

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 2.

УДК 514.8+514.1

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-71-89

Моделирование оптимальных сетей в манхеттенском пространстве с помощью шарнирных механизмов

М. Ю. Житная

Житная Марина Юрьевна — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: g-ferra@mail.ru

Аннотация

В широком смысле шарнирные механизмы представляют собой конструкции из жёстких элементов, соединённых таким образом, что некоторые их пары могут вращаться вокруг общей точки. Одной из основных задач, связанных с исследованием шарнирных механизмов, является описание возможных положений шарниров. Важными результатами в этой области являются теоремы Кинга [7], [8] и Кемпе [2]. Основным результатом настоящей статьи является конструктивное доказательство существования шарнирного механизма, который решает задачу оптимизации, а именно поиска кратчайшей сети для границы из $m \geq 1$ точек в пространстве размерности $n \geq 2$ с манхеттенской метрикой. Данная работа является продолжением предыдущих работ автора [3], [4], в которых были описаны механизмы, строящие кратчайшую сеть на евклидовой плоскости, а также минимальную параметрическую сеть в евклидовом пространстве размерности $k \geq 2$.

Ключевые слова: проблема Штейнера, шарнирный механизм, ℓ_1 -метрика.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Житная М. Ю. Моделирование оптимальных сетей в манхеттенском пространстве с помощью шарнирных механизмов // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 71–89.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 2.

UDC 514.8+514.1

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-71-89

Modeling of optimal networks in Manhattan Geometry by means of linkages

M. Yu. Zhitnaya

Zhitnaia Marina Yur'evna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: g-ferra@mail.ru

Abstract

In a broad sense, linkages are constructions made of rigid elements connected in such a way that some of their pairs can rotate around a common point. One of the main tasks related to the study of linkages is the description of possible hinge positions. Important results in this area are provided by the theorems of King [7], [8] and Kempe [2]. The main result of this paper is the constructive proof of the existence of a linkage that solves the optimization problem, namely the search for the shortest network connecting the boundary of $m \geq 1$ points in a space of dimension $n \geq 2$ with the Manhattan metric. This work is a continuation of the author's previous works [3], [4], which described mechanisms for constructing the shortest network in the Euclidean plane, as well as the minimal parametric network in Euclidean space of dimension $k \geq 2$.

Keywords: Steiner problem, linkages, Manhattan metric.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

Zhitnaya, M. Yu. 2025, "Modeling of optimal networks in Manhattan Space by means of linkages", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 71–89.

Введение

Шарнирные механизмы — конструкции, представляющие собой жёсткие элементы, соединённые таким образом, что некоторые пары могут вращаться вокруг общей точки [18], [19]. Использование механизмов можно встретить в различных устройствах, например, в роботах [9], [13], [12] медицинских протезах и многих других.

Для описания возможных положений шарниров важными являются теоремы Кинга и Кемпе. Теорема Кинга утверждает, что множество является рисваемым тогда и только тогда, когда оно является компактным полуалгебраическим множеством или совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, а теорема Кемпе доказывает, что с помощью шарнирных механизмов можно нарисовать любую алгебраическую кривую [14].

Настоящая работа посвящена решению задачи поиска кратчайшей сети, соединяющей множество точек на манхеттенской плоскости, с помощью шарнирных механизмов.

Манхеттенская метрика позволяет измерять расстояния в пространстве, где перемещения возможны только по прямым линиям вдоль перпендикулярных осей [17]. Применение этой метрики имеет широкое распространение в задачах логистики, городского планирования, компьютерного зрения [1] и др.

Основным результатом текущего исследования является доказательство существования и описание алгоритма сборки механизма, решающего задачу поиска кратчайшей сети в манхеттенском пространстве.

В общем случае вариационные задачи, связанные с поиском максимума, минимума или точек экстремума, с помощью шарнирных механизмов решать нельзя. Тем не менее, в некоторых частных случаях построить механизм, решающий проблему оптимизации можно. Пусть в рассматриваемой задаче есть конечное количество структур имеющих числовой параметр, который подвергается оптимизации. В данной и предыдущих работах автора реализован подход, который позволяет сортировать структуры согласно их параметру таким образом, что оптимальная структура оказывается во вполне конкретном положении.

Автор выражает глубочайшую признательность своему научному руководителю, Алексею Августиновичу Тужилину, за его неоценимую помощь и поддержку в процессе подготовки данной работы. Его терпение, профессионализм и способность делиться знаниями стали основой продвижения в достижении результатов, а наставления, советы и вдохновение помогли

преодолеть все трудности. Также автор благодарит Александра Олеговича Иванова за содействие, поддержку и готовность помочь, что существенно способствовало успешному завершению исследования.

1. Основные определения и предварительные результаты

В этом разделе приведём ключевые понятия и теоретические основания, которые будут использованы в последующих частях работы.

1.1. Формализация сетей

Любое отображение $\Gamma = \Gamma_G: V \rightarrow \Omega$, где V — вершины простого конечного графа $G = (V, E)$, Ω — метрическое пространство, будем называть сетью в пространстве Ω , а граф G — *типом этой сети*. Отображения $\Gamma_v = \Gamma|_v$, $v \in V$ будем называть *вершинами сети* Γ , а $\Gamma_e = \Gamma|_e$, $e \in E$ — рёбрами сети Γ . Значение $|\Gamma_{uv}| = |\Gamma(u)\Gamma(v)|$ — *длина ребра* uv , сумма длин всех рёбер — *длина* $|\Gamma|$ *сети* Γ . Рёбра нулевой длины будем называть *вырожденными*, сети, не содержащие вырожденных рёбер, — *невыврожденными сетями*.

Иногда во множестве вершин V мы будем выделять подмножество $W \subset V$, которое назовём *границей графа* G , его элементы $w \in W$ — *граничными вершинами*. Граф G с границей W будем обозначать G^W . Отображение $\Gamma_W = \Gamma|_W$ назовём *границей сети* Γ , вершины Γ_w , $w \in W$ — *граничные вершины сети* Γ , остальные вершины сети или графа — *внутренние*. Если для некоторого отображения φ выполнено $\Gamma|_W = \varphi$, то будем говорить, что Γ — *сеть с фиксированной границей* φ .

Для заданного графа G^W можно рассматривать различные граничные отображения φ и для каждого из них — различные сети Γ типа G^W с границей $\Gamma|_W = \varphi$.

Сети Γ_1 и Γ_2 — *изоморфны*, если их типы изоморфны с помощью изоморфизма α и верно $\Gamma_1 = \Gamma_2 \circ \alpha$.

Отметим, что если пространство Ω , в которое отображается вершина v обозначить Ω_v , то сети можно отождествить с точками из декартова произведения $\prod_{v \in V} \Omega_v = \Omega^n$. В дальнейшем будем пользоваться этим естественным соответствием.

Если G — связный граф, то сети, имеющие тип G будем называть *связными*.

Пусть $M \subset \Omega$ — конечное множество. Будем говорить, что сеть Γ *соединяет* M , если $M = \Gamma(W)$. Так как далее мы будем решать задачу поиска кратчайшей связной сети, соединяющей M , то ограничимся типами, где G — дерево, у которого все вершины степени 1 и 2 — граничные. Это можно сделать, так как, если внутренняя вершина имеет степень 1, то уберём её и смежное ей ребро, после чего длина сети не увеличится. Если внутренняя вершина имеет степень 2, то её тоже можно убрать, соединив смежные ей вершины ребром, и тогда, в силу неравенства треугольника, длина всей сети тоже не увеличится.

Для описанных графов G множество всех сетей типа G с точностью до изоморфизма с границей из $n \geq |M|$ вершин и граничным отображением, образ которого равен M , обозначим $T_n(M)$.

Положим $\text{smt}_n(M) = \inf_{\Gamma \in T_n(M)} |\Gamma|$. Можно проверить, что значение $\text{smt}_n(M)$ не зависит от n , поэтому любое из этих $\text{smt}_n(M)$ будем обозначать $\text{smt}(M)$. Если существует сеть Γ_0 такая, что $|\Gamma_0| = \text{smt}(M)$, то будем называть сеть Γ_0 *минимальной сетью, соединяющей* M . Если $n = |M|$, то среди минимальных сетей, соединяющих M будут невырожденные, которые традиционно называются *минимальными деревьями Штейнера, соединяющими* M . Как показано в [5], если метрическое пространство ограничено компактно (любое замкнутое ограниченное подмножество в нём компактно), то для любой границы существует минимальное дерево Штейнера, которое её соединяет.

Пусть Ω — метрическое пространство с прямоугольной системой координат и манхеттенской метрикой, в которой расстояния порождаются нормой $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. В таком пространстве минимальные сети и минимальные деревья Штейнера называются *прямоугольными*.

