ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 2.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-49-60

Проблема построения геодезических в классе Громова – Хаусдорфа: оптимальная хаусдорфова реализация не всегда существует

А. А. Вихров

Вихров Антон Андреевич — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: Vihrov.01@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена изучению геодезических в классе метрических пространств, наделенных расстоянием Громова–Хаусдорфа. Исследование показывает, что построение линейной геодезической невозможно в общем случае, даже если рассматривать класс Громова – Хаусдорфа, отфакторизованным по нулевым расстояниям. Кроме того, установлено, что оптимальная хаусдорфова реализация разбивает метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии, на классы эквивалентности с совпадающим пополнением. Также продемонстрировано, как можно построить геодезическую в примере Хансена, используя 0-модификации. Тем не менее показано, что в общем случае невозможно построение геодезической, используя оптимальную хаусдорфову реализацию. Тем самым показано, что геодезические в классе метрических пространств имеют еще более богатую структуру и на класс метрических пространств не могут быть перенесены методы построения геодезических из пространства Громова – Хаусдорфа.

Ключевые слова: Класс Громова – Хаусдорфа, метрические пространства, Хаусдорфова реализация, метрические пространства в общем положении

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Вихров А.А. Проблема построения геодезических в классе Громова–Хаусдорва: оптимальная хаусдорфова реализация не всегда существует // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 49–60.

Эта работа выполнена с поддержкой гранта Базис номер 23-8-2-3-1.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-49-60

The problem of constructing geodesics in the Gromov–Hausdorff class: optimal Hausdorff realizations does not exists in general case

A. A. Vikhrov

Vikhrov Anton Andreevich — Lomonosov Moscow State University (Moscow)
e-mail: Vihrov.01@mail.ru

Abstract

This work is devoted to the study of geodesics in the class of metric spaces endowed with the Gromov–Hausdorff distance. The study shows that the construction of a linear geodesic is impossible in the general case, even if we consider the Gromov – Hausdorff class factored by zero distances. Moreover, it is established that the optimal Hausdorff realization divides metric spaces at zero distance into equivalence classes with matching completions. It is also demonstrated how to construct a geodesic in Hansen's example using 0-modifications. Nevertheless, it is shown that, in general, it is impossible to construct a geodesic using the optimal Hausdorff realization. This shows that geodesics in the class of metric spaces have an even richer structure, and the methods for constructing geodesics from the Gromov – Hausdorff space cannot be transferred to the class of metric spaces.

Keywords: Gromov – Hausdorff class, metric space, Hausdorff realizations, generic metric spaces, geodesics

Bibliography: 18 titles.

For citation:
Vikhrov, A.A. 2025, "The problem of constructing geodesics in the Gromov–Hausdorff class: optimal Hausdorff realizations does not exists in general case" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 49–60.

1. Введение

Симметричное отображение $d\colon X \times X \to [0,\infty]$, равное нулю на диагонали и удовлетворяющее неравенству треугольника, называется *обобщённой псевдометрикой*. Если, кроме того, функция d обращается в нуль только на диагонали, она называется *обобщённой метрикой*, а если она не принимает бесконечных значений, то она называется *метрикой*.

Расстояние Громова–Хаусдорфа измеряет степень различия между двумя метрическими пространствами. Это расстояние было введено Громовым в 1981 [6] и определялось как наименьшее расстояние Хаусдорфа между изометрическими изображениями рассматриваемых пространств. Позднее эквивалентное определение этого расстояния было дано с помощью соответствий.

В данной работе используется система аксиом, введённая фон Нейманом, Бернайсом и Гёделем, в рамках которой рассматриваются классы и собственные классы, обобщающие понятие множества. Собственный класс, состоящий из всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, обозначается $\mathcal{GH}$. На этом собственном классе естественным образом определяется расстояния Громова—Хаусдорфа. В этой работе мы не будем различать изометричные метрические пространства.

