_*\}$. Задача называется *разрешимой*, если X_* не пусто. В этом случае каждая точка $x_* \in X_*$ называется *решением*.

Говорят, что задача линейного программирования имеет *канонический вид*, если в определении множества X допустимых значений переменных нет ограничений в виде неравенств, кроме $x \geq 0$, то есть

$$X = \{x \mid Ax = b, \quad x \geq 0\}. \quad (2)$$

Множество допустимых значений любой *канонической задачи линейного программирования* (КЗЛП) содержится в положительном ортанте. Поэтому, если КЗЛП разрешима, то среди ее решений обязательно есть так называемые *угловые* или *экстремальные точки* множества X , то есть такие точки, которые не лежат внутри никакого интервала с концами в X . Более того, множество X_* в этом случае также представляет собой выпуклое многогранное множество, все угловые точки которого являются также угловыми точками для X . С геометрической точки зрения угловые точки представляют собой вершины многогранного множества. Способ нахождения угловых точек допустимого множества X канонической задачи описан, например, в [13].

Важную роль при изучении задач линейного программирования играет так называемый принцип двойственности. *Двойственная задача* к ОЗЛП вида (1) формулируется так. Требуется найти наибольшее значение H^* линейной функции $H(\lambda) = \langle b_1, \lambda_1 \rangle + \langle b_2, \lambda_2 \rangle$, где переменные $\lambda_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ образуют вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, который меняется в многогранной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$, $m = m_1 + m_2$, заданной следующей системой линейных уравнений и линейных неравенств:

$$\Lambda = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \mid A_{11}^T \lambda_1 + A_{21}^T \lambda_2 \leq -f_1, \quad A_{12}^T \lambda_1 + A_{22}^T \lambda_2 = -f_2, \quad \lambda_1 \geq 0\}.$$

Как известно, задача, двойственная к двойственной задаче, эквивалентна исходной, поэтому принято говорить о взаимной двойственности. Согласно принципу двойственности, взаимно двойственные задачи линейного программирования разрешимы или не разрешимы одновременно, при этом, если задачи разрешимы, то $F_* = H^*$, причем $F(x) = F_* = H^* = H(\lambda)$ для всех $x \in X_*$ и $\lambda \in \Lambda^*$ и только для них, где через Λ^* обозначено множество всех решений двойственной задачи.

2.3. Минимальные параметрические заполнения и линейное программирование

Как было замечено в [2], задача о поиске минимального параметрического заполнения сводится к задаче линейного программирования. Действительно, пусть (M, ρ) — произвольное конечное метрическое пространство. Занумеруем произвольным образом точки из $M = \{p_1, \dots, p_m\}$ и положим $\rho_{ij} = \rho(p_i, p_j)$. Далее, пусть $G = (V, E)$ — некоторое дерево, соединяющее M . Будем предполагать, что $M = \partial G \subset V$ совпадает с множеством вершин степени 1 и 2 дерева M . Опишем весовые функции $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}$, превращающие дерево G в обобщенное заполнение конечного метрического пространства (M, ρ) . Для каждой пары граничных вершин p_i, p_j в дереве G существует единственный путь $\gamma(i, j)$, соединяющий эти вершины. По определению, взвешенное дерево (G, ω) является обобщенным заполнением для (M, ρ) , если и только если

$$\sum_{e \in \gamma(i, j)} \omega(e) \geq \rho_{ij}, \quad \text{при всех } 1 \leq i < j \leq m. \quad (3)$$

Вес этого заполнения равен $\sum_{e \in E} \omega(e)$, где E — множество ребер дерева G . Таким образом, чтобы найти обобщенное минимальное параметрическое заполнение типа G , нужно найти наименьшее значение линейной функции $F(\omega) = \sum_{e \in E} \omega(e)$ на выпуклом многогранном подмножестве Ω_G пространстве $\mathbb{R}^{|E|}$, заданном системой линейных неравенств (3).

Итак, мы получили ОЗЛП. Запишем ее в виде (1). Так как у нас нет ограничений на знаки переменных, то $n_1 = 0$, а n_2 равно количеству $|E|$ ребер дерева G . Переменные, составляющие вектор x_2 , — это переменные $\omega(e)$, веса ребер. Занумеруем ребра дерева произвольным образом, положив $E = \{e_1, \dots, e_{|E|}\}$, $\omega(e_i) = \omega_i$. Далее, все наши условия на переменные ω_i имеют вид неравенств, поэтому отлична от нуля только матрица A_{12} . Строки этой матрицы соответствуют неравенствам из (3), то есть занумерованы упорядоченными парами (i, j) , $1 \leq i < j \leq m$, где, как и выше, $M = \{p_1, \dots, p_m\}$ — занумерованное множество граничных вершин дерева G . Поэтому $n_1 = m(m-1)/2$. Столбцы матрицы A_{12} соответствуют ребрам дерева. Будем обозначать через a_{ij}^k элемент матрицы A_{12} , стоящий в строке (i, j) на месте, соответствующем ребру e_k . Элемент $a_{ij}^k = 1$, если и только если ребро e_k входит в путь $\gamma(i, j)$, иначе $a_{ij}^k = 0$. Подмножество Ω_G задается системой неравенств

$$A_{12}x_2 \leq b_1, \quad \text{где } x_2 = -(\omega_1, \dots, \omega_{|E|}), \text{ а } b_1 = -(\rho_{12}, \dots, \rho_{(m-1)m}),$$

и на этом подмножестве мы ищем наименьшее значение линейной функции $F(x) = \langle f_2, x_2 \rangle$, где $f_2 = -(1, \dots, 1)$. Заметим, что знаки «минус» появились из-за того, что неравенства в ОЗЛП вида 1 и в задаче о минимальном заполнении 3 записаны «в разные стороны».

Запишем теперь двойственную задачу. В нашем случае $n_2 = 0$, и компоненты λ_{ij} вектора λ_1 размерности n_1 занумерованы упорядоченными парами (i, j) , $1 \leq i < j \leq m$. Двойственная линейная функция имеет вид

$$H(\lambda) = H(\lambda_1) = -\langle b_1, \lambda_1 \rangle = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \rho_{ij} \lambda_{ij}$$

Подмножество Λ_G пространства $\mathbb{R}^{m_1}$, $m_1 = |E|$, на котором следует искать наибольшее значение функции H , задано следующей системой линейных уравнений и неравенств:

$$A_{12}^T \lambda_1 = -f_2, \quad \lambda_1 \geq 0$$

В частности, двойственная задача является КЗЛП. Матрица A_{12}^T представляет собой $n_2 \times m_1$ матрицу. Ее строки соответствуют ребрам дерева G , а столбцы — упорядоченным парам (i, j) , $i < j$, которые естественно интерпретировать как ребра полного графа $K(M)$ с

множеством вершин M . Обозначим через a_k^{ij} элемент k -ой строки матрицы A_{12}^T , стоящий в столбце с номером (i, j) . Пусть ребро e_k дерева G порождает разбиение $\mathcal{P}_G(e_k)$ множества M на два непустых подмножества. Элемент a_k^{ij} равен 1, если и только если концы ребра (i, j) графа $K(M)$ лежат в разных элементах разбиения $\mathcal{P}_G(e_k)$. Таким образом, матрица A_{12}^T — это матрица разрезов полного графа $K(M)$, порожденных ребрами дерева G (см. определение разреза ниже). Все компоненты вектора $-f_2$ равны 1. В работе [4] доказано, что если G — произвольное бинарное дерево с границей M , состоящей из $m \geq 2$ вершин, то матрица A_{12}^T имеет максимальный ранг $2m - 3$.

