ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-61-70

Представления действительных чисел

А. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков

Восьмидесятилетию со дня рождения
академика Анатолия Тимофеевича Фоменко
посвящается

Гияси Азар — кандидат физико-математических наук, Университет им. Алламе Табатабаи (Иран).
e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir
Михайлов Илья Петрович — Казанский авиационный институт (г. Лениногорск).
e-mail: chubarik2020@mail.ru
Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Аннотация

В работе доказаны теоремы о представлении действительных чисел α с помощью бесконечной итерации последовательности положительных монотонных функций $\alpha_n = f_n(x_n)$ в виде
$$\alpha = \lambda_0 + f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + f_3(\lambda_3 + \dots))),$$
где «цифры» $\lambda_n,\ n \geq 0$, и “остатки”
$$r_n = r_n(\alpha) = f_{n+1}(\lambda_{n+1} + f_{n+2}(\lambda_{n+2} + f_{n+3}(\lambda_{n+3} + \dots))),\ n \geq 0,$$
определяются по следующим рекуррентным формулам
$$\lambda_0 = [\alpha],\ r_0 = \{\alpha\},$$
$$\lambda_n = [\varphi_n(r_{n-1}(\alpha))],\ r_n = \{\varphi(r_{n-1})\},$$
причем $\{z\}$ и $[z]$ обозначают соответственно дробную и целую части действительного числа z и $x_n = \varphi_n(\alpha_n),\ n \geq 1,$ — обратные функции для $\alpha_n = f_n(x_n)$.

В частности, представление числа α с помощью функции $f(x) = \frac{1}{x}$ приводит к цепной дроби для числа α. Общий случай, когда $f(x)$ — убывающая функция, был рассмотрен Б. Х. Биссинжером (1944) и А. Реньи (1957). Для функции $f(x) = \frac{x}{q}$ при $q \geq 2$ — натуральном числе получается q-адическое представление вида $\alpha = \sum \lambda_n q^{-n}$, где цифры $\lambda_n,\ n \geq 1$, могут принимать все целые значения от 0 до $q-1$. Случай возрастающей функции $f(x)$ исследовался С. И. Эвереттом (1946) и А. Реньи (1957). Представление α для $f(x) = \frac{x}{\theta}$ при нецелом $\theta > 1$ изучалось А. Реньи (1957) и А. О. Гельфондом (1959). В настоящей работе для последовательности функций $f_n(x) = \frac{x}{q_n}, q_n \geq 2,$ — целые числа, исследуется представление α по мультипликативной системе чисел при $n \geq 1$ в виде
$$\alpha = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{q_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{q_1 \dots q_n} + \frac{x_n}{q_1 \dots q_n},$$
где цифры λ_n могут принимать целые значения от 0 до $q_n - 1$. А. Х. Гияси (2007) обобщила теорему Гельфонда, касающуюся мультипликативной системы чисел. Пусть

$\theta_n,\ n \geq 1,$ — последовательность действительных чисел, каждое из которых больше единицы. Тогда любое действительное число $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, может быть представлено в форме $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{q_1 \cdots q_k} + \frac{x_n}{q_1 \cdots q_n},\ n \geq 1$, где последовательность x_n остаточных членов определяется рекуррентно

$$x_0 = \{\alpha\},\ x_1 = \{\theta_1 x_0\}, \ldots, x_n = \{\theta_n x_{n-1}\}, \ldots,$$

и последовательность целых чисел λ_n определяется по правилу

$$\lambda_0 = [\alpha],\ \lambda_1 = [\theta_1 x_0], \ldots, \lambda_n = [\theta_n x_{n-1}], \ldots.$$

Ключевые слова: q-адическое представление, непрерывная (цепная) дробь, мультипликативная система чисел.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:
Гияси, А., Михайлов, И.П., Чубариков, В.Н. Представления действительных чисел // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 61–70.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-61-70

Representations for real numbers

A. Ghyasi, I. P. Mikhailov, V. N. Chubarikov

Giyasi Azar — candidate of physical and mathematical sciences, Allameh Tabataba'i University (Iran).
e-mail: aoivamech.math.msu.su
Mikhailov Ilya Petrovich — Kazan Aviation Institute (Leninogorsk).
e-mail: chubarik2020@mail.ru
Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Abstract

