ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 1 (2014)

УДК 519.21

ДРОБИ ФАРЕЯ И ПЕРЕСТАНОВКИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ДРОБНЫМИ ДОЛЯМИ $\{i\alpha\}$ [1]

А. В. Шутов (г. Владимир)

Аннотация

Пусть $\alpha \in (0;1)$ – иррационально. Задачи о распределении дробных долей $\{i\alpha\}$ на интервале $(0;1)$ являются классическими задачами теории чисел. В частности, со времен Г. Вейля, доказавшего равномерную распределенность данной последовательности по модулю 1, активно рассматриваются различные оценки для остаточного члена асимптотической формулы для числа точек данной последовательности, попавших в заданный интервал. Другой круг вопросов связан с знаменитой теоремой о трех длинах (гипотезой Штейнгауза), утверждающей что разбиение единичного отрезка, порожденное точками рассматриваемой последовательности, состоит из отрезков двух или трех различных длин, причем в последнем случае длина наибольшего отрезка в точности равна сумме длин двух оставшихся. Изучение геометрии получаемых разбиений оказалось тесно связанным с отображениями первого возвращения для поворота окружности, проблемой Гекке-Кестена о множествах ограниченного остатка, комбинаторикой последовательностей Штурма, динамикой двухцветных поворотов окружности и рядом других задач.

Настоящая работа посвящена комбинаторным свойствам последовательности $\{i\alpha\}$, а именно перестановкам $\pi_{\alpha,n}$, порожденным точками $\{i\alpha\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Доказано, что данные перестановки находятся во взаимнооднозначном соответствии с интервалами разбиения Фарея порядка n, то есть разбиением отрезка $[0;1]$, порожденным несократимыми рациональными дробями вида $\frac{a}{b}$ со знаменателем $0 < b \leqslant n$. Доказательство основано на одной теореме В. Т. Шош, позволяющей вычислить всю перестановку $\pi_{\alpha,n}$ через $\pi_{\alpha,n}(1)$ и $\pi_{\alpha,n}(n)$. Также используется тот факт, что концы интервалов разбиения Фарея совпадают с точками разрыва функций $\{k\alpha\}-\{l\alpha\}$. В качестве приложения показано, что среди перестановок $\pi_{\alpha,n}$ при фиксированном n имеется ровно $1+\sum_{k=2}^{n}\varphi(k)$ различных. Еще один результат утверждает, что перестановка $\pi_{\alpha,n}$ однозначно определяет перестановки $\pi_{\alpha,m}$ с $n < m < \pi_{\alpha,n}(1)+\pi_{\alpha,n}(n)$ и не определяет однозначно перестановку $\pi_{\alpha,m}$ с $m = \pi_{\alpha,n}(1)+\pi_{\alpha,n}(n)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты $\mathcal{N}$ 14-01-00360-a, $\mathcal{N}$ 12-01-33080-мол_а_вед.

Ключевые слова: дробные доли, перестановки, последовательность Фарея.

FAREY FRACTIONS AND PERMUTATIONS GENERATED BY FRACTIONAL PARTS $\{i\alpha\}$

A. V. Shutov (Vladimir)

Abstract

Let $\alpha \in (0;1)$ be an irrational number. Study of the distribution of fractional parts $\{i\alpha\}$ on the interval $(0;1)$ is a classical question in number theory. In particular, H.Weyl proved that this sequence is uniformity distributed modulo 1. Since this work, various estimates for the remainder term of the asymptotic formula for the number of the sequence of points belonging to a given interval are actively investigated. Another type of problems about considered sequence are problems associated with the famous three lenghts theorem (Steinhaus conjecture), which state that a tiling of the unit interval generated by the points of the sequence, composed of intervals of two or three different lengths. Moreover, in the second case the length of the greatest inteval exactly equals the sum of the lengths of two other intervals. It was find out that the geometry of these tilings is closely connected with the first return maps for circle rotations, Hecke-Kesten problem on bounded remainder sets, combinatorics of Sturmian sequences, dynamics of two-color rotations of the circle , and some other problems.