3. Заполнения и многогранники

Пусть (M, ρ) — произвольное конечное метрическое пространство, и $G = (V, E)$ — бинарное дерево, соединяющее M . Как и выше, будем предполагать, что $M = \partial G$ совпадает с множеством вершин степени 1 дерева G . Рассмотрим сформулированную выше двойственную задачу, соответствующую задаче о минимальном параметрическом заполнении:

$$H(\lambda_1) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \rho_{ij} \lambda_{ij} \rightarrow \sup \quad \text{при} \quad A_{12}^T \lambda_1 = -f_2, \quad \lambda_1 \geq 0. \quad (4)$$

В дальнейшем, для краткости, будем писать $A_G = A_{12}^T$, $\lambda = \lambda_1$, $f = -f_2$. Пусть Λ_G — множество допустимых значений переменных λ , заданное условиями (4). Как было отмечено в разделе 1.2, Λ_G представляет собой выпуклое многогранное множество, которое лежит в положительном ортанте. Легко проверить, что Λ_G ограничено, то есть является выпуклым многогранником. Этот многогранник полностью определяется бинарным деревом G , соединяющим M .

Из принципа двойственности вытекает, что вес минимального параметрического заполнения типа G для пространства M может быть найден как максимум функции H на многограннике Λ_G . Этот максимум достигается в одной из вершин многогранника, поэтому достаточно найти максимальное значение функции H на множестве W_{Λ_G} всех вершин многогранника Λ_G , то есть

$$\text{mpf}(M, G) = \max_{v \in W_{\Lambda_G}} H(v). \quad (5)$$

Подчеркнем, что многогранник Λ_G не зависит от функции расстояния, заданной на M , то есть, зная его вершины, можно получить формулу веса минимального параметрического заполнения данного типа для любого метрического пространства с данным числом точек (см. примеры в [4] и ниже). Однако, количество вершин многомерного многогранника Λ_G быстро растет с ростом размерности, и, как показал О. Щербаков [9], максимум может достигаться, вообще говоря, в любой его вершине. Поэтому в общем случае нас интересует все множество W_{Λ_G} .

ЗАМЕЧАНИЕ 13. В работе А. Еремина [8] была получена формула веса минимального параметрического заполнения типа G в терминах так называемых неприводимых мультиобходов дерева G , см. ниже. Как показано в [4] и [9], точки многогранника Λ_G с рациональными координатами соответствуют мультиобходам, а вершины — неприводимым мультиобходам дерева G . Поэтому формула (5) — это, фактически, геометрическая интерпретация формулы Еремина, а упомянутый выше результат Щербакова говорит о том, что эту формулу нельзя в общем случае улучшить. Используя эти идеи, Щербаков [9] получил формулу веса минимального параметрического заполнения, в предположении, что дерево, задающее тип, имеет ровно двое усов (то есть наименьшее возможное их количество)

Как уже говорилось выше, многогранник Λ_G определяется деревом G , соединяющим M . Заметим, что множество M можно соединить «одним и тем же» деревом G по-разному, и тогда, вообще говоря, могут получиться разные многогранники.

ПРИМЕР 4. Пусть $m = 4$. Обозначим элементы множества M натуральными числами, а именно, положим $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Рассмотрим единственное бинарное дерево с 4 вершинами степени 1, см. рис. 1.

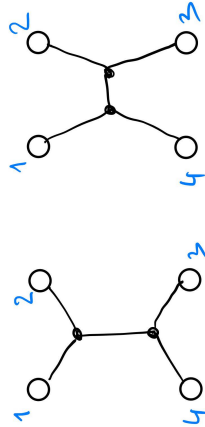


Рис. 1: Бинарное дерево с 4 вершинами степени 1 может соединять $M = \{1, 2, 3, 4\}$ по-разному.

Пусть сначала вершины его усов — это пары точек пространства M с номерами 1, 2 и 3, 4 соответственно. Занумеруем граничные ребра в соответствии с нумерацией граничных вершин, а единственному внутреннему ребру присвоим номер 5.

Тогда $A_G = A_1$ имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

множество $\Lambda_G = \Lambda_1$ допустимых значений переменных представляет собой отрезок в шестимерном пространстве с концами (вершинами)

$$\frac{1}{2}(1, 0, 1, 1, 0, 1), \quad \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 1, 1),$$

Пусть теперь вершины усов — это пары точек пространства M с номерами 1, 4 и 2, 3, см. рис. 1. Снова занумеруем граничные ребра в соответствии с нумерацией граничных вершин, а единственному внутреннему ребру присвоим номер 5.

Тогда $A_G = A_2$ имеет вид

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

множество $\Lambda_G = \Lambda_2$ допустимых значений переменных представляет собой отрезок в шестимерном пространстве с концами (вершинами)

$$\frac{1}{2}(1, 0, 1, 1, 0, 1), \quad \frac{1}{2}(0, 1, 1, 1, 1, 0),$$

Заметим, что Λ_1 и Λ_2 — это разные отрезки (имеющие) общую точку.

Цель данной работы — исследовать, как может меняться многогранник Λ_G , в зависимости от того, как одно и то же дерево G соединяет M . Разные способы соединения множества M деревом G можно задавать изменением нумерации элементов множества M , то есть элементами группы перестановок S_m .

3.1. Перестановки граничных вершин дерева

Пусть $G = (V, E)$ — бинарное дерево с границей $M \subset V$. Положим $M = \{1, \dots, m\}$, тем самым фиксировав нумерацию граничных вершин, т.е. нумерацию элементов множества M . Она порождает нумерацию ребер полного графа $K(M)$ двухэлементными множествами $\{i, j\} = \{j, i\}$, которые мы будем обозначать через $ij = ji$, и нумерацию переменных (λ_{ij}) двойственной задачи. Таким образом, многогранник $\Lambda_G(\text{id})$ допустимых значений определяется деревом G и нумерацией множества M . Здесь через id обозначена фиксированная нумерация $M = \{1, \dots, m\}$.

Изменение нумерации множества M с помощью перестановки $\pi \in S_m$ порождает изменение нумерации ребер полного графа и переменных (λ_{ij}) , а именно, $\{i, j\}$ превращается в $\{\pi(i), \pi(j)\}$. В результате, уравнения, задающие множество допустимых значений переменных двойственной задачи, меняются на перестановку переменных, и получается многогранник $\Lambda_G(\pi)$ изометричный $\Lambda_G(\text{id})$ (один получается из другого преобразованием пространства, соответствующим перестановке переменных).

Напомним, что *автоморфизмом* простого графа $G = (V, E)$ называется такая биекция $f: V \rightarrow V$, что $uv \in E$, если и только если $f(u)f(v) \in E$. В частности, автоморфизм f порождает биекцию на ребрах графа, которую мы тоже обозначим через f , а именно, $f(uv) = f(u)f(v)$.

ЛЕММА 1. Пусть $G = (V, E)$ — бинарное дерево с границей $M \subset V$, и f — некоторый его автоморфизм. Тогда f порождает перестановку π_f множества M , причем соответствующий гомоморфизм $f \mapsto \pi_f$ групп $\text{Aut } G \rightarrow S_m$ инъективен, то есть разным автоморфизмам соответствуют разные перестановки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый автоморфизм графа является биекцией на множестве его вершин, сохраняющей степени последних. Поэтому ограничение f на множество M вершин степени 1 является биекцией на M , то есть перестановкой, которую мы и обозначим через π_f .