Из [6], [10] известно, что образы внутренних вершин минимального прямоугольного дерева Штейнера содержатся внутри конечного множества. Это множество — узлы *решётки Ханана*, которая получается пересечением прямых, проходящих через граничные вершины и параллельных осям координат.

1.2. Формализация шарнирных механизмов

Существуют разные способы определения шарнирных механизмов даже при рассмотрении их математических моделей [15], [16]. Текущее исследование продолжает предыдущие работы автора [3], [4], но используемая далее терминология немного отличается от использованной ранее, чтобы сделать описание более удобным, сохранив строгость.

Пусть $G = (V, E)$ — граф, на множестве рёбер которого задана *весовая функция* $\ell: E \rightarrow [0, \infty)$. Набор $L = (G, \ell)$ будем называть *шарнирным механизмом*. Элементы множества V — *шарниры механизма* L , элементы множества E — *стержни*, значения функции $\ell(e)$, $e \in E$ — *длины стержней*.

Пусть $L = (G, \ell)$ — шарнирный механизм. Сеть x типа G в пространстве Ω будем называть *согласованной с ℓ* , если для любого ребра $uv \in E$ выполнено $|x(u)x(v)| = \ell(uv)$. Каждую такую сеть будем называть *положением шарнирного механизма L* в пространстве Ω и говорить, что механизм L рассматриваем в пространстве Ω .

Ограничение $x|_A$ на набор шарниров $A \subset V$ будем называть *положением набора шарниров A* и обозначать через x_A .

Если множество A состоит из одного шарнира v , то положение $x_A = x_{\{v\}}$ будем обозначать через x_v . Множество всех положений шарнира v обозначим через X_v^L . Множество всех положений механизма L обозначим через X^L , а множество всех положений набора A — через X_A^L .

Из сказанного выше вытекает, что множества положений X^L , X_A^L , X_v^L , можно рассматривать как подмножества соответствующих пространств $\Omega^n = \prod_{v \in V} \Omega_v$, $\Omega^{|A|} = \prod_{v \in A} \Omega_v$, $\Omega = \Omega_v$.

В обозначениях положений и их множеств, если понятно, к какому механизму они относятся, верхний индекс L будем опускать.

Для любого набора *шарниров* A механизма L будем говорить, что A *рисует* множество X_A^L .

На рисунках будем изображать механизмы в виде геометрических графов, рёбра которых — отрезки. Вершины этих графов будут соответствовать положениям шарниров и подписаны названиями самих шарниров, рёбра — стержням.

Часто для описания множества положений набора шарниров A будет удобно использовать словесное описание, которое, если множество A содержит более одного шарнира, может ограничивать положения шарниров относительно друг друга, либо относительно объёмлющего пространства.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим механизм L на плоскости, состоящий из двух подвижных шарниров a_1, a_2 , соединённых стержнем длины r . В таком механизме шарниры $A = \{a_1, a_2\}$ рисуют множество X_A , которое представляет собой множество концов отрезков длины r .

Пусть V — множество шарниров некоторого механизма, на котором заданы подмножества $A, B \subset V$, а также задано некоторое положение $x_B \in X_B$ набора шарниров B . Множество

$\{x|_A: x \in X, x|_B = x_B\}$ будем называть *множеством положений шарниров A при фиксированном положении x_B шарниров множества B* и обозначать через $X_A \dashv x_B = \{x_A \dashv x_B\}$.

ПРИМЕР 2. Множество положений механизма L из примера 1 можно также описать другим способом. Множество положений X_{a_1} шарнира a_1 равно $\mathbb{R}^2$. Для любого положения $x_{a_1} \in X_{a_1}$ множество положений $X_{a_2} \dashv x_{a_1}$ — окружность радиуса r с центром в x_{a_1} . Таким образом, говоря общо, можно сказать, что шарниры множества A рисуют на плоскости всевозможные окружности радиуса r , а точнее, шарнир a_2 рисует окружность радиуса r с центром в a_1 для всевозможных положений шарнира a_1 .

Пусть A, B и C три подмножества шарниров механизма L и A не пересекается с B . Будем говорить что шарниры множеств A и B *двигаются независимо друг от друга для любого положения набора шарниров C* , если для любых положений $x_C \in X_C$, $x_A \dashv x_C \in X_A \dashv x_C$, $x_B \dashv x_C \in X_B \dashv x_C$, существует положение $x \in X$, для которого $x|_C = x_C$, $x|_A = x_A \dashv x_C$, $x|_B = x_B \dashv x_C$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим механизм L , содержащий два стержня ab и bc длины r с общим концом b . В механизме L для каждого положения шарнира b шарниры a и c движутся независимо друг от друга и рисуют окружности с центром в b радиуса r .

Будем говорить, что A — *набор свободных шарниров*, если A — множество всех шарниров механизма L , не содержащего стержни.

Рассмотрим два механизма $L = (G = (V, E), \ell)$ и $L' = (G' = (V', E'), \ell')$. Пусть выполнено $V \subset V'$, $E \subset E'$, $\ell'|_E = \ell$. Будем говорить, что механизм L *вложен в L'* , либо, что L' получен в результате *расширения механизма L , добавлением стержней $\tilde{E} = E' \setminus E$ и шарниров $\tilde{V} = V' \setminus V$* .

Опишем операцию скрепления пересекающихся механизмов. Рассмотрим два механизма $L_1 = ((V_1, E_1), \ell_1)$ и $L_2 = ((V_2, E_2), \ell_2)$. Будем говорить, что механизмы L_1 и L_2 имеют *согласованное пересечение*, если для любого ребра $e \in E_1 \cap E_2$ верно, что $\ell_1(e) = \ell_2(e)$. Рассмотрим механизм $L = ((V, E), \ell)$, где $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$, $\ell: E \rightarrow [0; \infty)$, $\ell|_{E_1} = \ell_1$, $\ell|_{E_2} = \ell_2$. Механизм L будем называть *скреплением L_1 и L_2 по множеству шарниров $A = V_1 \cap V_2$* и обозначать $L = L_1 \cup_A L_2$. Часто скрепляемые механизмы не будут содержать общих рёбер и границ, поэтому скрепление таких механизмов определено корректно.

Обобщим операцию скрепления для непересекающихся механизмов. Пусть есть два механизма $L_1 = ((V_1, E_1), \ell_1)$ и $L_2 = ((V_2, E_2), \ell_2)$, множества шарниров которых не пересекаются. Рассмотрим два равномоощных подмножества $A_1 \subset V_1$ и $A_2 \subset V_2$, на которых определена биекция $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$. Продолжим φ на всё множество V_1 и обозначим это отображение Φ , определив $\Phi|_{V_1 \setminus A_1} = \text{id}$, $\Phi|_{A_1} = \varphi$. Рассмотрим механизм $L' = ((V', E'), \ell')$, в котором $V' = \Phi(V_1)$, $E' = \{\Phi(u)\Phi(v), uv \in E_1\}$, $\ell'(u'v') = \ell(\Phi^{-1}(u')\Phi^{-1}(v'))$. Если L' и L_2 имеют согласованное пересечение, то биекцию φ будем называть *отождествлением шарниров A_1 и A_2* , а скрепление механизмов L' и L_2 по множеству шарниров A_2 будем называть *скреплением механизмов L_1 и L_2 , с отождествлением φ шарниров A_1 и A_2* , и обозначать $L = L_1 \cup_\varphi L_2$.

Описанная выше операция позволяет скреплять шарниры разных механизмов, но её можно обобщить, позволив также скреплять шарниры, принадлежащие одному механизму. Рассмотрим механизм $L = ((V, E), \ell)$. Выберем пару шарниров $u, v \in V$, которые будем скреплять друг друг с другом. Обозначим через E_v все стержни, инцидентные v . Рассмотрим механизм $L_1 = ((V_1, E_v), \ell_1)$, где V_1 — множество концов стержней E_v и механизм $L_2 = ((V \setminus v, E \setminus E_v), \ell|_{E \setminus E_v})$. Отождествим друг с другом шарниры u и v и объединим со множеством $V_1 \setminus v$, которое принадлежит обоим механизмам. Обозначим результат A . Объединение L_1 и L_2 по множеству A будем называть *скреплением шарниров u и v в механизме L* . Отметим, что, несмотря на то, что процесс не симметричен для шарниров u и v , легко проверить, что от перемены их местами, результат не меняется.

Опишем множество положений механизма, полученного в результате объединения пересекающихся механизмов.