In this paper theorems on the representations of real numbers α by using infinite iteration of a sequence of positive monotonic functions $\alpha_n = f_n(x_n)$ in the form

$$\alpha = \lambda_0 + f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + f_3(\lambda_3 + \ldots))),$$

where "digits" $\lambda_n,\ n \geq 0$, and "remainders"

$$r_n = r_n(\alpha) = f_{n+1}(\lambda_{n+1} + f_{n+2}(\lambda_{n+2} + f_{n+3}(\lambda_{n+3} + \ldots))),\ n \geq 0,$$

are defined by the following recurrent formulas

$$\lambda_0 = [\alpha],\ r_0 = \{\alpha\},$$

$$\lambda_n = [\varphi_n(r_{n-1}(\alpha))],\ r_n = \{\varphi(r_{n-1})\},$$

moreover $\{z\}$ and $[z]$ denote accordingly the fractional and the integral parts of the real number z, and $x_n = \varphi_n(\alpha_n),\ n \geq 1$, are inverse functions of $\alpha_n = f_n(x_n)$.

In particular, the representation of the number α by using function $f(x)=\frac{1}{x}$ leads to the continued fraction of the number α. The general case when $f(x)$ is decreasing function have been considered by B.H. Bissinger (1944) and A. Rényi (1957). For the function $f(x)=\frac{x}{q}$ as $q\geq 2$ is the natural number, is obtained q-adic the representation of the form $\alpha=\sum\lambda_n q^{-n}$, where digits $\lambda_n,\ n\geq 1$, can to receive all integral values from 0 to $q-1$. The case when $f(x)$ is increasing function have been investigated by C.I. Everett (1946) and A. Rényi (1957). The representation α for $f(x)=\frac{x}{\theta}$ is nonintegral number $\theta>1$ have been studied A. Rényi (1957) and A.O. Gelfond (1959). In the present paper for the sequence of functions $f_n(x)=\frac{x}{q_n}, q_n\geq 2$, are integer, has been investigated the representation of α on the multiplicative system of numbers as $n\geq 1$ in the form

$$\alpha=\lambda_0+\frac{\lambda_1}{q_1}+\dots+\frac{\lambda_n}{q_1\dots q_n}+\frac{x_n}{q_1\dots q_n},$$

where digits λ_n can to receive integral values from 0 to q_n-1.

A. Kh. Ghyasi (2007) has been generalized Gelfond theorem concerning the multiplicative system of numbers. Let $\theta_n,\quad n\geq 1$, be a sequence of real numbers, each of which greater than 1. Then any real number $\alpha, 0<\alpha<1$, can be represented in the form $\alpha=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{\theta_1\dots\theta_k}+\frac{x_n}{\theta_1\dots\theta_n},\ n\geq 1$, where the sequence x_n of error terms is defined by recurrence

$$x_0=\{\alpha\}, x_1=\{\theta_1 x_0\}, x_n=\{\theta_n x_{n-1}\},\dots,$$

and the sequence of integers λ_n is defined by the rule

$$\lambda_0=[\alpha],\ \lambda_1=[\theta_1 x_0],\dots,\lambda_n=[\theta_n x_{n-1}],\dots.$$

Keywords: q-adic expansion, continued fraction, multiplicative number system.

Bibliography: 10 titles.

For citation:
Ghyasi, A., Mikhailov, I.P., Chubarikov, V.N. 2025, “Representations for real numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 61–70.

1. Введение

В настоящей работе даны обобщения теорем об однозначном представлении действительного числа в позиционной системе счисления и в виде цепной дроби [1]-[9].

Пусть $x=f(\alpha)$ неотрицательная монотонная функция при $\alpha\geq 1$ и $\alpha=\varphi(x)$ — обратная к ней функция. Для любого неотрицательного действительного числа α определим представление его в виде

$$\alpha=\lambda_0+f(\lambda_1+f(\lambda_2+\dots+f(\lambda_n+r_n)\dots)),\quad n\geq 0, \tag{1}$$

где «цифры» $\bar\lambda_n=\bar\lambda_n(\alpha), n\geq 0,$ — целые числа,

$$\lambda_0=\lambda_0(\alpha)=[\alpha], r_0=r_0(\alpha)=\{\alpha\},$$

$$\lambda_n=\lambda_n(\alpha)=[\varphi(r_{n-1}(\alpha))], r_n=r_n(\alpha)=\{\varphi(r_{n-1}(\alpha))\},\quad n\geq 1,$$

причем $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ обозначают соответственно целую и дробную часть числа α ([1]-[3]).