Предположим теперь, что перестановки π_f и π_g , порожденные автоморфизмами f и g , совпадают. Покажем, что $f = g$. Проведем индукцию по количеству m вершин в M . Утверждение очевидно при $m = 1, 2, 3$. Пусть $n \geq 4$ и $i, j \in M$ — пара граничных вершин дерева G , соответствующая некоторым его усам, а $v \in V$ — их общая соседняя вершина. Тогда вершины $f(i) = g(i)$ и $f(j) = g(j)$ также соответствуют некоторым усам с общей соседней вершиной w ,

причем $f(v) = g(v) = w$, так как вершина, соседняя заданным усам, определена однозначно. Отметим, что пары $\{i, j\}$ и $\{f(i), f(j)\}$ могут совпадать (в этом случае $v = w$). Перестроим дерево G , выбросив вершины $i, j, f(i), f(j)$ и инцидентные им ребра, и объявив вершины v и w граничными. Получим бинарное дерево G' , у которого на одну или две вершины степени один меньше, чем у G . Ограничения автоморфизмов f и g на дерево G' совпадают на множестве его вершин степени 1, поэтому $f = g$ на множестве вершин дерева G' по предположению индукции, а, значит, и на всем V . Лемма доказана. $\square$

Таким образом, имеется вложение $\text{Aut } G \rightarrow S_m$ группы автоморфизмов бинарного дерева G в группу перестановок его граничного множества M .

Напомним, что *изоморфизм* простых графов $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ называется такая биекция $f: V \rightarrow V'$, что $uv \in E$, если и только если $f(u)f(v) \in E'$. В случае если $G = G'$, то f — *автоморфизм*. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Многогранники изоморфных деревьев изометричны. Они совпадают, если и только если деревья отличаются на автоморфизм.*

Для доказательства этой теоремы сформулируем вспомогательные определения и утверждения.

3.2. Циклические порядки, обходы и укладки бинарных деревьев

Пусть $M = \{1, \dots, m\}$ — конечное множество. *Циклический порядок на M* — это циклическая перестановка, которую мы будем записывать в виде $(i_1, \dots, i_m)$. Мы будем рассматривать циклические порядки с точностью до перехода к обратной перестановке.

Далее, пусть G — бинарное дерево, соединяющее M . Каждый циклический порядок на M задает набор путей в дереве G , соединяющих пары граничных вершин дерева, соседних в этом порядке. Обозначим (единственный) путь в G , соединяющий его граничные вершины p и q , через $G(p, q)$. Такие пути будем называть *граничными*. Таким образом, циклический порядок $\sigma = (i_1, \dots, i_m)$ порождает семейство путей

$$G_\sigma = \{G(i_1, i_2), \dots, G(i_{m-1}, i_m), G(i_m, i_1)\}.$$

Циклический порядок σ на $M = \partial G$ назовем *обходом дерева G* , если объединение всех путей из G_σ порождает эйлеров цикл в удвоении графа G .

Далее, хорошо известно, что каждое дерево можно изобразить на плоскости так, чтобы ребрам соответствовали прямолинейные отрезки. Другими словами, для каждого дерева $G = (V, E)$ можно построить на плоскости набор точек $\{p_v\}_{v \in V}$ и соединяющих их отрезков так, чтобы каждой вершине v дерева соответствовала единственная точка p_v , каждому ребру $e = uv \in E$ — отрезок $s_e = [p_u, p_v]$, причем пересечение отрезков s_e и s_f или пусто, или равно точке p_v , где v — общая вершина ребер e и f . *Укладкой дерева $G = (V, E)$* будем называть подмножество $\Gamma = \cup_{e \in E} s_e$ плоскости, а обход этого подмножества «по периметру» — *обходом укладки* (см. рис. 2). Очевидно, обход укладки бинарного дерева G с границей M задает на M циклический порядок, являющийся обходом дерева G в смысле предыдущего определения. Например, обход дерева на рис. 2 по часовой стрелке задает циклический порядок $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$. Из работы [2] (утверждение 7.1) известно, что верно и обратное, а именно, каждый обход дерева порождается обходом некоторой его укладки. Поэтому, говоря об укладке дерева, будем иметь в виду обход дерева и наоборот. В частности, можно задавать укладку циклическим порядком. Укладки бинарного дерева с границей M будем считать *эквивалентными*, если их обходы по периметру задают один и тот же циклический порядок на M .

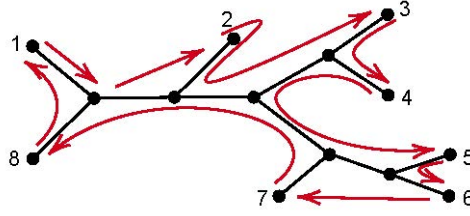
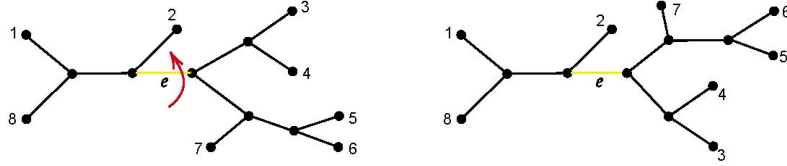


Рис. 2: Обход укладки дерева по периметру.

Пусть задана укладка $(i_1, \dots, i_m)$ бинарного дерева G , и пусть e — внутреннее ребро этого дерева. Ребро e задает разбиение множества M на два подмножества, $M = M_1 \sqcup M_2$, при этом, из определения обхода вытекает, что вершины из множеств M_1 и M_2 не могут чередоваться в циклическом порядке, заданном укладкой. Без ограничения общности можно считать, что $M_1 = \{i_1, \dots, i_k\}$, $k \geq 2$, а $M_2 = \{i_{k+1}, \dots, i_m\}$. В сделанных обозначениях, *подкруткой укладки* $(i_1, \dots, i_m)$ относительно ребра e назовем укладку $(i_1, \dots, i_k, i_m, \dots, i_{k+1})$. Заметим, что эта укладка эквивалентна укладке $(i_k, \dots, i_1, i_{k+1}, \dots, i_m)$, то есть подмножества M_1 и M_2 из определения подкрутки можно менять местами. Наглядно эту операцию можно представить как отражение относительно прямой, содержащей ребро e , одного из двух поддеревьев, на которые распадается дерево G при разрезании по ребру e . Пример подкрутки приведен на рис. 3.

Рис. 3: Пример подкрутки укладки дерева относительно ребра e : обход $(8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ превращается в $(8, 1, 2, 7, 6, 5, 4, 3)$.

ЛЕММА 2. *Дважды примененная подкрутка относительно одного и того же ребра не меняет обход. Операции подкрутки относительно разных ребер коммутируют.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно. Чтобы доказать второе утверждение заметим, что разрезание по двум разным внутренним ребрам порождает три поддерева, стыкующихся по этим ребрам, поэтому подмножества множества M , у которых меняется порядок обхода, можно выбрать непересекающимися. $\square$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Укладки бинарного дерева с $m \geq 3$ вершинами степени 1 отличаются подкрутками относительно внутренних ребер. Более того, разным наборам подкруток соответствуют разные укладки, в частности, число разных упаковок равно 2^{m-3} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство с помощью индукции по числу внутренних ребер k . База индукции $k = 0$, в этом случае существует одна единственная укладка (один обход, две взаимно обратных циклических перестановки элементов множества из трех элементов). Предположим, что для $k - 1$ внутренних ребер утверждение справедливо, докажем его для k . Пусть число k внутренних ребер дерева G не меньше 1. Тогда дерево G имеет усы, причем общая вершина каждого усов инцидентна однозначно определенному внутреннему ребру. Выберем один из усов, и пусть e — такое внутреннее ребро. Предположим, что даны две различные укладки дерева G и покажем, что одну можно получить из другой с помощью

подкруток. Разрежем дерево по ребру e . Получим пару бинарных деревьев, G_1 и G_2 , у первого количество внутренних ребер равно $k - 1$, у второго — 0 (и одна внутренняя вершина). Укладки дерева G получаются как объединение укладок деревьев G_1 и G_2 (с общим ребром e). В силу предположения индукции, укладки G_1 можно перевести одну в другую подкрутками относительно его внутренних ребер. Остается присоединить укладку дерева G_2 по e , что можно сделать одним из двух способов, отличающихся на подкрутку относительно ребра e .