This paper deals to combinatorial properties of the sequence $\{i\alpha\}$, such as permutations $\pi_{\alpha,n}$, generated by the points $\{i\alpha\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. It is proved that there is a one-to-one correspondence between these permutations and the intervals of Farey tilings of the level n. Here Farey tiling of the level n is a tiling of the interval $[0;1]$ generated by irreducible rational fractions of the form $\frac{a}{b}$ with denominator $0 < b \leqslant n$. The proof is based on one theorem of V.T.Sos, that allows to compute the permutation $\pi_{\alpha,n}$ using only $\pi_{\alpha,n}(1)$ and $\pi_{\alpha,n}(n)$. Also we use the fact that the ends of intervals of the Farey coincide with the points of discontinuity of the functions $\{k\alpha\}-\{l\alpha\}$. As an application it is proved that there are exactly $1 + \sum_{k=2}^{n} \varphi(k)$ different permutations $\pi_{\alpha,n}$ for any fixed n. Another our result states that the permutation $\pi_{\alpha,n}$ uniquely determines permutations $\pi_{\alpha,m}$ with $n < m < \pi_{\alpha,n}(1) + \pi_{\alpha,n}(n)$ and does not uniquely determine the permutation $\pi_{\alpha,m}$ with $m = \pi_{\alpha,n}(1) + \pi_{\alpha,n}(n)$.

Keywords: fractional parts, permutations, Farey sequence.

1. Введение

Пусть $\alpha \in (0;1)$ – иррационально. Распределению дробных долей $\{i\alpha\}$ на интервале $(0;1)$ посвящено огромное количество работ. В частности, знаменитая работа Г. Вейля [27] породила огромное число исследований, связанных с количественным анализом остаточного члена асимптотческой формулы для числа точек вида $\{i\alpha\}$, попавщих в заданный интервал. В качестве примеров можно назвать работы [6]-[14], [19]-[20],[24] и т.д.

С другой стороны, активно изучался геометрический аспект взаимного расположения точек $\{i\alpha\}$. В частности, существует знаменитая теорема о трех длинах, утверждающая что разбиение отрезка $[0;1]$, порожденное точками $\{i\alpha\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ состоит из отрезков двух или трех различных длин, причем в последнем случае длина наибольшего отрезка в точности равна сумме длин двух оставшихся [12], [21]-[23]. Более подробно геометрия соответствующих разбиений, называемых обобщенными разбиениями Фибоначчи, изучалась в работах [3], [4], [11], [21] и т.д. В работе [10] рассмотрена связь данных разбиений с отображениями первого возвращения для поворота окружности. В работах [6]–[8], [24] рассмотрены приложения данных разбиений к оценкам остаточного члена проблемы распределения дробных долей линейной функции, в частности к проблеме Гекке-Кестена о множествах ограниченного остатка [19], [20]. Также известны приложения рассматриваемых разбиений к динамике двухцветного поворота окружности [2], системам счисления типа Островского-Цеккендорфа [11], комбинаторике последовательностей Штурма [9] и т.д.

Настоящая работа посвящена комбинаторным свойствам последовательности $\{i\alpha\}$, а именно перестановкам, порожденным точками $\{i\alpha\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $\pi_{\alpha,n}$ – перестановка, упорядовачивающая дробные доли $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$, то есть

$$0 < \{\pi_{\alpha,n}(1)\alpha\} < \{\pi_{\alpha,n}(2)\alpha\} < \ldots < \{\pi_{\alpha,n}(n)\alpha\} < 1.$$

Изучению перестановок $\pi_{\alpha,n}$ посвящены работы [5], [15] – [16], [22], [25]. В работе [25] показано, что перестановка $\pi_{\alpha,n}$ однозначно определяется значениями $\pi_{\alpha,n}(1)$ и $\pi_{\alpha,n}(n)$. Альтернативное доказательство дано в работе [22]. В [5] рассмотрен вопрос продолжимости перестановки $\pi_{\alpha,n}$ до перестановки $\pi_{\alpha,m}$ с $m > n$. Доказательство работы [5] содержит пробелы, которые впрочем могут быть устранены с помощью результатов из [25]. В работе [15] методом линейного програмивания исследованы наибольшие возрастающие подпоследовательности перестановки $\pi_{\alpha,n}$. Наконец, в [16] получены изучены порядок и знак перестановки $\pi_{\alpha,n}$.

Последовательностью Фарея порядка n [17] будем называть множество несократимых рациональных дробей вида $\frac{a}{b}$ со знаменателем $0 < b \leqslant n$, принадлежащих отрезку $[0;1]$ и расположенных в порядке возрастания. Через F^n обозначим разбиение отрезка $[0;1]$ точками последовательности Фарея порядка n, а через F_i^n – интервалы этого разбиения.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Перестановки $\pi_{\alpha,n}$ и $\pi_{\beta,n}$ совпадают тогда и только тогда, когда $\alpha, \beta \in F_i^n$ для некоторого i.*

В качестве приложения доказзаны точная и асимптотическая формулы для числа перестановок вида $\pi_{\alpha,n}$ с фиксированным n и решен вопрос о возможности продолжения перестановки $\pi_{\alpha,n}$ до перестановки $\pi_{\alpha,m}$ с некоторым $m > n$.