Утверждение 1. При объединении механизмов L_1 и L_2 по множеству A множество положений X_A^L шарниров A в получившемся механизме L равно пересечению $X_1|_A \cap X_2|_A$ множеств положений шарниров A в каждом из объединяемых механизмов.

Утверждение 2. Пусть механизм $L = L_1 \cup_A L_2$ — объединение L_1 и L_2 , множества положений которых X_1 и X_2 соответственно. Положим $S = X_1|_{(V_1 \setminus A)}$, $T = X_1|_A \cap X_2|_A$, $U = X_2|_{(V_2 \setminus A)}$. Тогда множество положений X^L состоит из всевозможных наборов шарниров $\{s, t, u\}$, где $t \in T$, $\{s, t\} \in X_1$, $\{t, u\} \in X_2$.

Следствие 1. Если L — результат скрепления механизмов L_1 и L_2 по множеству шарниров A , причём для L_1 множество положений A после скрепления не изменилось, то есть $X_A^{L_1} = X_A^L$, то множество положений $X_{V_1}^{L_1}$ всех шарниров L_1 после скрепления не изменится, $X^{L_1} = X_{V_1}^L$.

Доказательство. Пусть S, T, U множества из утверждения 2. Верность $X^{L_1} \supset X_{V_1}^L$ вытекает из утверждения 2. Покажем, что $X^{L_1} \subset X_{V_1}^L$. Фиксируем $x^1 \in X^{L_1}$. Так как $X_A^{L_1} = T$, то можно представить $x^1 = \{s, t\}$, $s \in S$, $t \in T$. Так как $T = X_A^L$, то для t существует $x \in X^L$, для которого $x|_{V_2} = x^2 \in X^{L_2}$, $x^2 = \{t, u\}$, $u \in U$. Таким образом, найден $x = \{s, t, u\} \in X^L$, для которого $x|_{V_1} = x^1$. $\square$

Замечание 10. Для описания множества положений механизма L' , полученного в результате расширения L можно представлять L в виде объединения L с механизмом состоящим из добавленных стержней и шарниров.

2. Классические шарнирные механизмы

В этом разделе приведём описание, а иногда и порядок построения, классических механизмов. На их примере будет показана технология работы с механизмами, которая в дальнейшем будет активно использоваться для решения поставленной задачи.

Если не сказано иного, то механизмы рассматриваются в $\mathbb{R}^2$.

Механизм 1 (Шарнирный треугольник abc .) Механизма, состоящий из трёх шарниров a , b и c , попарно соединённых стержнями.

У такого механизма в каждом положении в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ расстояние между любой парой шарниров одно и то же.

Механизм 2 (Закрепление шарнира на стержне.) На основе любого механизма $L = ((V, E), \ell)$, содержащегося в нём стержня uv и пары чисел r_1, r_2 таких, что $r_1 + r_2 = \ell(uv)$, можно построить механизм L' с множеством шарниров $V' = V \sqcup \{f\}$. Для множества положений шарниров V верно $X_V^L = X_V^{L'}$, и для любого положения шарниров V положение шарнира f однозначно определено — он находится на расстоянии r_1 от u и r_2 от v .

Будем говорить, что L' получен в результате закрепления шарнира f на стержне uv .

Доказательство. [Построение] Рассмотрим механизм L_2 , состоящий из двух стержней uf и fv , длины которых соответственно равны r_1 и r_2 . Все шарниры L_2 подвижные. В L шарниры u и v рисуют концы всех отрезков длины $\ell(uv)$, в механизме L_2 шарниры u и v рисуют концы всех отрезков длины не больше $r_1 + r_2$ и не меньше $|r_1 - r_2|$, поэтому верно, что $X_{\{u,v\}}^L \subset X_{\{u,v\}}^{L_2}$, а значит $X_{\{u,v\}}^L \cap X_{\{u,v\}}^{L_2} = X_{\{u,v\}}^L$, и согласно следствию 1, множество положений всех шарниров механизма L после объединения с L_2 не изменится. В механизме L_2 шарнир f всегда находился на расстояниях r_1 и r_2 от u и v . После скрепления это также будет верно (утверждение 2). Такое построение будем называть закреплением шарнира f на стержне uv . $\square$

Если далее на рисунках механизмов шарнир изображён на стержне, и не указано, что он может менять положение относительно вершин этого стержня, то подразумевается, что шарнир закреплён на стержне как описано выше.

Механизм 3 (Шарнирный четырёхугольник.) Это механизм $L = ((V, E), \ell)$, для которого множество шарниров $V = \{a, b, c, d\}$, все шарниры подвижные, множество стержней $E = \{ab, bc, cd, da\}$, и для длин верно $\ell(ab) = \ell(cd) = s$, $\ell(bc) = \ell(da) = t$.

У такого механизма в любом его положении вершины образуют либо параллелограмм, либо *антипараллелограмм* — четырёхугольник, полученный из параллелограмма отражением двух его смежных сторон относительно диагонали, с которой они образуют треугольник. Параллелограмм (антипараллелограмм) называют вырожденным, если все его вершины лежат на одной прямой. Множества параллелограммов и антипараллелограммов со сторонами a и b пересекаются по множеству *вырожденных параллелограммов* и *антипараллелограммов*.

ЛЕММА 1. *Рассмотрим пару чисел $s > t > 0$. Для любого параллелограмма, включая вырожденные, с длинами сторон s и t длина большей средней линии равна s . Для любого невырожденного антипараллелограмма со сторонами s и t длины средних линий меньше s .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что длина средней линии невырожденного антипараллелограмма меньше s . Рассмотрим равнобедренную трапецию с диагоналями s и боковыми сторонами t (рис. 1). Средняя линия трапеции совпадает с большей средней линией антипараллелограмма и содержит вторую. Обозначим через α угол между большим основанием и её диагональю трапеции. Длина средней линии трапеции равна проекции диагонали на большее основание $s \cos(\alpha)$. Следовательно, средняя линия невырожденного антипараллелограмма не превосходит s и равенство достигается только при $\alpha = 0$, то есть, когда антипараллелограмм вырожденный. $\square$ Пользуясь леммой 1 расширим шарнирный четырёхугольник 2 так, чтобы его

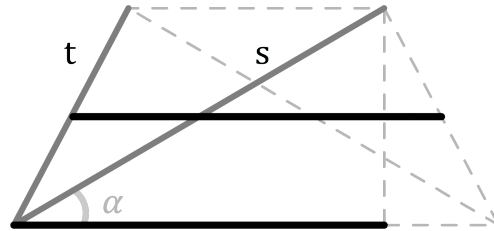


Рис. 1: Длина средней линии антипараллелограмма.

шарниры рисовали либо только вершины всевозможных параллелограммов (вырожденных или нет), либо только вершины антипараллелограммов (вырожденных или нет).

Механизм 4 (Укреплённый параллелограмм.) Механизм, содержащий шарниры a, b, c, d , которые рисуют всевозможные параллелограммы с длинами сторон s и t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Построение.] Рассмотрим механизм 2. С помощью механизма 2 добавим шарниры u и v на середины стержней длины t . Полученный механизм обозначим L . Пусть L_2 — механизм, состоящий из одного стержня uv длины s . Для множеств положений шарниров u и v верно, что $X_{\{u,v\}}^{L_2} \subset X_{\{u,v\}}^L$, поэтому согласно утверждению 1, при объединении механизмов L и L_2 по u и v шарниры u и v будут рисовать вершины отрезков длины s . Согласно лемме 1, положения a, b, c, d , соответствующие таким положениям шарниров u и v , — вершины всевозможных параллелограммов (возможно вырожденных) с длинами сторон s и t (рис. 2). $\square$

Модификацию механизма 2, описанную в построении механизма 2, назовём *укреплением параллелограмма*.

Механизм 5 (Укреплённый антипараллелограмм.) Механизм, содержащий шарниры a, b, c, d , которые рисуют всевозможные антипараллелограммы с длинами сторон s и t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Построение.] Для обоснования приведённой ниже конструкции нам понадобится следующий результат.