Теперь покажем, что разным подкруткам соответствуют разные укладки. Для этого достаточно проверить, что нетривиальная подкрутка не может сохранять обход. Снова воспользуемся индукцией по числу внутренних ребер. Пусть имеется нетривиальная конечная последовательность $\pi_1, \dots, \pi_i$ подкруток, сохраняющая обход $(1, \dots, m)$. Заметим, что из леммы 2 вытекает, что без ограничения общности можно предполагать, что подкрутка вокруг каждого внутреннего ребра встречается в этой последовательности не более одного раза. Предположим сначала, что существует ребро e , относительно которого подкруток не происходит. Разрезание по этому ребру e порождает поддеревья G_1 и G_2 , и каждую подкрутку π_j можно рассматривать как подкрутку одного из этих под деревьев (в зависимости от того, в каком поддереве расположено ребро подкрутки π_j). К поддеревьям G_i применимо предположение индукции, поэтому их подкрутки тривиальны, что и требовалось.

Остается показать, что последовательность, содержащая подкрутки относительно всех внутренних ребер дерева G не может сохранять обход. Воспользуемся известным результатом Венга [14], который он использовал для построения линейного по числу операций аналога алгоритма Мелзака построения локально-минимального бинарного дерева на плоскости.

ЛЕММА 3. *Бинарное дерево с $m \geq 4$ вершинами степени 1 содержит или пару соседних усов, или усы, соседние с граничной вершиной, см. рис. 4.*

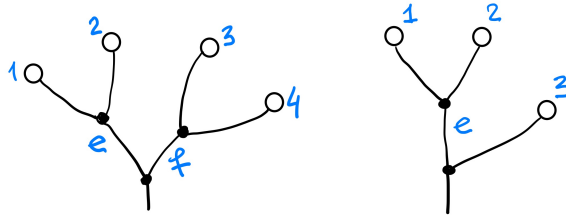


Рис. 4: Пара соседних усов (слева) и усы, соседние с граничной вершиной (справа).

Пусть сначала пары вершин 1, 2 и 3, 4 соответствуют соседним усам, и e и f — внутренние ребра, смежные общим вершинам этих усов, см. рис. 4. Тогда подкрутки относительно e и f переводят обход $(1, 2, 3, 4, \dots)$ в неэквивалентный ему обход $(2, 1, 4, 3, \dots)$, а подкрутки относительно других внутренних ребер оставляют вершины 1 и 4 соседними, поэтому эти две подкрутки не могут одновременно входить в последовательность, сохраняющую обход.

Пусть теперь пара вершин 1, 2 соответствует усам, соседним с граничной вершиной 3, и e — внутреннее ребро, смежное общей вершине этих усов, см. рис. 4. Тогда подкрутка относительно e переводит обход $(1, 2, 3, \dots)$ в неэквивалентный ему обход $(2, 1, 3, \dots)$, а подкрутки относительно других внутренних ребер оставляют вершины 1 и 3 соседними, поэтому эта подкрутка не может входить в последовательность, сохраняющую обход. Утверждение доказано.

□

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Количество укладок для бинарных деревьев с двумя и тремя усами было ранее подсчитано О. Щербаковым в [10] исходя из полученного им полного описания обходов этих деревьев.

ЛЕММА 4. Пусть $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ — бинарные деревья с общей границей M , $M = V \cap V'$. Порожденные ими множества обходов границы M совпадают, если и только если $G = G'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если деревья равны, то множества их обходов (или, что то же самое, их укладок) очевидно совпадают. Обратно, покажем, что бинарное дерево G восстанавливается по множеству порожденных им обходов. Воспользуемся индукцией по числу граничных вершин m . Без ограничения общности предположим, что $m \geq 4$. Заметим, что вершины, образующие усы дерева G , являются соседними при любом его обходе, а любая пара граничных вершин, не образующих усы, может перестать быть соседней после подкрутки относительно внутреннего ребра, необходимо входящего в соединяющий эти вершины в дереве G путь. Тем самым, найдя пары вершин, являющиеся соседними во всех обходах, мы найдем все усы дерева G .

Фиксируем какие-нибудь усы p и q дерева G , обозначим их общую смежную вершину через v и перестроим дерево, выбросив вершины p и q вместе с соответствующими граничными ребрами, и объявив v граничной вершиной. Обозначим полученное бинарное дерево через $\hat{G}$, а его граничное множество — через $\hat{M}$. Все обходы дерева $\hat{G}$ получаются из обходов дерева G заменой всех пар p, q и q, p на v . По предположению индукции дерево $\hat{G}$ однозначно восстанавливается. Чтобы получить дерево G остается добавить усы с вершинами p и q с общей вершиной v . Лемма доказана. $\square$

3.3. Разрезы графа $K(M)$, порожденные бинарным деревом с границей M

Напомним, что *разрез* графа — это разбиение множества всех его вершин на два подмножества. Разрез можно также задавать набором всех ребер графа, вершины которых лежат в разных подмножествах разреза. Эти ребра называются *ребрами разреза*. Количество ребер разреза в разрезе назовем его *длиной*. Далее, если G — бинарное дерево с границей M , то каждое ребро e этого дерева порождает разрез полного графа $K(M)$, а именно, выбрасывание ребра e разбивает дерево, а значит и множество M , на две компоненты. Этот разрез будем обозначать через C_e или $C_e(M)$.

Как отмечалось выше, уравнения, задающие множество допустимых значений переменных двойственную задачу, занумерованы ребрами дерева G и соответствуют разрезам полного графа $K(M)$, порожденным этими ребрами. Ясно, что если разрез представляет собой разбиение m -элементного множества M на подмножества из k и $(m - k)$ элементов, то длина такого разреза равна $k(m - k)$.

ЛЕММА 5. Пусть $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ — бинарные деревья с общей границей M , $M = V \cap V'$. Системы разрезов графа $K(M)$, порожденные ребрами деревьев G и G' , совпадают, тогда и только тогда, когда $G = G'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $m = 2$ и 3 утверждение очевидно, так как в этих случаях существует только одно бинарное дерево. Проведем доказательство индукцией по m . Пусть $m \geq 4$. Разрез, порожденный граничным ребром дерева с граничной вершиной i , состоит из всех ребер графа $K(M)$ вида $\{i, j\}$, $j \neq i$. Длина такого разреза равна $m - 1$, система разрезов, порожденная любым бинарным деревом с границей M содержит ровно m таких разрезов.

Далее, пусть граничные вершины p и q бинарного дерева G образуют усы, v — общая соседняя вершина этих усов, и e — единственное инцидентное v и не инцидентное ни p , ни q ребро. Тогда ребра разреза C_e — это ребра вида $\{p, i\}$ и $\{q, i\}$, где i не равно ни p , ни q . Длина такого разреза равна $2(m - 2)$. Обратно, каждый разрез длины $2(m - 2)$ соответствует

разбиению множества M на два подмножества, одно из которых состоит из двух вершин. Если этот разрез порожден ребром дерева G , то эти две вершины являются вершинами усов дерева G . Таким образом, разрезы длины $2(n-2)$ однозначно определяют все усы бинарного дерева.