В работе [9] оптимальное соответствие между конечными метрическими пространствами использовалось для построения геодезической между произвольными компактными метрическими пространствами. Позднее, почти одновременно в [4] и [8], было доказано существование оптимального соответствия между компактными метрическими пространствами и, как следствие, геодезической между этими пространствами, порождённой оптимальным соответствием. Такие геодезические называются линейными.

Помимо определения через соответствия, существует другое определение расстояния Громова–Хаусдорфа. Оно равно точной нижней грани расстояний Хаусдорфа между различными изометрическими вложениями в объемлющие пространства. Если точная нижняя грань достигается на некотором объемлющем пространстве, то такие вложения называются оптимальной хаусдорфовой реализацией. В [15] показано, что между компактными метрическими пространствами можно построить оптимальную хаусдорфову реализацию, а по ней – геодезическую, составленную из подмножеств объемлющего пространства.

В первой части работы обсуждаются пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга. Если такие пространства неизометричны, то такие пространства назовем 0-модификациями друг друга. Если у таких пространств есть оптимальное соответствие, то они совпадают. В частности, между отрезком $[0,1]$ и интервалом $(0,1)$ оптимальное соответствие не существует. Практически очевидно, что у конечных метрических пространств нет 0-модификаций. Также известно, что пополнения всех 0-модификаций вполне ограниченных метрических пространств совпадают. Однако в общем случае семейства 0-модификаций могут иметь более богатую структуру. В работе [16] построена пара различных неограниченных полных пространств, находящихся на нулевом расстоянии друг от друга, а в работе [14] построена такая же пара, но ограниченных метрических пространств. В настоящей работе доказано, что оптимальная хаусдорфова реализация разбивает пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга, на классы метрических пространств с совпадающим пополнением. В общем случае количество этих классов больше одного, поскольку, как было отмечено выше, существуют неизометричные друг другу, полные, ограниченные или неограниченные метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга.

Известно также, что и между метрическими пространствами, находящимися на ненулевым расстоянии друг от друга, может не существовать оптимальное соответствие, см. пример 9. Однако, в этом примере можно пополнить одно из пространств так, чтобы оптимальное соответствие существовало. Пример полных метрических пространств, находящихся на строго положительном расстоянии друг от друга, между которыми нет оптимального соответствия, получен в [16], а в работе [14] построен пример таких ограниченных метрических пространств. Также в последнем примере показано, что у используемых метрических пространств отсутствуют 0-модификации, то есть, между ними, или между их 0-модификациями отсутствует линейная геодезическая. Таким образом, технологию построения линейной геодезической не получится обобщить так, чтобы её можно было провести между всеми метрическими пространствами, даже если рассматривать их с точностью до нулевого расстояния Громова—Хаусдорфа.

Как мы отметили выше, оптимальное соответствие, если оно существует, всегда позволяет построить линейную геодезическую. Очевидно, что метод построения геодезической по хаусдорфовой реализации, полученный в [15] не работает для произвольного объемлющего метрического пространства. В качестве примера можно рассмотреть одноточечное пространство, окружность и их дизъюнкнтное объединение так, чтобы получилась оптимальная хаусдорфова реализация. С другой стороны, если удалось изометрично вложить два метрических компакта в геодезическое метрическое пространство так, чтобы получилась оптимальная хаусдорфова реализация, то между ними можно построить кратчайшую геодезическую в метрике Громова–Хаусдорфа из подмножеств этого объемлющего пространства, см [15]. Возникает вопрос: всегда ли среди оптимальных хаусдорфовых реализаций имеется такая, по которой можно построить соответствующую геодезическую? На данный момент ответ на этот вопрос нам не известен, однако, даже если такой алгоритм существует, то оптимальная хаусдорфова реализация существует не обязана.