Заметим, что $\lambda_n+r_n=\varphi(r_{n-1}),\quad \lambda_0+r_0=\alpha,\quad n\geq 1.$

Рассмотрим конкретные примеры функций $f(\alpha)$.

1. Пусть $q>1$ — натуральное число,

$$x=f(\alpha)=\frac{\alpha}{q},\quad \alpha=\varphi(x)=qx.$$

Тогда имеем

$$\lambda_n = [\varphi(r_{n-1}(\alpha))] = [qr_{n-1}(\alpha)], \quad r_n = \{qr_{n-1}(\alpha)\} = \{q^n\alpha\}.$$

Следовательно,

$$0 \le \lambda_n \le qr_{n-1}(\alpha) < q,$$

т.е. «цифры» λ_n могут принимать целые значения от 0 до $q-1$.

Тем самым получено q-адическое представление числа в виде

$$\alpha = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{q} + \dots + \frac{\lambda_n}{q^n} + \frac{r_n}{q^n} = S_n(\alpha) + \frac{r_n}{q^n}, \quad 0 \le r_n < 1.$$

В частности, последовательность $\{S_n(\alpha)\}$ равномерно сходится к α, а последовательность $r_n(\alpha)$ почти для всех $\alpha \in [0,1]$ в смысле меры Лебега равномерно распределена по модулю 1. По критерию Г. Вейля условие равномерного распределения по модулю единица последовательности $r_n(\alpha)$ эквивалентно тому, что для любой функции $g(x)$, интегрируемой по Риману на отрезке $[0,1]$, справедливо предельное равенство

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(r_n) = \int\limits_0^1 g(t)\,dt.$$

2. Пусть $\theta > 1$ — нецелое действительное число,

$$x = f(\alpha) = \frac{\alpha}{\theta}, \quad \alpha = \varphi(x) = \theta x.$$

Положим

$$\lambda_0 = [\alpha],\ r_0 = \{\alpha\},$$

а при $n \ge 1$

$$\lambda_n = [\varphi(r_{n-1}(\alpha))] = [\theta r_{n-1}(\alpha)], \quad r_n = \{\theta r_{n-1}(\alpha)\} = \{\{\theta \dots \{\theta\alpha\} \dots\}\}.$$

Следовательно,

$$0 \le \lambda_n \le \theta r_{n-1}(\alpha) < \theta,$$

т.е. «цифры» λ_n могут принимать целые значения от 0 до $[\theta]$.

Тем самым получено представление числа α в виде

$$\alpha = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{\theta} + \dots + \frac{\lambda_n}{\theta^n} + \frac{r_n}{\theta^n} = S_n(\alpha) + \frac{r_n}{\theta^n}, \quad 0 \le r_n < 1.$$

В частности, последовательность $\{S_n(\alpha)\}, n \ge 1$, равномерно сходится к α [5].

3. Пусть $F_0 = F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ n \ge 1,$ — последовательность чисел Фибоначчи,

$$x_n = f_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n F_{n-1}}{F_n}, \quad \alpha_n = \varphi_n(x_{n-1}) = \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1}.$$

Положим

$$\lambda_0 = [\alpha] = 0,\ x_0 = \{\alpha\},$$

а при $n \ge 1$

$$\lambda_n = [\varphi_n(x_{n-1}(\alpha))] = \left[\frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1}(\alpha)\right],$$

$$x_n(\alpha) = \{\varphi_n(x_{n-1}(\alpha))\} = \left\{\left\{\frac{F_0}{F_1} \dots \left\{\frac{F_{n-1}}{F_n}\alpha\right\} \dots\right\}\right\},\ 0 \le x_n < 1.$$

Следовательно,

$$0 \le \lambda_n \le \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1}(\alpha) < \frac{F_n}{F_{n-1}} < 2,$$

т.е. «цифры» λ_n могут принимать целые значения 0 и 1.