Фиксируем какие-нибудь усы p и q бинарного дерева G с общей вершиной v и перестроим дерево, выбросив вершины p и q вместе с соответствующими граничными ребрами e_p и e_q , и объявив v граничной вершиной. Обозначим полученное дерево через $\widehat{G}$, а его граничное множество — через $\widehat{M}$. Система разрезов полного графа $K(\widehat{M})$, порожденная ребрами дерева $\widehat{G}$, получается из исходной системы разрезов графа $K(M)$ так. Разрезы графа $K(M)$, порожденные ребрами e_p и e_q выбрасываются. Пусть e — произвольное ребро дерева $\widehat{G}$. Заметим, что оно также является ребром дерева G . Разрезу $C_e(M)$ графа $K(M)$ соответствует разрез $C_e(\widehat{M})$ графа $K(\widehat{M})$. При этом, паре ребер $\{p, i\}$ и $\{q, i\}$ разреза $C_e(M)$ соответствует ребро $\{v, i\}$ разреза $C_e(\widehat{M})$. По предположению индукции дерево $\widehat{G}$ однозначно восстанавливается по системе разрезов, порожденных его ребрами. Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 6. Пусть бинарные деревья $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ с общей границей M изоморфны, и f — соответствующий изоморфизм. Изоморфизм f порождает перестановку π_f элементов множества M , которая переводит систему разрезов Σ_G графа $K(M)$, порожденную ребрами дерева G , в систему разрезов $\Sigma_{G'}$ графа $K(M)$, порожденную ребрами дерева G' . При этом, $\Sigma_G = \Sigma_{G'}$, если и только если $G = G'$, то есть f — автоморфизм дерева $G = G'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый изоморфизм графов является биекцией на множествах их вершин, сохраняющей степени последних. Поэтому ограничение f на множество M вершин степени 1 дерева G отображает M на множество вершин степени 1 дерева G' , то есть на себя, и является биекцией на M , которую мы обозначим через π_f . Далее пусть e — произвольное ребро дерева G , и $e' = f(e)$ — соответствующее ребро дерева G' . Пусть i, j — произвольные вершины из M , и γ — единственный путь в дереве G , их соединяющий. Изоморфизм f отображает путь γ в единственный путь γ' в дереве G' , соединяющий вершины $\pi_f(i) = f(i)$ и $\pi_f(j) = f(j)$ из M . При этом γ содержит e , если и только если γ' содержит $e' = f(e)$, поэтому ij является ребром разреза C_e графа $K(M)$, тогда и только тогда, когда $f(i)f(j)$ является ребром разреза $C_{f(e)}$. Тем самым, перестановка π_f переводит систему разрезов графа $K(M)$, порожденную ребрами дерева G , в систему разрезов графа $K(M)$, порожденную ребрами дерева G' . Заключительное утверждение леммы следует из леммы 5. $\square$

3.4. Доказательство теоремы 1. Следствия.

Напомним, см. замечание 13, что обходы дерева G соответствуют (вообще говоря не всем) вершинам многогранника Λ_G , поэтому если семейства обходов различны, то и многогранники различны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны два изоморфных бинарных дерева $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ с границей M , и f — соответствующий изоморфизм. Тогда, по лемме 6, перестановка граничных вершин π_f порождает изменение нумерации ребер полного графа $K(M)$ и, тем самым, перестановку переменных λ_{ij} , а перестановка последних является изометрией всего объемлющего пространства.

Пусть теперь f — автоморфизм. Тогда, по той же лемме 6, множества разрезов Σ_G и $\Sigma_{G'}$ совпадают. Последнее означает, что системы уравнений, задающих многогранники Λ_G и $\Lambda_{G'}$ отличаются на перестановку уравнений, поэтому многогранники совпадают.

Наконец, если $G \neq G'$, то есть f не является автоморфизмом, то множества обходов деревьев G и G' различны в силу леммы 4. Поэтому многогранники Λ_G и $\Lambda_{G'}$ имеют разные множества вершин. Теорема доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Разным (неизоморфным) бинарным деревьям соответствуют разные многогранники.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. У неизоморфных бинарных деревьев разные множества обходов. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Количество разных многогранников для бинарного дерева фиксированного типа G с n граничными вершинами равно количеству смежных классов группы перестановок S_m по подгруппе $\text{Aut } G$, то есть $m!/|\text{Aut } G|$.*

Хорошо известно, что порядок группы $\text{Aut } G$ можно вычислить как произведение порядка стационарной подгруппы подходящей вершины дерева G и количества элементов орбиты этой вершины при действии $\text{Aut } G$.

ПРИМЕР 5. Пусть G — бинарное дерево с двумя усами и $m \geq 4$ вершинами степени 1. Рассмотрим вершину, входящую в какие-нибудь усы. Тогда орбита этой вершины состоит из четырех вершин, а стационарная подгруппа — из двух перестановок, поэтому $|\text{Aut } G| = 8$, и количество разных многогранников $L_G(\pi)$ равно $c(m) = m!/8$. Заметим, что $c(4) = 3$, $c(5) = 15$, $c(6) = 90$, $c(m) = c(5)6^{m-5}$ при $m \geq 5$.

ПРИМЕР 6. Пусть G — бинарное дерево с тремя усами и $m = 6$ вершинами степени 1. Рассмотрим вершину, входящую в какие-нибудь усы. Тогда орбита этой вершины состоит из шести вершин, а стационарная подгруппа — из восьми перестановок (как группа автоморфизмов дерева с двумя усами), поэтому $|\text{Aut } G| = 48$, и количество разных многогранников $L_G(\pi)$ равно $6!/48 = 15$. Аналогично, для «симметричного» бинарного дерева с тремя усами («длины концов-побегов» одинаковы) получим $m!/48$.

4. Примеры и открытые вопросы

Возникает естественный вопрос, что получится, если взять множество $U(m)$ вершин всех многогранников, соответствующих всевозможным типам G заполнений пространства M , $|M| = m$? Получится ли в результате множество вершин строго выпуклого многогранника? При попытке ответить на этот вопрос был разобран ряд примеров. Часть приведенных ниже вычислений и примеров приводится в работе [4], здесь мы систематизировали. Как и выше, ребра полного графа $K(M)$ на m -элементном множестве M занумерованы парами (i, j) , $i < j$, и упорядочены лексикографически. Расстояния в пространстве M обозначаются через d_{ij} . Для удобства, конечное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть *выпуклым*, если оно представляет собой множество вершин некоторого выпуклого многогранника размерности k , $k \leq n$.

4.1. Четырехточечное пространство

Пусть $m = 4$. Рассмотрим единственное бинарное дерево с 4 вершинами степени 1, и пусть вершины его усов — это пары точек пространства M с номерами 1, 2 и 3, 4 соответственно. Занумеруем граничные ребра в соответствии с нумерацией граничных вершин, а единственному внутреннему ребру присвоим номер 5.

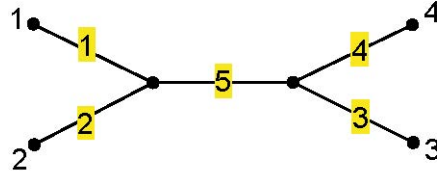


Рис. 5: Бинарное дерево с 4 вершинами степени 1.