2. Вспомогательные результаты

Нам понадобится ряд общеизвестных результатов о последовательностях Фарея, доказательства которых имеются в большинстве стандартных учебников по теории чисел, например в [1].

Теорема 2. *Пусть $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ – две соседние дроби в F^n. Тогда*
1) b и d взаимно просты;
2) $b + d > n$;
3) $bc - ad = 1$.

Теорема 3. *Пусть $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ – две соседние дроби в F^n. Тогда $\frac{x}{y} = \frac{a+c}{b+d}$.*

Дробь $\frac{a+c}{b+d}$ называют медиантой дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Теорема 4. *Число интервалов в разбиении F^n вычисляется по формуле $1 + \sum_{k=2}^{n} \varphi(k)$, где $\varphi(k)$ – функция Эйлера.*

Нам также потребуется следующий результат, доказанный в [25].

Теорема 5. *Справедливо равенство*

$$\pi_{\alpha,n}(k+1) = \pi_{\alpha,n}(k) + \pi_{\alpha,n}(1)[\pi_{\alpha,n}(k) \leqslant \pi_{\alpha,n}(n)] - \pi_{\alpha,n}(n)[n < \pi_{\alpha,n}(1) + \pi_{\alpha,n}(k)],$$

где

$$[a < b] = \begin{cases} 1, & a < b \\ 0, & a \geqslant b \end{cases}.$$

Следствие 1. *Перестановка $\pi_{\alpha,n}$ однозначно определяется значениями $\pi_{\alpha,n}(1)$ и $\pi_{\alpha,n}(n)$.*

3. Доказательство теоремы 1

Предложение 1. *Перестановка $\pi_{\alpha,n}$ является независящей от α при $\alpha \in F_i^n$.*

Доказательство. Будем рассматривать зависимость перестановки $\pi_{\alpha,n}$ от α. Для этого введем функции

$$f_{k,l}(\alpha) = \{k\alpha\} - \{l\alpha\}.$$

Очевидно, что перестановка $\pi_{\alpha,n}$ может измениться только в точках, в которых хотя бы одна из функций $f_{k,l}(\alpha)$, $1 \leqslant k, l \leqslant n$ меняет знак.

Функция $f_{k,l}$ является кусочно линейной, а следовательно и кусочно непрерывной. Таким образом, она может менять знак только в точках разрыва и нулях.

Пусть α – точка разрыва функции $f_{k,l}$. Тогда либо $\{k\alpha\} = 0$, либо $\{l\alpha\} = 0$. Иными словами, либо $k\alpha \in \mathbb{Z}$, либо $l\alpha \in \mathbb{Z}$. Отсюда легко получаем, что α есть рациональная дробь, знаменатель которой равен k или l. С учетом того, что $\alpha \in (0;1)$ и $k, l < n$, получаем, что α является элементом последовательности Фарея порядка n, то есть границей одного из интервалов F_i^n.

Пусть теперь $f_{k,l}(\alpha) = 0$. Поскольку

$$f_{k,l}(\alpha) = -f_{l,k}(\alpha),$$

без ограничения общности можно считать, что $k > l$. Имеем $\{k\alpha\} = \{l\alpha\}$, то есть $(k-l)\alpha \in \mathbb{Z}$. Таким образом, α представляет собой рациональную дробь со знаменателем $k-l$, $0 < k-l < n$, а значит является границей одного из интервалов F_i^n. $\square$

Итак, нами доказано, что перестановка $\pi_{\alpha,n}$ остается постоянной на интервалах вида F_i^n.

Для завершения доказательства теоремы 1 остается показать, что разным интервалам F_i^n соответствуют различные перестановки $\pi_{\alpha,n}$.