Тем самым получено представление числа α в виде

$$\alpha = \lambda_0 + \frac{F_0}{F_1}\left(\lambda_1 + \frac{F_1}{F_2}\left(\lambda_2 + \dots + \frac{F_{n-1}}{F_n}(\lambda_n + x_n)\dots\right)\right) =$$

$$= \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{F_2} + \dots + \frac{\lambda_n}{F_n} + \frac{x_n}{F_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{F_n}.$$

([9], [10]).

4. Пусть теперь $x = f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$, $\quad \alpha = \varphi(x) = \frac{1}{x}$. Тогда выражение (1) приводит к цепной дроби для числа x. Находим

$$\lambda_n = [\varphi(r_{n-1}(\alpha))] = \left[\frac{1}{r_{n-1}}\right], \quad r_n = \left\{\frac{1}{r_{n-1}}\right\}.$$

Таким образом при $r_0 r_1 \dots r_{n-1} \ne 0$ имеем цепную дробь вида

$$\alpha = \lambda_0 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{\dots \cfrac{1}{\lambda_{n-1} + \cfrac{1}{\lambda_n + r_n}}}}.$$

Если $r_n = 0$, то цепная дробь представляет собой конечное выражение. Если же α — иррационально, то для любого n справедливо неравенство $r_n \ne 0$ ([1], [3], [4]).

5. При целом $m \ge 2$ и $0 \le x \le 2^m - 1$ положим

$$x = f(\alpha) = \sqrt[m]{1+\alpha} - 1, \ \alpha = \varphi(x) = (1+x)^m - 1.$$

Тогда «цифры» λ_n и последовательность остатков r_n образуются рекуррентным образом

$$\lambda_0 = [\alpha], \ r_n = \{\alpha\}, \ \lambda_0 + r_0 = \alpha,$$

$$\lambda_n = [(1+r_{n-1})^m - 1], \ r_n = \{(1+r_{n-1})^m - 1\}, \ \lambda_n + r_n + 1 = (1+r_{n-1})^m, \ n \ge 1.$$

Следовательно,

$$\alpha = \lambda_0 - 1 + \sqrt[m]{\lambda_1 + \sqrt[m]{\lambda_2 + \dots + \sqrt[m]{\lambda_{n-1} + \sqrt[m]{\lambda_n + r_n + 1}}}}$$

(см. [3]).

Пусть теперь задана последовательность $x_n = f_n(\alpha_n)$ неотрицательных монотонных (возрастающих, соответственно, убывающих) функций при $\alpha_n \ge 1$ и $\alpha_n = \varphi_n(x_n)$ — последовательность обратных к ним функций. Для любого неотрицательного действительного числа α определим представление его в виде

$$\alpha = \lambda_0 + f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \dots + f_n(\lambda_n + r_n)\dots)), \quad n \ge 0, \tag{1'}$$

где «цифры» $\bar\lambda_n = \bar\lambda_n(\alpha), n \ge 0,$ — целые числа,

$$\lambda_0 = \lambda_0(\alpha) = [\alpha], r_0 = r_0(\alpha) = \{\alpha\},$$

$$\lambda_n = \lambda_n(\alpha) = [\varphi_{n-1}(r_{n-1}(\alpha))], r_n = r_n(\alpha) = \{\varphi_{n-1}(r_{n-1}(\alpha))\}, \quad n \geq 1,$$

причем $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ обозначают соответственно целую и дробную часть числа α.

6. Пусть при $n \geq 1$ заданы последовательность $q_n > 1$ натуральных чисел,

$$x_n = f_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{q_n}, \quad \alpha_n = \varphi_n(x_n) = q_n x_n.$$

Тогда имеем

$$\lambda_n = [\varphi_n(r_{n-1}(\alpha))] = [q_n r_{n-1}(\alpha)], \quad r_n = \{q_n r_{n-1}(\alpha)\} = \{q_1 \dots q_n \alpha\}.$$

Следовательно,

$$0 \leq \lambda_n \leq q_n r_{n-1}(\alpha) < q_n,$$

т.е. «цифры» λ_n могут принимать целые значения от 0 до $q_n - 1$.