Тогда A_G имеет вид

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

множество Λ_G допустимых значений переменных представляет собой отрезок в шестимерном пространстве с концами (вершинами)

$$\frac{1}{2}(1, 0, 1, 1, 0, 1), \quad \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 1, 1),$$

значения целевой функции в них равны соответственно

$$\frac{1}{2}(d_{12} + d_{14} + d_{23} + d_{34}), \quad \frac{1}{2}(d_{12} + d_{13} + d_{24} + d_{34}),$$

а вес минимального параметрического заполнения типа G равен максимуму из этих двух величин (двух полупериметров соответствующих обходов). Эта формула была получена в [2].

Так как $m = 4$, то S_m состоит из $4!$ перестановок, а группа автоморфизмов состоит из 8 элементов: транспозиции двух пар усов и симметрии относительно центрального ребра. Число различных многогранников-отрезков равняется числу смежных классов, то есть $\frac{4!}{8} = 3$.

Найдем оставшиеся отрезки. Возьмем сначала перестановку, которая вершинам усов с номерами 1, 2 и 3, 4, ставит в соответствие пары с номерами 1, 3 и 2, 4. Соответствующая перенумерация шести двойственных переменных λ_{ij} будет иметь вид $(1, 2)(3)(4)(5, 6)$. Применяя эту последнюю перестановку к найденному на предыдущем шаге множеству допустимых значений Λ_G , получим отрезок с концами (вершинами)

$$\frac{1}{2}(0, 1, 1, 1, 1, 0), \quad \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 1, 1)$$

Продельвая этот алгоритм еще раз для пар с номерами 1, 4 и 2, 3, получим отрезок с концами(вершинами)

$$\frac{1}{2}(0, 1, 1, 1, 1, 0), \quad \frac{1}{2}(1, 0, 1, 1, 0, 1)$$

Легко заметить, что в объединении построенных отрезков — это треугольник в шестимерном пространстве, в частности, объединение $U = U(4)$ множеств вершин этих отрезков выпукло. Весом минимального заполнения является минимумом по весам минимальных параметрических заполнений разных типов. Таким образом, вес минимального заполнения достигается в одной из вершин из U .

4.2. Пятиточечное пространство

Пусть $m = 5$. Рассмотрим единственное бинарное дерево с 5 вершинами степени 1, и пусть вершины его усов — это пара точек пространства M с номерами 1, 2 и 4, 5, а оставшаяся граничная вершина имеет номер 3. Занумеруем граничные ребра в соответствии с нумерацией граничных вершин, и пусть внутреннее ребро, соседнее с ребрами усов 1, 2, имеет номер 6, а оставшееся — номер 7.

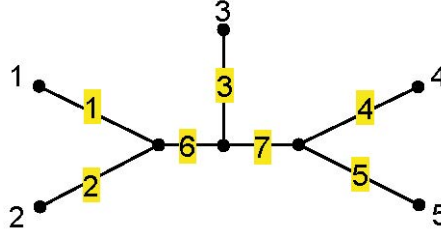


Рис. 6: Бинарное дерево с 5 вершинами степени 1

Тогда

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

множество Λ_G допустимых значений переменных представляет собой трехмерный тетраэдр в десятимерном пространстве с вершинами

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1), \quad \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1), \\ & \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1), \quad \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1), \end{aligned}$$

значения целевой функции в них равны соответственно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(d_{12} + d_{15} + d_{23} + d_{34} + d_{45}), \quad \frac{1}{2}(d_{12} + d_{13} + d_{25} + d_{34} + d_{45}), \\ & \frac{1}{2}(d_{12} + d_{14} + d_{23} + d_{35} + d_{45}), \quad \frac{1}{2}(d_{12} + d_{13} + d_{24} + d_{35} + d_{45}), \end{aligned}$$

а весом минимального параметрического заполнения типа G равен максимуму из этих четырех выражений. Эта формула была получена в [4], она также следует из результатов работы [12].

В случае $m = 5$ множество S_m состоит из $5!$ перестановок граничных вершин дерева G , а группа автоморфизмов состоит из 8 элементов: транспозиции двух пар усов и симметрии относительно внутренней вершины, инцидентной ребрам 6 и 7. Поэтому число различных тетраэдров равняется числу смежных классов, то есть $\frac{5!}{8} = 15$. При применении перестановок, порождаемых изоморфизмами дерева G , к вершинам многогранника Λ_G получим 15 различных тетраэдров. Как и выше через $U = U(5)$ обозначим множество вершин всех этих тетраэдров, и пусть Λ_U — выпуклая оболочка множества U . Общее число различных вершин в U равно 12, приведем их список:

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{2}(1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1), & \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1), \\
\frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1), & \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1), \\
\frac{1}{2}(0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0), & \frac{1}{2}(0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1), \\
\frac{1}{2}(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0), & \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0), \\
\frac{1}{2}(0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0), & \frac{1}{2}(0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1), \\
\frac{1}{2}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0), & \frac{1}{2}(1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0),
\end{array}$$

О. Щербаковым [9] было замечено, что U — подмножество вершин 10-мерного куба C со стороной $1/2$, так как координата каждой вершины равна или 0 или $\frac{1}{2}$ и, следовательно, U — выпуклое множество. Размерность многогранника Λ_U равняется 5.

Напомним, что *гранью* выпуклого многогранника называется всякое непустое пересечение этого многогранника с некоторым числом его опорных гиперплоскостей (см. например [15]). С помощью компьютерной программы, которая находит все опорные гиперплоскости многогранника Λ_U , а затем находит грани каждой размерности, был получен так называемый *f-вектор*. Напомним, что компоненты этого вектора равны количеству граней соответствующей размерности, к которым традиционно приписывают единицу. В нашем случае *f-вектор* многогранника Λ_U равен

$$(1, 12, 60, 120, 90, 20, 1),$$

то есть, многогранник Λ_U имеет 12 граней нулевой размерности (вершин), 60 граней размерности 1 (ребер), ..., 20 граней размерности 4 (гиперграней) и 1 грань размерности 5 (сам многогранник Λ_U). Каждая из 20 гиперграней имеет *f-вектор* $(1, 6, 15, 18, 9, 1)$.

4.3. Шеститочечное пространство

Пусть $m = 6$. В этом случае существует два неизоморфных бинарных дерева с 6 вершинами степени 1, одно с двумя усами, и одно с тремя.

4.3.1. Дерево с двумя парами усов

Дерево с двумя усами показано на рис 7, на нем же указана нумерация граничных вершин. Граничные ребра занумерованы так же как граничные вершины, нумерация внутренних ребер

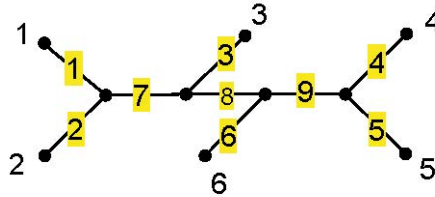


Рис. 7: Бинарное дерево с 6 вершинами степени 1 с двумя усами

также показана на рис. 7. Тогда

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество Λ_G допустимых значений переменных представляет собой шестимерный выпуклый многогранник в 15-мерном пространстве. У него 8 вершин, координаты которых имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1), & \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1), \\ & \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1), & \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1), \\ & \frac{1}{2}(1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1), & \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1), \\ & \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1), & \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1), \end{aligned}$$

его f -вектор, найденный с помощью компьютерной программы, равен $(1, 8, 26, 45, 45, 26, 8, 1)$.