Предложение 2. *Пусть $\alpha \in F_i^n = (\frac{a}{b}; \frac{c}{d})$. Тогда справедливы равенства*

$$\pi_{\alpha,n}(1) = b, \tag{1}$$

$$\pi_{\alpha,n}(n) = d. \tag{2}$$

Доказательство. Равенство (1) очевидно, если $\alpha \in (\frac{a}{b}; \frac{a}{b} + \varepsilon)$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$. Для распространения равенства на весь интервал F_i^n достаточно воспользоваться предложением 1. Аналогично, равенство (2) очевидно, если $\alpha \in (\frac{c}{d} - \varepsilon; \frac{c}{d})$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$. Для распространения равенства на весь интервал F_i^n вновь достаточно воспользоваться предложением 1. $\square$

Следствие 2. *Справедиво неравенство*

$$\pi_{\alpha,n}(1) + \pi_{\alpha,n}(n) > n.$$

Доказательство. Утверждение немедленно вытекает из предложения 2 и пункта 2 теоремы 2. $\square$

В силу следствия 1 и предложения 2, для завершения доказательства теоремы 1 остается доказать, что в разбиении F^n не существует двух различных интервалов F_i^n и F_j^n таких, что $F_i^n = (\frac{a}{b}; \frac{c}{d})$ и $F_j^n = (\frac{a'}{b}; \frac{c'}{d})$.

Действительно, пусть $\frac{x}{b} < \frac{y}{d}$ – две соседние дроби последовательности Фарея порядка n. В силу теоремы 2, b и d взаимно просты и

$$by - cx = 1.$$

Последнее равенство можно рассматривать как линейное диофантово уравнение в целых числах x, y. Его общее решение имеет вид

$$x = a + kb,$$

$$y = c + kd$$

с $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда легко видеть, что дополнительные условия $0 < \frac{x}{b}, \frac{y}{d} < 1$ определяют значения x и y однозначно $(k = 0)$, что завершает доказательство теоремы 1.

Пусть теперь $\pi(n)$ – число различных перестановок вида $\pi_{\alpha,n}$.

Теорема 6. *Справедливо равенство*

$$\pi(n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \varphi(k),$$

где $\varphi(k)$ – функция Эйлера.

Доказательство. Теорема немедленно вытекает из теорем 1 и 4. □

Следствие 3. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\pi(n) \sim \frac{3}{\pi^2} n^2.$$

Доказательство. Утверждение немедленно вытекает из теоремы 6 и известной асимптотической формулы для суммы функции Эйлера (см. например [1]). □

4. Продолжимость перестановок $\pi_{\alpha,n}$

Теорема 7. *Перестановка $\pi_{\alpha,n}$ однозначно определяет перестановки $\pi_{\alpha,m}$ с $n < m < \pi_{\alpha,n}(1) + \pi_{\alpha,n}(n)$ и не определяет однозначно перестановку $\pi_{\alpha,m}$ с $m = \pi_{\alpha,n}(1) + \pi_{\alpha,n}(n)$.*

Замечание 1. *Теорема 7 впервые была доказана в работе [5]. Мы приводим более простое доказательство данной теоермы.*

Доказательство. В силу теоремы 1, перестановка $\pi_{\alpha,n}$ однозначно определяет перестановку $\pi_{\alpha,m}$ с $n < m$ тогда и только тогда, когда соотвествующий перестановке интервал F_i^n разбиения Фарея F^n не распадается на два интервала в разбиении Фарея F^m. Пусть $F_i^n = (\frac{a}{b}; \frac{c}{d})$. Тогда, с учетом теорем 3 и 4, интервал F_i^n не распадается в разбиениях F^m с $n < m < b + d$ и распадается на два интервала $(\frac{a}{b}; \frac{a+c}{b+d})$, $(\frac{a+c}{b+d}; \frac{b}{d})$ в разбиении F^{b+d}. Для завершения доказательства остается воспользоваться формулами (1) и (2). □

5. Заключение

В настоящей работе предложен новый подход к изучению перестановок $\pi_{\alpha,n}$, порожденных точками $\{i\alpha\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Основным результатом работы является построение взаимно-однозначного соответствия между рассматриваемыми перестановками и интервалами разбиения Фарея порядка n. Предложенный подход является новым и позволяет получить ряд окончательных результатов о перестановках $\pi_{\alpha,n}$. В частности, получена точная флормула для числа различных перестановок вида $\pi_{\alpha,n}$ при фиксированном n. Кроме того, получен неулучшаемый результат о возможности продолжения перестановки $\pi_{\alpha,n}$ до перестановки $\pi_{\alpha,m}$ с $m > n$.

Представляет интерес также полученная в работе асимптотическая формула для числа различных перестановок вида $\pi_{\alpha,n}$ при фиксированном n. Главный член полученной асимптотики имеет вид $\frac{3}{\pi^2}n^2$, что резко контрастирует с тем фактом, что общее число перестановок n-элементного множества равно $n!$. В настоящей работе не был рассмотрен вопрос об остаточном члене полученной асимптотики. Однако, используя полученные в работе результаты, легко видеть, что этот вопрос эквивалентен вопросу об оценке остаточного члена в асимптотике для суммы функций Эйлера. Данная задача является одной из классических задач теории чисел. Ее окончательное решение в настоящее время неизвестно, однако результаты работы [26] позволяют получить для остаточного члена оценку порядка $O(n(\log n)^{2/3}(\log\log n)^{4/3})$.