ЛЕММА 2. *Для любой пары значений s и t можно подобрать числа $r_1 = r_1(s, t)$, $r_2 = r_2(s, t)$ такие, что для всех антипараллелограммов со сторонами s и t существует точка на расстояниях r_1 от середин сторон длины s и r_2 от середин сторон длины t , причём для любого невырожденного параллелограмма со сторонами s и t такие числа r_1 и r_2 подобрать нельзя.*

Как и для укрепленного параллелограмма (механизм 2), возьмём за основу шарнирный четырёхугольник 2 с длинами сторон s и t . Добавим к нему шарниры m, n, l, k , лежащие на серединах стержней (механизм 2), и обозначим получившийся механизм через L . Пользуясь леммой 2, для данных s и t подберём числа r_1 и r_2 . Рассмотрим механизм L_2 , состоящий из четырёх стержней с общим концом, два из которых равны по длине r_1 , и два других — r_2 . Прикрепим свободные концы стержней механизма L_2 к шарнирам m, n, l, k , как показано на рис. 2. Из леммы 2 и утверждения 2 следует, что множество положений вершин шарнирного четырёхугольника будет строго ограничено положениями, соответствующими вершинам антипараллелограммов с длинами сторон s и t . $\square$

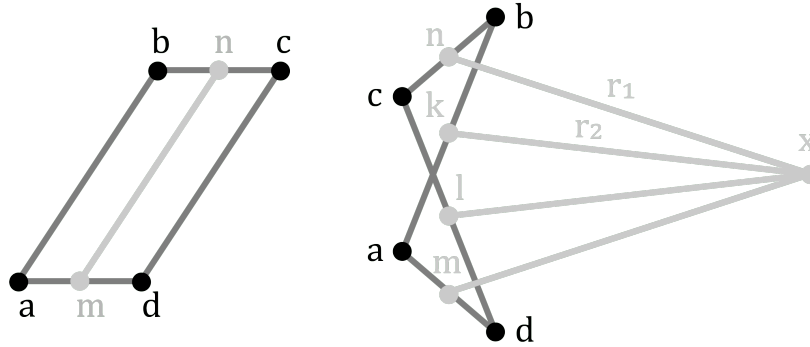


Рис. 2: Укрепление параллелограмма и антипараллелограмма

Во всех последующих механизмах использованные параллелограммы и антипараллелограммы будут по умолчанию укреплены, если не сказано иного.

Следующие два механизма — реверсор и сумматор Кемпе. Они помогают удваивать (делить пополам) углы и складывать (вычитать) углы. В текущей работе приведены схематичные изображения этих механизмов, а подробное описание можно найти в [2]. Отметим, что углы будем считать по модулю 2π , а также полагать, что они ориентированы: положительное направление угла $\angle abc$ отсчитывается от стороны ab к bc при повороте против часовой стрелки, а отрицательное — в обратную сторону.

Механизм 6 (Реверсор Кемпе с биссектральным шарниром b для $\angle dad'$.) Механизм $R = R(\angle dad', b)$, содержащий три стержня ad, ad', ab , в котором для каждого положения шарнира a шарниры d, b, d' двигаются независимо друг от друга и рисуют окружности с центром в a с некоторыми радиусами, и для любого положения $x \in X^R$ верно, что x_b лежит на биссектрисе ориентированного угла $\angle dad'$ (рис. 3).

Механизм 7 (Сумматор Кемпе.) Механизм L , содержащий четыре стержня ab, ac, ad, ae , в котором для каждого положения шарнира a шарниры b, c, d двигаются независимо друг от друга и рисуют окружность радиуса r с центром в a , и для любого положения $x \in X^L$ верно $\angle x_b x_a x_c + \angle x_b x_a x_d = \angle x_b x_a x_e$ (рис. 4).

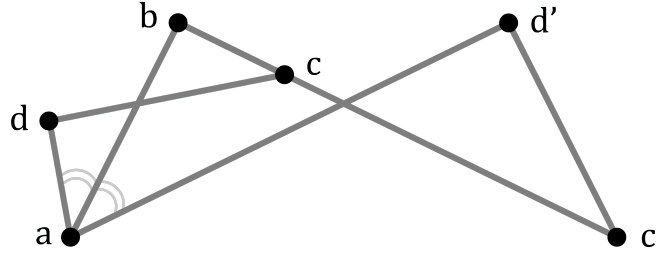


Рис. 3: Реверсор Кемпе.

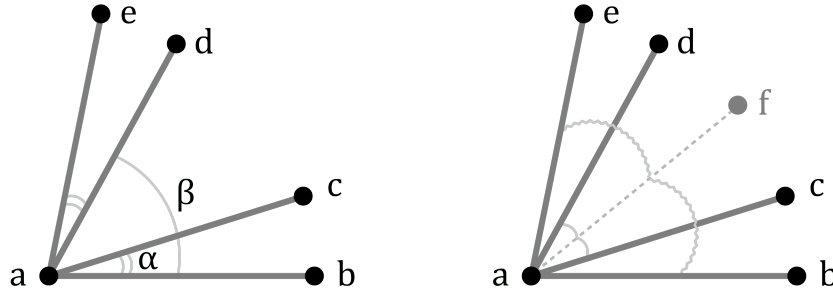


Рис. 4: Элемент сумматора Кемпе.

3. Описание предварительных результатов и вспомогательных механизмов

Механизм 8 (Простой механизм, ограничивающий дальность r с центром o .) Шарниры механизма L содержат подмножество A и шарнир o . Шарниры множества A двигаются независимо друг от друга и рисуют круг $B_r(o)$ радиуса r с центром в o .

Доказательство. [Построение] Искомый механизм L состоит из набора $|A|$ двузвенных шарнирных ломаных с длинами стержней $\frac{r}{2}$ и общим концом o . Множество A — противоположные концы ломаных и для них будет выполнено требуемое условие. $\square$

Будем говорить, что шарниры множества A *соединены простым механизмом, ограничивающим дальность r (с центром в o)*.

Механизм 9 (Ограничение множества положений свободных шарниров в $\mathbb{R}^n$ шаром радиуса r размерности $m < n$.) Механизм L в пространстве $\mathbb{R}^n$, содержащий наборы шарниров $A = \{a_i\}_{i=1}^k$, $N = \{n_j\}_{j=1}^m$, $m < n$ и шарнир o , причём для множества положений механизма L выполнены следующие условия.

- (1) Набор векторов $\{on_j\}_{j=1}^m$ образуют базис m -мерного линейного подпространства Π .
- (2) Шарниры множества A двигаются независимо друг от друга и рисуют шар с центром в точке o радиуса r , лежащий в ортогональном дополнении к Π .

Доказательство. [Построение] Искомый механизм подробно описан в [3] как скрепление k книг. Простой вариант этого механизма в пространстве $\mathbb{R}^n$, в котором два шарнира a_1 и a_2 двигаются независимо друг от друга и рисуют шар размерности $\mathbb{R}^{n-1}$ с центром в o , перпендикулярный on изображён на рисунке 5.

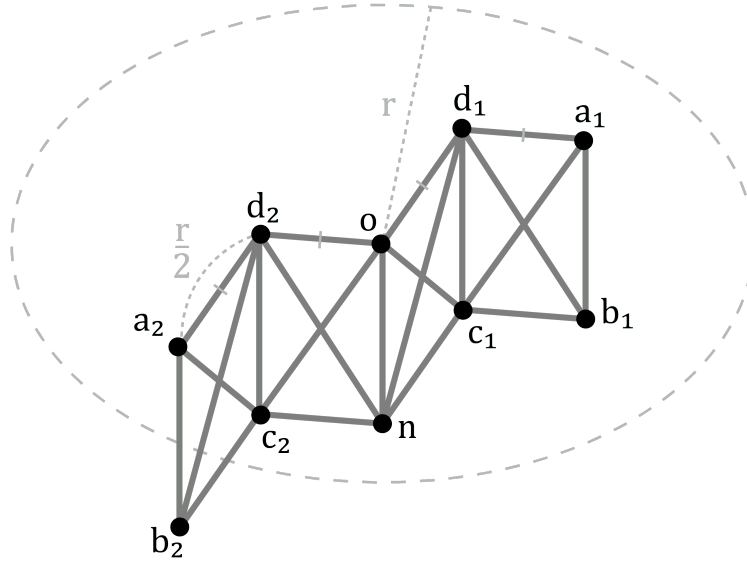


Рис. 5: Шарниры a_1 и a_2 двигаются независимо друг от друга и рисуют шар с центром в o в гиперплоскости, перпендикулярной on .

□

В частности, описанный выше механизм 3 при $m = 1$ позволяет двигать набор шарниров независимо друг от друга по произвольному отрезку в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. В данной работе для движения точек по отрезку этого механизма будет достаточно. Стоит отметить, что плоский механизм, позволяющий двигать точки по прямой тоже существует. Он представляет собой модификацию инверсора Поселье и описан в [3].

Если изначально плоский механизм L рассмотреть в пространстве большей размерности, то необходимые условия на его положения, могут перестать выполняться. Для того, чтобы они сохранились, если далее механизм L , описанный при построении как плоский, будет рассматриваться в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, то будем иметь ввиду, что к нему прикреплён механизм 3 с параметрами $m = 2$ и достаточно большим r так, что все его шарниры всегда остаются в одной плоскости.