Значения целевой функции в вершинах многогранника Λ_G равны соответственно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(d_{12} + d_{16} + d_{23} + d_{34} + d_{45} + d_{56}), & \frac{1}{2}(d_{12} + d_{13} + d_{26} + d_{34} + d_{45} + d_{56}), \\ & \frac{1}{2}(d_{12} + d_{14} + d_{23} + d_{36} + d_{45} + d_{56}), & \frac{1}{2}(d_{12} + d_{13} + d_{24} + d_{36} + d_{45} + d_{56}), \\ & \frac{1}{2}(d_{12} + d_{15} + d_{23} + d_{34} + d_{46} + d_{56}), & \frac{1}{2}(d_{12} + d_{13} + d_{25} + d_{34} + d_{46} + d_{56}), \\ & \frac{1}{2}(d_{12} + d_{14} + d_{23} + d_{35} + d_{46} + d_{56}), & \frac{1}{2}(d_{12} + d_{13} + d_{24} + d_{35} + d_{46} + d_{56}), \end{aligned}$$

а вес минимального параметрического заполнения типа G равен максимуму из этих восьми выражений.

В случае дерева с двумя парами усов количество перестановок граничных вершин равно $6!$, а группа автоморфизмов состоит из 8 элементов: транспозиции двух пар усов и симметрии относительно внутреннего ребра 8, получим $\frac{6!}{8} = 90$ различных многогранников. Объединяя множества вершин всех этих многогранников, получим множество U_2 , состоящее из 60 точек. Заметим, что вершины исходного многогранника Λ_G , а значит и все вершины из U_2 , снова имеют координаты или 0 или $\frac{1}{2}$, поэтому U_2 — подмножество вершин некоторого куба и, значит, выпукло. Размерность соответствующего выпуклого многогранника равна 9.

4.3.2. Дерево с тремя парами усами

Перейдем к случаю дерева с тремя парами усов. На рис. 8 показано такое дерево вместе с нумерацией граничных вершин

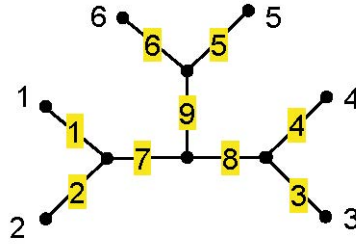


Рис. 8: Бинарное дерево с 6 вершинами степени 1 с тремя усами.

Матрица A_G имеет вид:

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество Λ_G допустимых значений переменных представляет собой шестимерный выпуклый многогранник в 15-мерном пространстве. У него 12 вершин, координаты которых имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1), & \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1), \\ & \frac{1}{2}(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1), & \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1), \\ & \frac{1}{4}(2, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 2, 0, 1, 1, 0, 2), & \frac{1}{4}(2, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 2, 0, 1, 1, 0, 2), \\ & \frac{1}{2}(1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1), & \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1), \\ & \frac{1}{4}(2, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 2), & \frac{1}{4}(2, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 2), \\ & \frac{1}{2}(1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1), & \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1), \end{aligned}$$

Вычисленный на компьютере f -вектор многогранника Λ_G равен $(1, 12, 52, 108, 110, 54, 12, 1)$.

Значения целевой функции в вершинах многогранника Λ_G имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (d_{12} + d_{16} + d_{24} + d_{34} + d_{35} + d_{56}), \quad \frac{1}{2} (d_{12} + d_{14} + d_{26} + d_{34} + d_{35} + d_{56}), \\ & \frac{1}{2} (d_{12} + d_{15} + d_{24} + d_{34} + d_{36} + d_{56}), \quad \frac{1}{2} (d_{12} + d_{14} + d_{25} + d_{34} + d_{36} + d_{56}) \\ & \frac{1}{4} (2d_{12} + d_{13} + d_{16} + d_{24} + d_{25} + 2d_{34} + d_{36} + d_{45} + 2d_{56}) \\ & \frac{1}{4} (2d_{12} + d_{14} + d_{15} + d_{23} + d_{26} + 2d_{34} + d_{36} + d_{45} + 2d_{56}) \\ & \frac{1}{2} (d_{12} + d_{16} + d_{23} + d_{34} + d_{45} + d_{56}), \quad \frac{1}{2} (d_{12} + d_{13} + d_{26} + d_{34} + d_{45} + d_{56}), \\ & \frac{1}{4} (2d_{12} + d_{14} + d_{16} + d_{23} + d_{25} + 2d_{34} + d_{35} + d_{46} + 2d_{56}) \\ & \frac{1}{4} (2d_{12} + d_{13} + d_{15} + d_{24} + d_{26} + 2d_{34} + d_{35} + d_{45} + 2d_{56}) \\ & \frac{1}{2} (d_{12} + d_{15} + d_{23} + d_{34} + d_{46} + d_{56}), \quad \frac{1}{2} (d_{12} + d_{13} + d_{25} + d_{34} + d_{46} + d_{56}), \end{aligned}$$

а вес минимального параметрического заполнения типа G равен максимуму из этих 12 значений.

Отметим, что 8 из 12 вершин многогранника Λ_G являются вершинами 15-мерного куба (их координаты принимают значения 0 и $1/2$), а оставшиеся четыре вершины являются центрами некоторых шестимерных граней этого куба. Для проверки выпуклости объединения множества вершин таких многогранников нам понадобится следующая простая лемма.

ЛЕММА 7. Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ — куб, F — его грань, $x \in F$ — точка, лежащая в этой грани, и $W = \{w_1, \dots, w_k\} \subset C$ — конечное подмножество, причем $x = \sum_i \lambda_i w_i$, $0 < \lambda_i \leq 1$, $\sum_i \lambda_i = 1$. Тогда $W \subset F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ — стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$. Без ограничения общности, куб C задается неравенствами $0 \leq x_i \leq 1$, а грань F является пересечением куба с плоскостью, заданной системой уравнений $x_1 = \dots = x_k = 0$. Если $w_i \notin F$, то по крайней мере одна из первых k координат точки w_i строго положительна, но тогда то же верно и для этой координаты точки x , противоречие. $\square$

Рассмотрим множество V состоящее из точек двух типов — некоторых вершин многомерного куба C и центров некоторых его граней. Представим V в виде $V = W \sqcup W^*$, где W содержит все вершины куба из V , а W^* — все центры граней. Для $x \in W^*$ обозначим через $F(x)$ грань, центром которой является x .

Утверждение 4. Пусть, в сделанных обозначениях, для каждой точки $x \in W^*$ множество $F(x) \cap V$ представляет собой множество вершин выпуклого многогранника. Тогда и все множество V — тоже представляет собой множество вершин выпуклого многогранника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного, пусть одна из точек $x \in V$ является нетривиальной выпуклой комбинацией некоторых других: $x = \sum_i \lambda_i x_i$, $0 < \lambda_i \leq 1$, $\sum_i \lambda_i = 1$. Тогда x не может быть вершиной куба, так как $V \subset C$, поэтому $x \in W^*$. Но тогда все точки x_i , входящие в эту выпуклую комбинацию, должны лежать в $F(x)$ в силу леммы 7. Но по предположению $F(x) \cap V$ — множество вершин выпуклого многогранника, противоречие. $\square$

Таким образом, для проверки выпуклости конечного подмножества V куба вида $V = W \sqcup W^*$ достаточно проверить выпуклость каждого множества $F(x) \cap V$, $x \in W^*$.