Тем самым получено представление числа α в виде

$$\alpha = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{q_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{q_1 \dots q_n} + \frac{r_n}{q_1 \dots q_n} = S_n(\alpha) + \frac{r_n}{q_1 \dots q_n}, \quad 0 \leq r_n < 1.$$

В частности, при $\alpha \in [0, 1]$ последовательность $\{S_n(\alpha)\}$ равномерно сходится к α (см. [6]-[8]).

§1. Представление действительных чисел с помощью убывающей функции [1],[3].

Пусть $f(1) = 1$ и $f(t)$ — неотрицательная, убывающая функция при $t \geq 1$. Если существует число $T \geq 1$ такое, что $f(T) = 0$, то при $t \geq T$ имеем $f(t) = 0$. В противном случае справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = 0.$$

Пусть, как и раньше, существует обратная функция $t = \varphi(x)$ для функции $x = f(t)$ такая, что $\varphi(f(t)) \equiv t$ при $t \in [1, T]$. Пусть, также,

$$\lambda_0 = [t],\ r_0 = \{t\},\ t = \lambda_0 + r_0;$$

$$\lambda_n = [\varphi(r_{n-1})],\ r_n = \{\varphi(r_{n-1})\},\ \lambda_n + r_n = \varphi(r_{n-1}).$$

Наконец, пусть найдется число $0 < \delta < 1$ такое, что для всех $t, u \in [1, T]$ справедливо неравенство

$$|f(t) - f(u)| \leq \delta |t - u|. \tag{2}$$

Положим

$$C_n = \lambda_0 + f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_n) \dots)).$$

Теорема 1. *Последовательность C_n сходится к числу t.*

Доказательство. Сначала, используя критерий Коши, установим сходимость последовательности C_n, $n \geq 1$. Оценим при $p \geq 1$ модуль разности

$$|C_{n+p} - C_n| = |f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_{n+p}) \dots)) - f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_n) \dots))| =$$

$$= |f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_n + \sigma_{n,p}) \dots)) - f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_n) \dots))|,$$

где

$$\sigma_{n,p} = f(\lambda_{n+1} + f(\lambda_{n+2} + \dots + f(\lambda_{n+p}) \dots)).$$

Далее, используя неравенство (2), находим $|C_{n+p} - C_n| \leq$

$$\leq \delta |f(\lambda_2 + f(\lambda_3 + \dots + f(\lambda_n + \sigma_{n,p}) \dots)) - f(\lambda_2 + f(\lambda_3 + \dots + f(\lambda_n) \dots))| \leq \dots$$

$$\dots \le \delta^{n-1}|f(\lambda_n+\sigma_{n,p})-f(\lambda_n)| \le \delta^n \sigma_{n,p} \le \delta^n.$$

Тем самым при $n \to \infty$ и любом $p \ge 1$ имеем, что $C_{n+p}-C_n \to 0$. Это и доказывает существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$.

Докажем теперь, что найденный предел равен t. Действительно, при $n \ge 1$ справедливо тождество

$$\lambda_n + r_n = \varphi(r_{n-1}).$$

Тогда при $n \ge 1$ получим

$$\lambda_0 + f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_n + r_n)\dots)) =$$

$$= \lambda_0 + f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f([\varphi(r_{n-1})] + \{\varphi(r_{n-1})\})\dots)) =$$

$$\lambda_0 + f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_{n-1} + f(\varphi(r_{n-1}))\dots)) = \dots$$

$$= \lambda_0 + f(\lambda_1 + r_1) = \lambda_0 + r_0 = t.$$

Оценим сверху модуль разности

$$|t - C_n| = |f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_n + r_n)\dots)) - f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_n)\dots))| \le$$

$$\le \delta|f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_n + r_n)\dots)) - f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_n)\dots)| \le \dots$$

$$\le \delta^{n-1}|f(\lambda_n + r_n) - f(\lambda_n)| \le \delta^n r_n \le \delta^n.$$

Теорема доказана.

§2. Представление действительного числа с помощью возрастающей функции [2],[3].