Тем не менее, в данной области остается еще целый ряд нерешенный задач. В частности, было бы интересно получить описание знака перестановки $\pi_{\alpha,n}$ в терминах соответствующего интервала разбиения Фарея. Аналогичный вопрос можно поставить и о порядке данной перестановки в симметрической группе S_n. Кроме того, хотелось бы отметить высказанную в работе [16] гипотезу, утверждающую, что для почти всех α справедлива асимптотика

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(\pi_{\alpha,n})\right| = O(\log n).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб А. А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966.

2. Журавлев В. Г. Двухцветные повороты единичной окружности // Изв. РАН. Сер. Мат. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 79–120.

3. Журавлев В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. Мат. 2007. Т. 71, вып. 2. С. 89–122.

4. Мануйлов Н. Н., Шутов А. В. Глобальный порядок разбиения окружности // "Молодеж. Образование. Экономика": сборник научных статей участ-

ников 5-ой Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов. (4 мая 2004). Ярославль: Изд. Ремдер. 2004. С. 314–320.

5. Мартынов А. В. Отношение порядка диофантового типа // Чебышевский сборник. 2001. Т. 2 С. 61–72.

6. Шутов А. В. Неоднородные диофантовы приближения и распределение дробных долей // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, вып. 6. С. 189–202.

7. Шутов А. В. О распределении дробных долей // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 3. С. 112–121.

8. Шутов А. В. О распределении дробных долей II // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. : Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Из-во Саратовского Университета. 2005. Вып 3. С. 146–158.

9. Щутов А. В. Последовательности штурма: графы Рози и форсинг // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 2. С. 128–139.

10. Шутов А. В. Производные поворотов окружности и подобие орбит // Записки научных семинаров ПОМИ. 2004. Т. 314. С. 272–284.

11. Шутов А. В. Системы счисления и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7, вып. 3. С. 110–128.

12. Alessandri P., Berthe V. Three distance theorems and combinatorics on words // L'Enseignement Mathematique. 1998. Vol. 44. P. 103–132.

13. Baxa C. Comparing the distribution of $(n\alpha)$-sequences // Acta Arithmetica. 2002. Vol. 94 P. 345–363.

14. Behnke H. Zur Theorie der diophantischen Approximationen I // Abh. Math. Sem. Hamburg. 1924. Vol. 3. P. 261–318.

15. Boyd D. W., Steele J. M. Monotone subsequences in the sequence of fractional parts of multiplies of ann irrational. // J. Reine Angew. Math. 1979. №306. P. 49=-59.

16. O'Bryant K., Sturmian Words and the Permutation that Orders Fractional Parts // Journal of Algebraic combinatoric. 2004. Vol. 19. №1. P. 91–115.

17. Farey J., On a Curious Property of Vulgar Fractions // London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. 1816. Vol. 47. P. 385.

18. Hardy G. H., Wright E. M. An introduction to the theory of numbers. Oxford: Clarendon press, 1975.

19. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math.Sem.Hamburg Univ. 1921. Vol. 5. P. 54–76.

20. Kesten H. On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. 1966. Vol. 12. P. 193–212.

21. Van Ravenstein T. The three gap theorem (Steinhaus conjecture) // Journal of the Australian Mathematical Society. 1988. Vol. 45. №3. P. 360–370.

22. Slater N. B. Gaps and steps for the sequence $n\theta \bmod 1$ // Proc.Cambridge Phil.Soc. 1967. Vol. 63. P. 1115–1123.

23. Swierczkowski S. On successive settings of an arc on the circumference of a circle // Fundam. Math. 1958. Vol. 46. P. 187–189.

24. Shutov A.V. New estimates in the Hecke-Kesten problem // Anal. Probab. Methods Number Theory. Edited by E.Manstavičisus et al. Vilnius:TEV. 2007.

25. Sos V. T. A lánktörtek egy geometriai interpretációja és alkalmazásai // Mat.Lapok. 1957. Vol. 8. P. 248–263.

26. Walfisz, A. Weyl'sche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie. Ch. 5. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1963.

27. Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. 1910. Vol. 30. P. 377–407.

Владимирский Государственный Университет
Поступило 16.02.2014