В случае дерева с тремя парами усов группа автоморфизмов состоит из 24-х элементов: транспозиции трех пар усов и «круговой» симметрии, поэтому $\frac{6!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3!} = 30$. Количество уникальных вершин в объединении U_3 множеств вершин многогранников Λ_G для всевозможных

деревьев с тремя парами усов равно 120. Оказалось, что множество U_3 содержит все вершины из множества U_2 вершин многогранников, построенных для деревьев с двумя парами усов. Таким образом, множество $U_3 = U(6)$ — это объединение множеств вершин всех многогранников Λ_G по всем возможным типам заполнений G пространства из 6 точек. Описанный выше метод проверки выпуклости показал, что множество $U(6)$ является выпуклым. Как и в случае двух пар усов, f -вектор для многогранника Λ_U не получен из-за большого объема вычислений.

4.4. Заключение: некоторые открытые вопросы.

В данном разделе перечислено несколько задач, которые могут стать темами дальнейшего исследования в данной области.

- Оценить количество вершин многогранника Λ_G в терминах $m = |M|$.
- Пусть деревья G_1 и G_2 , задающие тип заполнения пространства M , изоморфны. Изоморфизм порождает перестановку множества M , которая порождает перестановку координат объемлющего пространства, и эта перестановка переводит Λ_{G_1} в Λ_{G_2} . Сколько общих вершин могут иметь эти многогранники? Сколько общих гиперграней? Могут ли они не пересекаться?
- Как меняется многогранник Λ_G при отрезании/добавлении усов к дереву G ?
- В разобранных примерах объединение $U(m)$ множеств вершин многогранников Λ_G , где объединение берется по всевозможным бинарным деревьям G , соединяющим M , $m = |M|$, представляет собой множество вершин выпуклого многогранника $\Lambda_U(m)$. Являются ли многогранники Λ_G гранями многогранника $\Lambda_U(m)$? Если да, то чем эти грани выделяются среди других его граней?
- Обобщить доказательство выпуклости многогранника $\Lambda_U(6)$ на случай произвольного бинарного дерева с тремя усами. Использовать результаты А. Иванова и О. Щербакова [10],[11], из которых следует что кратность мультиобхода в этом случае не превосходит двух.
- Остается ли верным утверждение о выпуклости множества $U(m)$ для всех m ?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А.О., Тужилин А.А. Теория экстремальных сетей. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 256 с.
2. Иванов А.О., Тужилин А.А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сборник. 2012. Т. 203, № 5. С. 65–118. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7777>.
3. Иванов А.О., Овсянников З.Н., Стрелкова Н.П., Тужилин А.А. Одномерные минимальные заполнения с ребрами отрицательного веса // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2012. № 5. С. 3–8.
4. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space // Trends in Mathematics. Cham: Springer, 2021. P. 165–182. arXiv:1907.03828.
5. Gromov M. Filling Riemannian manifolds // J. Diff. Geom. 1983. Vol. 18, no. 1. P. 1–147. DOI: 10.4310/jdg/1214509283.

6. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Minimal fillings of finite metric spaces: The state of the art // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. AMS, 2014. Vol. 625. P. 9–35. (Contemporary Mathematics).
7. Беднов Б.Б., Бородин П.А. Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сборник. 2014. Т. 205, № 4. С. 3–20. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8264>.
8. Еремин А.Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Матем. сборник. 2013. Т. 204, № 9. С. 51–72. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7835>.
9. Щербаков О.С. Многогранники бинарных деревьев, строение многогранника дерева типа «змея» // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, № 4. С. 136–151. DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-136-151>.
10. Щербаков О.С. Ограничения на кратность неприводимых мультиобходов некоторых бинарных деревьев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2025. № 2. (В печати).
11. Иванов А.О., Щербаков О.С. Существование неприводимых мультиобходов кратности 2 // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25, № 3. С. 101–117.
12. Беднов Б.Б. Длина минимального заполнения пятиточечного метрического пространства // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2017. № 6. С. 3–8.
13. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М.: Факториал Пресс, 1998. 320 с.
14. Hwang F.K. A linear time algorithm for full Steiner trees // Operations Research Letters. 1986. Vol. 4, no. 5. P. 235–237. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-6377\(86\)90008-8](https://doi.org/10.1016/0167-6377(86)90008-8).
15. Винберг Э.Б. Курс алгебры. 2-е изд., испр. и доп. М.: Факториал Пресс, 2001. 544 с.
16. Малышева О.С. Оптимальное положение компактов и проблема Штейнера в пространствах с евклидовой метрикой Громова–Хаусдорфа // Матем. сборник. 2020. Т. 211, № 10. С. 32–49. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9361>.

REFERENCES

1. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A., 2003, *Extreme Networks Theory*, Moscow-Izhevsk: Regul. i Khaot. Dinamika [in Russian].
2. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A., 2012, “One-dimensional Gromov Minimal Filling Problem”, *Sbornik Math.*, vol. 203, no. 5, pp. 65–118. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2012v203n05ABEH004239>.
3. Ivanov, A.O., Ovsyannikov, Z.N., Strelkova, N.P., Tuzhilin, A.A., 2012, “One-dimensional Minimal Fillings with Negative Edge Weights”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 67, no. 5–6, pp. 189–194. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027132212050014>.
4. Ivanov, A., Tuzhilin, A., 2021, “Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space”, in *Trends in Mathematics*, Cham: Springer, pp. 165–182. arXiv:1907.03828 [math.MG] (2019).
5. Gromov, M., 1983, “Filling Riemannian Manifolds”, *J. Diff. Geom.*, vol. 18, no. 1, pp. 1–147. DOI: [10.4310/jdg/1214509283](https://doi.org/10.4310/jdg/1214509283).

6. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A., 2014, “Minimal Fillings of Finite Metric Spaces: The State of the Art”, in *Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics*, AMS, vol. 625, pp. 9–35.
7. Bednov, B.B., Borodin, P.A., 2014, “Banach Spaces that Realize Minimal Fillings”, *Sb. Math.*, vol. 205, no. 4, pp. 459–475. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2014v205n04ABEH004383>.
8. Eremin, A.Yu., 2013, “A Formula for the Weight of a Minimal Filling of a Finite Metric Space”, *Sb. Math.*, vol. 204, no. 9, pp. 1285–1306. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2013v204n09ABEH004340>.
9. Shcherbakov, O.S., 2022, “Polyhedra of Binary Trees, Structure of the Polyhedron for a Tree of the “Snake” Type”, *Chebyshev. Sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 136–151 [in Russian]. DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-136-151>.
10. Shcherbakov, O.S., 2025, “Upper Estimates on the Multiplicities of Irreducible Multitours for Some Binary Trees”, *Moscow Univ. Math. Bull.* [in Russian, to appear].
11. Ivanov, A.O., Shcherbakov, O.S., 2024, “Existence of Irreducible Multitours of Multiplicity 2”, *Chebyshev. Sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 101–117.
12. Bednov, B.B., 2017, “The Length of Minimal Filling for a Five-Point Metric”, *Moscow University Math. Bull.*, vol. 72, no. 6, pp. 221–225. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027132217060018>.
13. Vasiliev, F.P., Ivanitskii, A.Yu., 1998, *Linear Programming*, Moscow: Factorial Press.
14. Hwang, F.K., 1986, “A Linear Time Algorithm for Full Steiner Trees”, *Operations Research Letters*, vol. 4, no. 5, pp. 235–237. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-6377\(86\)90008-8](https://doi.org/10.1016/0167-6377(86)90008-8).
15. Vinberg, E.B., 2003, *A Course in Algebra*, New York: AMS.
16. Malysheva, O.S., 2020, “Optimal position of compact sets and the Steiner problem in spaces with Euclidean Gromov–Hausdorff metric”, *Sb. Math.*, vol. 211, no. 10, pp. 1382–1398. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM9361>.

Получено: 15.11.2024

Принято в печать: 07.04.2025