Пусть $f(0)=0$ и $f(t)$ — возрастающая функция при $t \ge 1$. Если существует число $T \ge 1$ такое, что $f(T)=1$, то при $t \ge T$ имеем $f(t)=1$. В противном случае справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 1.$$

Пусть, как и раньше, существует обратная функция $t=\varphi(x)$ для функции $x=f(t)$ такая, что $\varphi(f(t)) \equiv t$ при $t \in [1,T]$. Пусть, также,

$$\lambda_0 = [t],\ r_0 = \{t\},\ t = \lambda_0 + r_0;$$

$$\lambda_n = [\varphi(r_{n-1})],\ r_n = \{\varphi(r_{n-1})\},\ \lambda_n + r_n = \varphi(r_{n-1}).$$

Наконец, пусть найдется число $0 < \delta < 1$ такое, что для всех $t, u \in [1,T]$ справедливо неравенство

$$|f(t) - f(u)| \le \delta|t-u|.$$

Положим

$$C_n = \lambda_0 + f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_n)\dots)).$$

Теорема 2. *Последовательность C_n сходится к числу t.*

Доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1 с очевидной заменой условия убывания функции $f(x)$ на ее возрастание и соответствующей заменой пределов изменения этой функции.

§3. Представление действительных чисел с помощью последовательности возрастающих функций.

Пусть при $n \geq 1$ имеем $f_n(0) = 0$ и $f_n(t)$ — возрастающая функция для $t \geq 1$. Если существует число $T_n \geq 1$ такое, что для всех $n \geq 1$ справедливо равенство $f_n(T) = 1$, то при $t \geq T_n$ имеем $f_n(t) = 1$. В противном случае справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} f_n(t) = 1.$$

Пусть, как и раньше, существует обратная функция $t_n = \varphi_n(x_n)$ для функции $x_n = f(t_n)$ такая, что $\varphi_n(f_n(t_n)) \equiv t_n$ при $t_n \in [1, T_n]$. Пусть, также,

$$\lambda_0 = [t],\ r_0 = \{t\},\ t = \lambda_0 + r_0;$$

$$\lambda_n = [\varphi_{n-1}(r_{n-1})],\ r_n = \{\varphi_{n-1}(r_{n-1})\},\ \lambda_n + r_n = \varphi_{n-1}(r_{n-1}).$$

Наконец, пусть для $n \geq 1$ найдется число $0 < \delta < 1$ такое, что для всех $t, u \in [1, T_n]$ справедливо неравенство

$$|f_n(t) - f_n(u)| \leq \delta |t - u|.$$

Положим

$$C_n = \lambda_0 + f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n)\dots)).$$

Теорема 3. *Последовательность C_n сходится к числу t.*

Доказательство. Используя критерий Коши, установим сходимость последовательности $C_n,\ n \geq 1$. Оценим при $p \geq 1$ модуль разности

$$|C_{n+p} - C_n| = |f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_{n+p}(\lambda_{n+p})\dots)) - f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n)\dots))| =$$

$$= |f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n + \sigma_{n,p})\dots)) - f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n)\dots))|,$$

где

$$\sigma_{n,p} = f_{n+1}(\lambda_{n+1} + f_{n+2}(\lambda_{n+2} + \cdots + f_{n+p}(\lambda_{n+p})\dots)).$$

Далее, используя неравенство (2), находим $|C_{n+p} - C_n| \leq$

$$\leq \delta |f(\lambda_2 + f(\lambda_3 + \cdots + f(\lambda_n + \sigma_{n,p})\dots)) - f(\lambda_2 + f(\lambda_3 + \cdots + f(\lambda_n)\dots))| \leq \dots$$

$$\dots \leq \delta^{n-1} |f_n(\lambda_n + \sigma_{n,p}) - f_n(\lambda_n)| \leq \delta^n \sigma_{n,p} \leq \delta^n.$$

Тем самым при $n \to \infty$ и любом $p \geq 1$ имеем, что $C_{n+p} - C_n \to 0$. Это и доказывает существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$.