Механизм 10 (Движение шарниров набора A по лучу с вершиной a .) Механизм L в пространстве $\mathbb{R}^n$, содержащий набор шарниров $A = \{a_i\}_{i=1}^k$ и шарниры a и o , в котором для каждого положения шарниров a и o шарниры множества A двигаются независимо друг от друга и рисуют отрезок с вершиной в a и центром o длины r .

Доказательство. [Построение] Искомый механизм получается из механизма 3, двигающего множество шарниров $A \cup a$ по отрезку I с центром в o длины r . Расширим этот механизм стержнем oa длины $\frac{r}{2}$ и получим, что шарнир a всегда будет в вершине отрезка I , а значит шарниры множества A лежат на луче oa с вершиной o . □

Механизм 11 (Движение шарнира a по окружности с центром в o радиуса bc .) Механизм L , содержит шарниры o , b , c , a . Для любого положения шарнира a шарниры b и c двигаются независимо друг от друга и рисуют круг с центром в o радиуса r , а для любого положения шарниров o , b , c шарнир a рисует окружность радиуса bc с центром в o .

Доказательство. [Построение] Возьмём набор шарниров b , c , c' , которые соединены простым механизмом ограничивающим дальность r с центром в o . Прикрепим к нему механизм 3, чтобы oc' было результатом параллельного переноса отрезка bc на вектор $\vec{bo}$. Прикрепим к o и c одноимённые вершины параллелограмма $2\ oec'f'$ со стороной $\frac{r}{2}$. Прикрепим к o ещё один параллелограмм $2\ ocaf$ с такими же длинами стержней. Сделаем так, чтобы параллелограмм $ocaf$ мог вращаться вокруг o , но его угол o был равен углу o параллелограмма $oec'f'$ (рис. 6 слева). Для этого прикрепим к имеющейся конструкции сумматор Кемпе 2 так, чтобы выпол-

нялось $\angle e'of = \angle e'of' + \angle e'oe$. В построенном механизме будут выполнены условия, требуемые в описании.

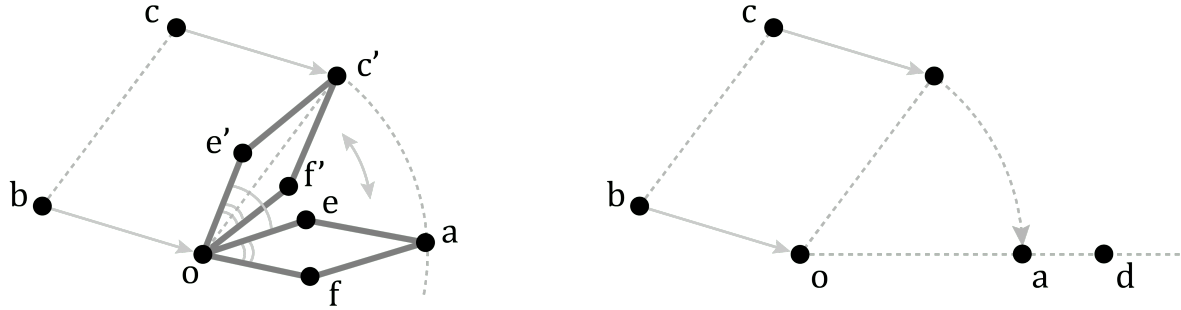


Рис. 6: Слева — схема построения окружность заданного радиуса, справа — схема переноса отрезка на луч, начиная от вершины.

□

Механизм 12 (Перенести отрезок в начало луча.) Механизм L , содержит шарниры a, b, c, d, o . Для любого положения шарнира a шарниры b и c двигаются независимо друг от друга и рисуют круг с центром в o радиуса r , шарнир d рисует окружность с центром в o радиуса r . Для любого положения шарниров o, b, c, d шарнир a рисует вершину отрезка oa длины bc на луче od .

Доказательство. [Построение] Начнём построение с механизма 3. Прикрепим к его шарниру o стержень od длины r . Далее прикрепим механизм 3, так чтобы шарниры a и d лежали на луче с вершиной o , и в результате получим искомый механизм (рис. 6 справа).

□

Механизм 13 (Пересечение прямых.) Механизм L , содержащий шарниры a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , в котором шарниры рисуют всевозможные положения, при которых для каждой из троек $\{a_1, a_2, a_5\}$ и $\{a_3, a_4, a_5\}$ существует некоторый отрезок длины r , который её содержит.

Доказательство. [Построение.] Рассмотрим L_1 и L_2 — два экземпляра механизма 3, двигающих наборы шарниров a_1, a_2, a_5 и a_3, a_4, a_5 по отрезкам длины r . Скрепив L_1 и L_2 , по шарниру a_5 , получим искомый механизм. □

Описанный выше механизм имеет следующее прикладное значение. Для любых пересекающихся или совпадающих прямых ℓ_1 и ℓ_2 и точки $o \in \ell_1, o \in \ell_2$, которая, если прямые совпадают, тоже может быть любой, во множестве положений X механизма L можно выделить подмножество $X_{\ell_1\ell_2o}$. Оно состоит из положений, в которых шарнир a_5 совпадает с o , и пары шарниров a_1, a_2 и a_3, a_4 рисуют множества всевозможных пар точек, лежащих соответственно на прямых ℓ_1 и ℓ_2 , для которых при этом выполнены неравенства $\text{diam}(\{a_1, a_2, a_5\}) \leq r$ и $\text{diam}(\{a_3, a_4, a_5\}) \leq r$. Множество положений X можно представить в виде дизъюнктного объединения множеств $\sqcup_{(\ell_1\ell_2o)} X_{\ell_1\ell_2o}$ по всевозможным наборам (ℓ_1, ℓ_2, o) .

Механизм 14 (Параллельный перенос отрезка.) Механизм L содержит шарниры a, b, c, d . Шарниры b и c двигаются независимо друг от друга и рисуют круг $B_r(a)$ с центром в a радиуса r , и для каждого положения шарниров a, b, c отрезок cd является образом отрезка ab при параллельном переносе на вектор $\vec{ac}$. **Доказательство.** [Построение.] Описанный далее механизм представляет собой модификацию известного механизма, транслятора Кемпе, который осуществляет параллельный перенос отрезка постоянной длины. Транслятор Кемпе состоит из двух укрепленных параллелограммов с общей стороной. Модификация транслятора, решающая задачу параллельного переноса отрезка переменной длины изображена на рис. 7. Она представляет собой четыре укрепленных параллелограмма с общими сторонами. Длины всех стержней равны $\frac{r}{2}$. Покажем, что для любого положения механизма верно $\vec{ab} = \vec{cd}$.

Так как L собран из укрепленных параллелограммов, то верно $\vec{ae} = \vec{hf} = \vec{bg}$, $\vec{ec} = \vec{fk} = \vec{gd}$, а значит $\vec{ac} = \vec{ae} + \vec{ec} = \vec{bg} + \vec{gd} = \vec{cd}$. Также непосредственно проверяется, что реализуются любые положения шарниров b и c внутри круга $B_r(a)$.

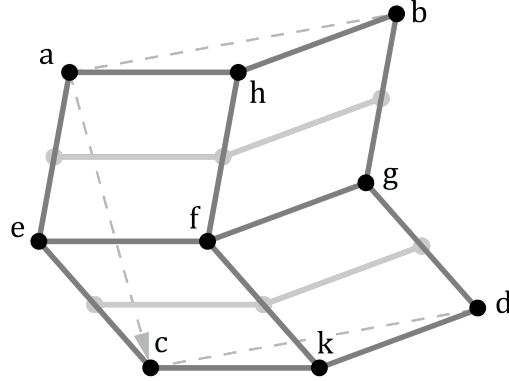


Рис. 7: Параллельный перенос отрезка ab на вектор ac .

□

Для множества положений описанного выше механизма также верно, что для всевозможных векторов $\vec{ab}$ и $\vec{ac}$ длины не больше r шарнир d рисует вершину вектора $\vec{ad} = \vec{ab} + \vec{ac}$. Поэтому будем использовать механизм 3 также для построения суммы векторов. Так как для более чем двух векторов результат суммы не зависит от порядка сложения, то построенный механизм можно применять для сложения нескольких векторов, пронумеровав их произвольным образом и последовательно добавляя следующий вектор к сумме предыдущих.

Механизм 15 (Проекция точки на прямую.) Механизм L содержит шарниры a, b, c, h и в нём на шарниры a, b, c строго действует простое ограничение дальности r , и для каждого их положения такого, что $b \neq c$, шарнир h рисует проекцию шарнира a на прямую bc . Для положений, в которых $b = c$, шарнир h рисует окружность, для которой $ab = ac$ — диаметр. Доказательство. [Построение.]