В [7] построена пара полных метрических пространств X и Y, у которых не существует оптимальной хаусдорфовой реализации. Однако, как будет показано в настоящей работе, у этих пространств существуют такие 0-модификации $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$, что между $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ оптимальная хаусдорфова реализация есть. Тем не менее мы построим такие два метрических пространства, находящиеся на конечном расстоянии Громова–Хаусдорфа, что между ними не существует хаусдорфовой реализации, у них нет 0-модификаций, тем не менее, эти пространства соединяются кратчайшей геодезической. Тем самым, существование геодезической не влечет ни существование оптимального соответствия, ни существования оптимальной хаусдорфовой реализации даже для 0-модификаций.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору А.А. Тужилину, а также доктору физико-математических наук, профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Предварительные результаты

Сначала введем несколько основных обозначения. Обозначим через $\mathbb{R}_{\geq 0}$ множество неотрицательных действительных чисел, а через $\mathbb{R}_+$ множество положительных действительных чисел. Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство и $x, y \in X$. Расстояние между точками x и y обозначается как $|xy| = \rho(x, y) = \mathrm{d}^X(x, y)$. Пусть $U_\varepsilon(a)$ — открытый шар с центром a радиуса ε и $U_\varepsilon(A) = \bigcup\limits_{a \in A} U_\varepsilon(a)$ — ε-окрестность непустого подмножества A, а $S_\varepsilon(a)$ — сфера радиуса ε с центром в точке a. Обозначим через $\#X$ мощность X и для любого $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ и метрического пространства X положим $a\,X = (X, a\,\mathrm{d}^X)$.

Определение 1. *Пусть A, B — непустые подмножества метрического пространства X.* ***Расстоянием Хаусдорфа*** *называется следующая величина*

$$\mathrm{d}_H^X(A, B) = \inf\Big\{r\colon A \subset U_r(B)\,\&\, B \subset U_r(A)\Big\}.$$

Определение 2. *Пусть A, B, X — метрические пространства. Если A изометрично $\tilde{A}$ и B изометрично $\tilde{B}$, где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — подпространства X, то тройку $(\tilde{A}, \tilde{B}, X)$ называют* ***реализацией пары*** *(A, B).*

Определение 3. ***Расстояние Громова–Хаусдорфа*** *между двумя метрическими пространствами A, B — это нижняя грань хаусдорфовых расстояний среди всех реализаций пары (A, B). Другими словами,*

$$\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(A, B) = \inf\big\{r : \text{существует реализация } (\tilde{A}, \tilde{B}, X) \text{ пары } (A, B), \text{ что } d_H(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq r\big\}.$$

Определение 4. ***Соответствием*** *между двумя множествами A и B называется такое подмножество $R \subset A\chi B$, что для любых $a \in A$ и $b \in B$ существует $\tilde{a} \in A$ и $\tilde{b} \in B$, для которых $(a, \tilde{b})$, $(\tilde{a}, b)$ принадлежат R.*

Далее, aRb означает, что a и b находятся в соответствии R, а множество всех соответствий между метрическими пространствами A, B обозначается как $\mathcal{R}(A, B)$.

Определение 5. *Пусть R — соответствие между метрическими пространствами A, B. Его* ***искажение*** *определяется выражением*

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big|d_X(a, a') - d_Y(b, b')\big|\colon\ aRb \ \text{ и } \ a'R'\Big\}.$$

Предложение 8 ([1]). *Для любых метрических пространств A и B справедливо равенство:*

$$2\,\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(A,B) = \inf_{R\in\mathcal{R}(A,B)} \operatorname{dis} R.$$

Определение 6. *Если искажение соответствия R минимально с точки зрения включения среди всех соответствий $\mathbb{R}(A,B)$, то оно называется* ***неприводимым***. *В случае, если выполнено $dis(R) = 2\,\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(A,B) < \infty$, то такое соответствие называется* ***оптимальным***. *Множество оптимальных соответствий между метрическими пространствами A, B обозначается как $\mathbb{R}_{opt}(A,B)$.*

Определение 7. *Диаметром метрического пространства A называется величина*

$$\operatorname{diam}(A) = \operatorname{supp} a, a' \in Ad(a,a')$$

Предложение 9 ([1]). *Для произвольных ограниченных A, B имеем следующие неравенства:*

$$\bigl|\operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B)\bigr| \le 2\,\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(A,B) \le \max\bigl(\operatorname{diam}(A), \operatorname{diam}(B)\bigr)$$

В данной работе кратчайшие кривые называются геодезическими.