Докажем теперь, что найденный предел равен t. Действительно, при $n \geq 1$ справедливо тождество

$$\lambda_n + r_n = \varphi_n(r_{n-1}).$$

Тогда при $n \geq 1$ получим

$$\lambda_0 + f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n + r_n)\dots)) =$$

$$= \lambda_0 + f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n([\varphi(r_{n-1})] + \{\varphi(r_{n-1})\})\dots)) =$$

$$\lambda_0 + f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_{n-1} + f_n(\varphi_n(r_{n-1}))\dots)) = \dots$$

$$= \lambda_0 + f_1(\lambda_1 + r_1) = \lambda_0 + r_0 = t.$$

Оценим сверху модуль разности

$$|t - C_n| = |f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n + r_n)\dots)) - f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n)\dots))| \leq$$

$$\leq \delta |f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n + r_n)\dots)) - f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n)\dots)| \leq \dots$$

$$\leq \delta^{n-1} |f_n(\lambda_n + r_n) - f_n(\lambda_n)| \leq \delta^n r_n \leq \delta^n.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bissinger, B.H. A generalization of continued fractions // Bulletin of the Amer. Math. Soc., **(50)**1944, pp. 868–876.

2. Everett, C.I. Representation for real numbers // Bulletin of the Amer. Math. Soc., **(52)**1946, pp. 861–869.

3. Rényi, A. Representation for real numbers and their ergodic properties // Acta Math., 1957, **VIII,** 3-4. С. 477–493.

4. Khinchine, A. Kettenbr´uche // Leipzig, 1956.

5. Гельфонд, А.О. Об одном общем свойстве систем счисления // Изв. АН СССР, сер. матем., 1959, **23**.

6. Ghyasi, A. K. A generalization of the Gelfond theorem concerning number systems // Russian Journal of Math. Physics, 2007,bf 14, No.3, С. 370.

7. Гияси, А.Х., Михайлов, И.П., Чубариков, В.Н. О разложении действительных чисел по некоторым последовательностям // Чебышевский сборник, 2022, **23:1**, С. 50–60.

8. Гияси, А.Х., Михайлов, И.П., Чубариков, В.Н. О равномерном распределении остатков в разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел // Чебышевский сборник, 2022, **23:3**, С. 38–44.

9. Гияси, А.Х., Михайлов, И.П., Чубариков, В.Н. О разложении чисел по последовательности чисел Фибоначчи // Чебышевский сборник, 2023, **24:2**, С. 248–255.

10. Гияси, А.Х., Михайлов, И.П., Чубариков, В.Н. О последовательности дробных частей отношения чисел Фибоначчи // Чебышевский сборник, 2023, **24:3**, С. 242–250.

REFERENCES

1. Bissinger B.H. 1944, “A generalization of continued fractions”, *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, **(50)**, pp. 868–876.

2. Everett C.I. 1946, “Representation for real numbers”, *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, **(52)**, pp. 861–869.

3. Rényi A. 1957, “Representation for real numbers and their ergodic properties”, *Acta Math.*, **VIII,** 3-4. pp. 477–493.

4. Khinchine, A. 1956, “Kettenbr´uche”, *Leipzig*.

5. Gelfond, A.O. 1959, “On one general property of number systems”, *Izv. of the USSR Academy of Sciences, ser. matem.*, **23**.

6. Ghyasi, A. K. 2007, “A generalization of the Gelfond theorem concerning number systems”, *Russian Journal of Math. Physics*, **14,** № 3, 370.

7. Giyasi, A.H., Mikhailov, I.P., Chubarikov, V.N. 2022, “On the decomposition of real numbers by some sequences”, *Chebyshevskii Sbornik*, **23:1**, pp. 50–60.

8. Giyasi, A.H., Mikhailov, I.P., Chubarikov, V.N. 2022, “On the uniform distribution of residues in the expansion of real numbers by the multiplicative number system”, *Chebyshevskii Sbornik*, **23:3**, pp. 38–44.

9. Giyasi, A.H., Mikhailov, I.P., Chubarikov, V.N. 2023, “On the decomposition of numbers by the sequence of Fibonacci numbers”, *Chebyshevskii Sbornik*, **24:2**, pp. 248–255.

10. Giyasi, A.H., Mikhailov, I.P., Chubarikov, V.N. 2023, “About the sequence of fractional parts of the ratio of Fibonacci numbers”, *Chebyshevskii Sbornik*, **24:3**, pp. 242–250.

Получено: 25.01.2025
Принято в печать: 07.04.2025