Рассмотрим два стержня d_1e_1 и d_2e_2 длины $4r$. Прикрепим к ним стержни d_1d_2, e_1e_2 длины $\sqrt{2}r$. В получившемся механизме отрезки d_1d_2 и e_1e_2 всегда перпендикулярны. На одном из стержней закрепим в середине шарнир h (механизм 2). С помощью механизма 3 добавим шарниры b, c , рисующие отрезок d_1e_1 и a , рисующий отрезок d_2e_2 . Затем соединим шарниры a, b, c механизмом, ограничивающим дальность r с центром в h и в результате получим искомый механизм (рис. 8).

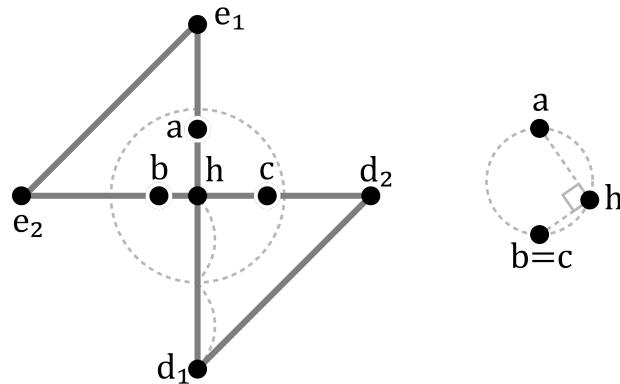


Рис. 8: Проекция точки на прямую.

В таком механизме выполнено условие, требуемое в описании механизма и никакие другие положения, исходя из построения, реализованы не будут.

□

Механизм 16 (Построение отрезка, равного минимальному (максимальному) из двух данных.) Механизм L , содержащий шарниры m, n, k, l, p, h , в котором положения шарниров m, n, k, l — всевозможные наборы точек, для которых существует круг радиуса r , содержащий их, и для каждого их положения длина отрезка ph (отрезка mh) равна минимальной (максимальной) из длин mn и kl . **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** [Построение.]

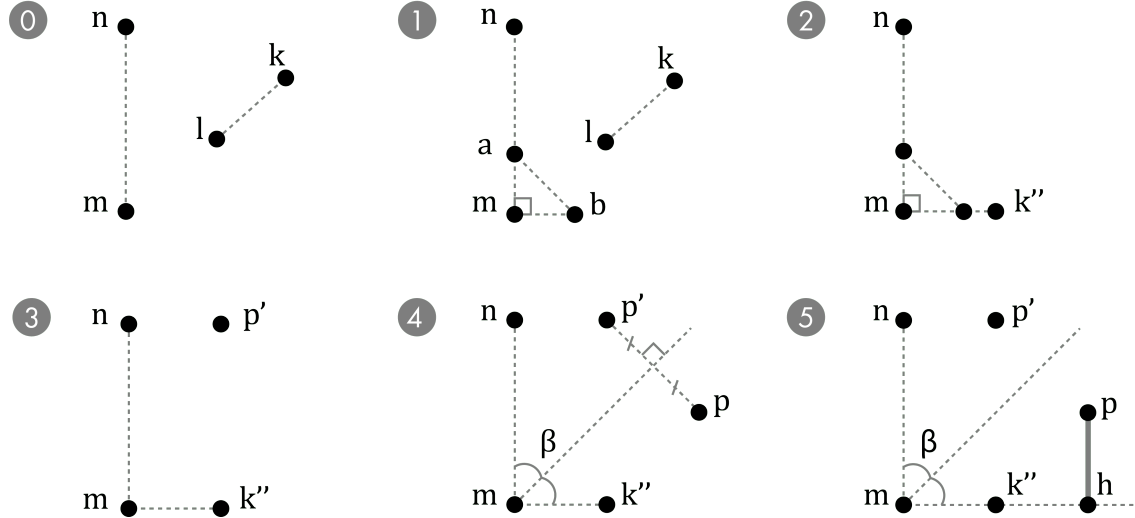


Рис. 9: План построения механизма, строящего минимальный (максимальный) отрезок из двух данных.

Подробное описание механизма, строящего минимальный отрезок, приведено в [3], механизм № 17. Для этого построения также используются вспомогательные механизмы, описанные в [3]. Приведём краткий план этого построения (рис. 9).

Пусть шарниры m, n, k, l — концы двузвенных шарнирных ломаных с равными длинами стержней и общим противоположным концом. Прикрепим к шарниру m вершину прямого угла шарнирного треугольника tab . Прикрепим к шарнирам m, n, a механизм 3, чтобы они оставались на одной прямой. С помощью механизма 3 отложим отрезок равный mk на луче mb . Обозначим k'' образ k . Перенесём параллельно mk'' , чтобы образ t попал в n (механизм 3). Образ k'' обозначим p' . Расширим построение так, чтобы механизм содержал шарнир p , удовлетворяющий следующему свойству. Если p' и k'' лежат по одну стороны относительно биссектрисы угла nmk'' , то $p = p'$, а иначе p является образом при отражении p' относительно этой биссектрисы [3]. Исходя из построения этого механизма, можно заметить, что в нём расстояние между шарнирами p и h равно минимальному из mn и lk , а mh — максимальному. Таким образом, описанный механизм строит отрезок, равный минимальному и максимальному из двух данных. □

4. Основные результаты

ЛЕММА 3 (Построение узлов решётки Ханана для границы из n точек). *Для любого n на плоскости $\mathbb{R}^2$ существует механизм $L = L(n) = (G^W = (V, E)^W, \ell)$, $|W| = n$ удовлетворяющий следующим условиям.*

- (1) Механизм L содержит шарниры o, e_1, e_2 , которые в каждом положении задают орто-

нормированную систему координат $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Далее положения (x^1, x^2) любых шарниров механизма L будем рассматривать в этой системе координат.

- (2) Шарниры множества W двигаются независимо друг от друга и каждый из них для каждого положения шарнира o рисует круг $B_r(o)$ с центром в o радиуса r .
- (3) Во множестве шарниров V выделено подмножество $H = \{h_{uv} | u, v \in W, u \neq v\}$.
- (4) Для любого положения x_W шарниров множества W множество положений $X^L \dashv x^W$ механизма L состоит из одной точки $X^L \dashv x_W = \{x \dashv x_W\}$.
- (5) Положения шарниров H зависят от положений граничных вершин следующим образом. Для любой пары граничных вершин $u, v \in W$ и их положений $x_u = (u^1, u^2)$, $x_v = (v^1, v^2)$ положения шарниров $h_{uv}, h_{vu} \in H$ имеют следующие координаты $x_{h_{uv}} \dashv \{x_u, x_v\} = (u^1, v^2)$, $x_{h_{vu}} \dashv \{x_v, x_u\} = (v^1, u^2)$. Таким образом, шарниры множества H лежат в узлах решётки Ханана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть oe_1e_2 — шарнирный прямоугольный треугольник. Рассмотрим набор шарниров W , соединённых простым механизмом, ограничивающим дальность r , центр которого скрепим с o (механизм 3). Для каждого шарнира $w \in W$ с помощью механизма 3 добавим шарниры, которые строят проекции w^1 и w^2 на прямые oe_1 и oe_2 . Для каждой пары $u, v \in W$, $u \neq v$ с помощью механизма 3 построим сумму $\overrightarrow{oh_{uv}} = \overrightarrow{ou^1} + \overrightarrow{ov^2}$. В полученном механизме будут выполнены требуемые условия на положения шарниров множества W , и для каждого их положения шарниры h_{uv} , образующие множество H , будут рисовать все узлы решётки Ханана. $\square$

ЛЕММА 4 (Построение отрезка, равного манхеттенской длине сети). *Существует механизм $L = ((V, E)^{V'}, \ell)$, для которого выполнено следующее.*

- (1) Механизм L содержит шарниры o, e_1, e_2 , которые в каждом положении задают ортонормированную систему координат $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Далее положения (x^1, x^2) любых шарниров механизма L будем рассматривать в этой системе координат.
- (2) Во множестве шарниров V выделено подмножество V' , для которого задан граф $G^{V'} = (V', E^{V'})$.
- (3) Шарниры множества W двигаются независимо друг от друга и для каждого положения шарнира o рисуют круг $B_r(o)$.
- (4) Механизм L содержит шарнир b и для него верно, что для каждого положения $x \in X^L$ евклидова длина отрезка $[x_o, x_b]$ равна манхеттенской длине сети x_W типа G_W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнём с жёсткого прямоугольного треугольника oe_1e_2 с прямым углом o . Прикрепим к нему механизм 3, ограничивающий дальность r набора шарниров W с центром в o . Для каждого ребра $uv \in E_W$ с помощью механизма 3 построим проекции u_1, u_2 шарнира u и v_1, v_2 шарнира v на прямые oe_1 и oe_2 соответственно.

Далее пронумеруем проекции произвольным образом и с помощью механизмов 3, которые переносят отрезок в начало заданного луча, отложим последовательно отрезки, равные проекциям, на луче oe_1 , начиная с вершины o . Дальнюю от o вершину последнего перенесённого отрезка обозначим b . В полученном механизме для любого его положения x длина отрезка $[x_o, x_b]$ равна манхеттенской длине сети x_W типа G^W , таким образом искомый механизм построен. $\square$

Утверждение 3 (Поиск кратчайшей сети). Пусть дан механизм $L = ((V, E), \ell)$, удовлетворяющий следующим условиям.

- (1) L — механизм в пространстве $\mathbb{R}^3$.
- (2) Механизм L содержит шарниры o, e_1, e_2, e_3 , которые в каждом положении задают ортонормированную систему координат $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ с одной и той же заданной ориентацией. Далее положения (x^1, x^2, x^3) любых шарниров механизма L будем рассматривать в этой системе координат.
- (3) Выделены подмножества шарниров $V_i \subset V$ и заданы графы $G_i = (V_i, E_i)$.
- (4) Для любого положения $x \in X^L$ и любого i верно $x_{V_i}^3 = 0$.

Тогда механизм L можно расширить до механизма $L' = ((V', E'), \ell)$, в котором выполнено следующее.

- (1) $X_{V_i}^L = X_{V_i}^{L'}$.
- (2) Заданы подмножества шарниров $V'_i \subset V'$ и графы $G'_i = (V'_i, E'_i)$, которые изоморфны G_i , где $p_i: V_i \rightarrow V'_i$.
- (3) Для любого положения $x' \in X^{L'}$ и для всех i положения шарниров $x'_{V'_i}$ лежат в горизонтальной плоскости $x^3 = \text{const}_i$ и являются образами параллельного переноса положений x_{V_i} на вектор, сонаправленный с $\vec{e}_3$.
- (4) Для каждого индекса j такого, что $x_{V_j}^3 = 0$, манхеттенская длина сети x_{V_j} типа G_j равна $\min_k d_1(x_{V_k})$, где x_{V_k} — сеть типа G_k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя механизм, описанный в теореме 4, расширим исходный механизм так, чтобы в нём появились пары шарниров, строящие концы отрезков равных манхеттенским длинам сетей x_{V_i} типа G_i . С помощью механизма 3 отложим эти отрезки на луче oe_1 от точки o и обозначим $[o, l_i]$ отрезок, соответствующий $d_1(x_{V_i})$. Далее, с помощью механизма 3 построим отрезок $[o, l]$, длина которого равна минимальной длине из всех $|ol_i|$.

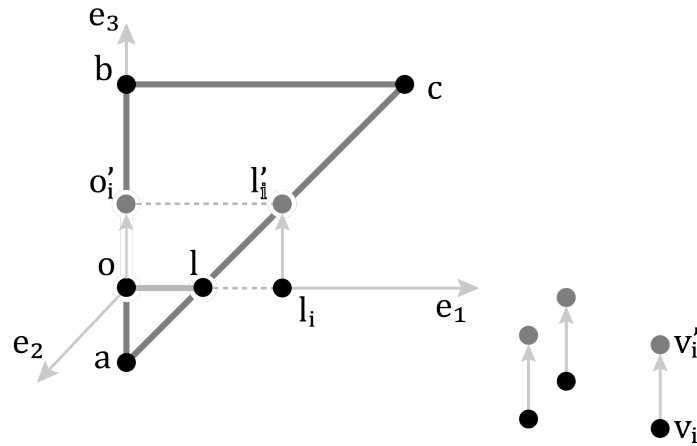
Рассмотрим шарнирный треугольник abc с прямым углом b .

С помощью механизма 3 ограничим положения вершин треугольника кругом с центром в o радиуса $2R$, лежащем в плоскости oe_1e_3 . Прикрепим к шарнирам a, b, o, e_3 механизм 3 так, чтобы они оставались на луче ab . На данном этапе построения треугольник abc , оставаясь в плоскости oe_1e_3 , может двигаться вдоль прямой oe_3 , при этом катет ab всегда лежит на оси oe_3 . Прикрепим к шарнирам a, l, c механизм 3 так, чтобы эти шарниры оставались на луче с вершиной a . Таким образом, для каждого положения шарниров V положение шарнира l определено однозначно, а значит и положения шарниров a, b, c .

К каждому отрезку $[o, l_i]$ прикрепим механизм 3 так, чтобы шарниры o'_i и l'_i были образом параллельного переноса $[o, l_i]$ на вектор $\vec{oo'_i}$.

Прикрепим 3 к тройкам шарниров a, b, o'_i и a, c, l'_i так, чтобы они оставались на одной прямой. В результате получим, что для каждого положения шарниров V положения шарниров o'_i и l'_i определены однозначно. Они лежат на сторонах треугольника abc и параллельны oe_1 . Таким образом однозначно определены вектора $\vec{oo'_i}$, которые сонаправлены с oe_3 (рис. 10).

Чем больше отрезок $[o, l_i]$, тем длиннее вектор $\vec{oo'_i}$, на который происходит перенос $[o, l_i]$ и значит тем выше плоскость $x^3 = \text{const}_i$, в которой лежит отрезок $[o, l_i]$, причём самый короткий из $[o'_i, l'_i]$ совпадает с $[o, l]$, поэтому для него $\vec{oo'_i} = 0$.

Рис. 10: Параллельный перенос сети вдоль оси oe_3 .

Для каждого i к шарнирам множеств V_i прикрепим механизм 3 сдвигающий шарниры на вектор $\overrightarrow{oo'_i}$. Обозначим образы соответствующих шарниров V'_i . В построенном расширении механизма L множество положений шарниров V не изменилось, и для каждого положения $x \in X^L$ каждое из подмножеств V_i параллельно перенесено на вектор $\overrightarrow{oo'_i}$, длина которого равна разнице длины сети x_{V_i} типа G_i и кратчайшей из длин всех сетей x_{V_i} . $\square$

ТЕОРЕМА 1. Для любого натурального числа n существует рассматриваемый в $\mathbb{R}^3$, шарнирный механизм $L = L(n) = (G^W = (V, E)^W, \ell)$, $|W| = n$, обладающий следующими свойствами:

- (1) Механизм L содержит шарниры o, e_1, e_2, e_3 , которые в каждом положении задают ортонормированную систему координат $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Далее положения (x^1, x^2, x^3) любых шарниров механизма L будем рассматривать в этой системе координат.
- (2) Шарниры множества W двигаются независимо друг от друга, и при фиксированном положении шарнира o каждый из них рисует круг $B_r(o)$ в плоскости $x^3 = \text{const}$ с центром в o радиуса r .
- (3) Во множестве шарниров V выделены подмножества I_i не пересекающиеся с W . Обозначим $V_i = W \cup I_i$. Для каждого V_i задан граф $T_i^W = (V_i, E_i)^W$.
- (4) Для любого положения x_W шарниров W множество положений $X^L \dashv x_W$ механизма L состоит из одной точки x .
- (5) Для каждого i и любого положения x механизма L образы отображения x_{I_i} лежат в плоскости $x^3 = \text{const}_i$.
- (6) Если для некоторого j положения шарниров I_j лежат в плоскости $x^3 = 0$, то сеть x_{V_j} типа T_j — минимальная прямоугольная сеть Штейнера с границей x_W .
- (7) Для любого положения x_W существует как минимум один набор I_k такой, что $x_{I_k}^3 = 0$.
- (8) Если x_W — инъекция, то найдётся T_k , для которого x_{V_k} типа T_k — минимальное прямоугольное дерево Штейнера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем порядок сборки искомого механизма. Для начала возьмём три равных жёстких прямоугольных равнобедренных треугольника $oe_1e_2, oe_2e_3, oe_3e_1$ и скрепим

их, отождествляя шарниры с одинаковыми именами. Далее возьмём набор свободных шарниров W , $|W| = n$. Прикрепим к множеству шарниров W механизм 3 чтобы они продолжали свободно двигаться, оставаясь при этом в шаре с центром в o радиуса r . Чтобы шарниры множества W рисовали не трёхмерный шар, а круг в плоскости oe_1e_2 , прикрепим к шарнирам множества W механизм 3, который ограничит положения W кругом с центром в o радиуса r в плоскости oe_1e_2 . Расширим имеющуюся конструкцию с помощью механизма, описанного в теореме 3 и получим множество шарниров H , которые для каждого положения граничных шарниров рисуют положения узлов решётки Ханана. Полученный механизм обозначим L' .

Далее рассмотрим множество всевозможных деревьев $T_i^W = (V_i, E_i)^W$, $V_i = W \sqcup I_i$, для которых $I_i \subset H$, степени вершин не превосходят 4 и вершины степени один содержатся в W (таких деревьев конечное число). С помощью механизма, описанного в теореме 3, расширим L' и обозначим результат L . Полученный механизм будет содержать наборы шарниров I'_i . Для каждого положения механизма L верно, что шарниры I'_i лежат в образах параллельного переноса соответствующих наборов шарниров I_i на вектор сонаправленный с $\vec{e}_3$, длина которого пропорциональна манхеттенской длине сети x_{V_i} типа T_i , причём кратчайшая из сетей согласно описанию механизма 3 будет лежать в плоскости $x^3 = 0$. Таким образом, искомый механизм построен. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Все приведённые выше рассуждения естественным образом распространяются на случай, когда граница W лежит в пространстве размерности $n > 2$. Для такой границы внутренние вершины кратчайшей сети тоже лежат во множестве узлов многомерного аналога решётки Ханана [11]. Перебирая все возможные сети, для каждой из них построим отрезок, равный манхеттенской длине сети. Далее, совершая параллельный перенос вдоль оси e_{n+1} , перпендикулярной пространству, в котором лежит W , получим, что искомая сеть будет лежать в гиперплоскости $x^{n+1} = 0$. Таким образом, формулировку теоремы 1 можно обобщить на случай, когда граница лежит в пространстве размерности $n \geq 2$.

5. Заключение

Основной результат работы даёт построение механизма, строящего кратчайшую сеть в пространстве размерности $n \geq 2$ с манхеттенской метрикой. Несмотря на то, что в общем случае решение вариационных задач не свойственно шарнирным механизмам, при выполнении специальных условий придуман и реализован метод, который позволяет строить механизм, решающий задачу оптимизации. Этот подход применён для решения задачи, поставленной в данной статье, а также предыдущих работах автора [3], [4]. Полученные результаты открывают новую область для исследования возможностей решения вариационных задач с помощью шарнирных механизмов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Distance Measures for Machine Learning // MachineLearningMastery.com. 2020. URL: <https://machinelearningmastery.com/distance-measures-for-machine-learning/> (дата обращения: 01.01.2025).
2. Кемпе А.Б. О методе описания плоских кривых степени n с использованием шарнирных механизмов // Proceedings of the London Mathematical Society. 1876. Т. 7. С. 213-216.
3. Житная М.Ю. Моделирование оптимальных сетей с использованием шарнирных механизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 2019. Т. 22, № 6. С. 95-122.

4. Житная М.Ю. Моделирование минимальных параметрических сетей в евклидовых пространствах с помощью шарнирных механизмов // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, № 2. С. 74-87.
5. Иванов А.О., Тужилин А.А. Теория экстремальных сетей. М.: Наука, 2001. 320 с.
6. Ханан М. О проблеме Штейнера с использованием манхэттенских расстояний // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1966. Т. 14. С. 255-265.
7. King R. The Robotic Revolution. Oxford: Oxford University Press, 1998. 280 p.
8. King R. Advanced Robotics: Theory and Application. Cambridge: MIT Press, 2005. 350 p.
9. Револьвентные шарниры // Dorna Robotics. URL: <https://dorna.ai/blog/types-of-robot-joints/> (дата обращения: 01.01.2025).
10. Захариасен М. Каталог проблем сетки Ханана // Networks. 2000. Т. 38. С. 200-221.
11. Snyder T.L. On Minimal Rectilinear Steiner Trees in All Dimensions // Discrete and Computational Geometry. 1992. Vol. 7. P. 221-261. URL: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/98524.98596>.
12. Леверенз К.Р., Трушчински М. Проблема ректильного дерева Штейнера: алгоритмы и примеры с использованием перестановок терминалов // ACM Southeast Regional Conference. 1999. DOI: 10.1145/306363.306402.
13. Хартенберг Р.С., Денавит Ж. Теория кинематического синтеза механизмов. Нью-Йорк: McGraw-Hill, 1964. 450 p.
14. Капович М., Миллсон Дж.Дж. Универсальные теоремы для конфигураций плоских шарнирных механизмов // Topology. 2002. Т. 41, № 6. С. 1051-1107.
15. Ковалёв М.Д. Геометрические вопросы кинематики и статики. М.: URSS Ленанд, 2019. 240 с.
16. Ковалёв М.Д. Что такое шарнирный механизм? И что же доказал Кемпе? // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. 2020. Т. 179. С. 16-28.
17. Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И. Курс наглядной геометрии и топологии. М.: URSS, 2014. 360 с.
18. Sosinsky A.B. Two-dimensional surfaces and configuration spaces of articulated mechanisms. Lecture one // Summer school "Modern mathematics". Dubna, 2007. URL: http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=130 (дата обращения: 01.01.2025).
19. Sosinsky A.B. Two-dimensional surfaces and configuration spaces of articulated mechanisms. Lecture two // Summer school "Modern mathematics". Dubna, 2007. URL: http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=131&option_lang=rus (дата обращения: 01.01.2025).

REFERENCES

1. MachineLearningMastery.com, 2020, "4 Distance Measures for Machine Learning", [Online]. Available: <https://machinelearningmastery.com/distance-measures-for-machine-learning/> [Accessed: Jan. 1, 2025].
2. Kempe, A.B., 1876, "On a General Method of Describing Plane Curves of the nth Degree by Linkwork", *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 7, pp. 213-216.
3. Zhitnaya, M.Y., 2019, "Modeling of optimal networks by means of linkages", *Fundamental and Applied Mathematics*, vol. 22, no. 6, pp. 95-122.
4. Zhitnaya, M.Y., 2022, "Modeling minimal parametric networks in Euclidean spaces using linkages", *Chebyshev Collection*, vol. 23, no. 2, pp. 74-87.
5. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A., 2001, *Theory of Extreme Networks*, Moscow: Nauka.
6. Hanan, M., 1966, "On Steiner's problem with rectilinear distance", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 14, pp. 255-265.
7. King, R., 1998, *The Robotic Revolution*, Oxford: Oxford University Press.
8. King, R., 2005, *Advanced Robotics: Theory and Application*, Cambridge: MIT Press.
9. Dorna Robotics, 2023, "Revolute Joints", [Online]. Available: <https://dorna.ai/blog/types-of-robot-joints/> [Accessed: Jan. 1, 2025].
10. Zachariasen, M., 2000, "A Catalog of Hanan Grid Problems", *Networks*, vol. 38, pp. 200-221.
11. Snyder, T.L., 1992, "On Minimal Rectilinear Steiner Trees in All Dimensions", *Discrete and Computational Geometry*, vol. 7, pp. 221-261. DOI: 10.1145/98524.98596.
12. Leverenz, C.R., Truszczynski, M., 1999, "The Rectilinear Steiner Tree Problem: Algorithms and Examples using Permutations of the Terminal Set", in *Proceedings of the ACM Southeast Regional Conference*, pp. 1-10. DOI: 10.1145/306363.306402.
13. Hartenberg, R.S., Denavit, J., 1964, *Kinematic Synthesis of Linkages*, New York: McGraw-Hill.
14. Kapovich, M., Millson, J.J., 2002, "Universality theorems for configurations of planar linkages", *Topology*, vol. 41, no. 6, pp. 1051-1107.
15. Kovalev, M.D., 2019, *Geometric Questions of Kinematics and Statics*, Moscow: URSS Lenand.
16. Kovalev, M.D., 2020, "What is a linkage mechanism? And what did Kempe prove?", *Results of Science and Technology. Modern Mathematics and Its Applications*, vol. 179, pp. 16-28.
17. Oshemkov, A.A., Popelensky, F.Yu., Tuzhilin, A.A., Fomenko, A.T., Shafarevich, A.I., 2014, *Course of Visual Geometry and Topology*, Moscow: URSS.
18. Sosinsky, A.B., 2007, "Two-dimensional surfaces and configuration spaces of articulated mechanisms. Lecture one", in *Summer School "Modern Mathematics"*, Dubna: JINR. [Online]. Available: http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=130.
19. Sosinsky, A.B., 2007, "Two-dimensional surfaces and configuration spaces of articulated mechanisms. Lecture two", in *Summer School "Modern Mathematics"*, Dubna: JINR. [Online]. Available: http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=131&option_lang=rus.

Получено: 29.12.2024

Принято в печать: 07.04.2025