Теорема 1 ([8]). *Если R — оптимальное соответствие между метрическими пространствами A и B, то кривая $\gamma : [0,1] \to \mathcal{GH}$, где $\gamma(t) = (R, d_t)$ и $d_t((a,b),(a',b')) = (1-t)d_A(a,a') + t\,\mathrm{d}^B(b,b')$, — геодезическая, соединяющая метрические пространства A, B.*

Такие геодезические принято называть ***линейными***.

Определение 8. ***Класс Громова–Хаусдорфа*** *$\mathcal{GH}$ является собственным классом (в смысле теории множеств фон Неймана–Бернейса–Гёделя) всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.*

Теорема 2 ([1]). *Расстояние Громова–Хаусдорфа является обобщенной псевдометрикой на $\mathcal{GH}$.*

Через $\triangle_n$ обозначим n-точечный ***симплекс***, т.е. такое метрическое пространство мощности n, что расстояния между различными его точками равны 1.

Определение 9. ***Оптимальной хаусдорфовой реализацией*** *двух метрических пространств A, B будем называть такую тройку $(X, \tilde{A}, \tilde{B})$, реализующую пару A, B, что $\mathrm{d}_H^X(A,B) = \mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(A,B)$. Если расстояние Громова–Хаусдорфа не совпадает с расстоянием Хаусдорфа между $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, то мы называем такую тройку* ***хаусдорфовой реализацией***. *В дальнейшем мы будем опускать $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, если изометрические копии пространств A и B понятны из контекста.*

Заметим, что изометричное вложение $\varphi\colon A \to B$ также задает хаусдорфову реализацию, где $X = B$.

Определение 10. ***Спектр*** *метрического пространства – это совокупность всех расстояний между точками (включая нулевое).*

2.1. Пространства общего положения

Определение 11. *Пусть $X \in \mathcal{GH}$. Обозначим через $S(X)$ множество всех биективных отображений X в себя. Введем следующие обозначения:*

$$\sigma(X) = \inf\left\{|xx'| \mid x \neq x';\ x, x' \in X\right\},$$
$$\mathrm{t}(X) = \inf\left\{|xx'| + |x'x''| - |xx''| \mid x \neq x' \neq x'' \neq x; x, x', x'' \in X\right\},$$
$$\varepsilon(X) = \inf\left\{\mathrm{dis}(f) \mid f \in S(X), f \neq id\right\},$$
$$\varepsilon'(X) = \inf\left\{\mathrm{dis}(f) \mid f \in S(X) \setminus ISO(X)\right\}.$$

Определение 12. ***Пространство общего положения** — это метрическое пространство X, в котором $\sigma(X)$, $\mathrm{t}(X)$, $\varepsilon(X)$ положительны.*

Определение 13. ***Пространство обобщенного общего положения** — это метрическое пространство X, в котором $\sigma(X), \varepsilon'(X)$ положительны.*

Теорема 3 ([10]). *Если пространство M удовлетворяет условиям $\varepsilon(M) > 0$ и $\sigma(M) > 0$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ такого, что $\varepsilon < \sigma(M)/4$, $\varepsilon < \varepsilon(M)/4$, метрического пространства X и соответствия $R \in \mathcal{R}(M, X)$, для которых выполнено $\mathrm{dis}(R) < 2\varepsilon$, R является оптимальным соответствием.*

Замечание 9. *Теорема 3 остается верной, если вместо $e(M)$ рассматривать $e'(M)$. Чтобы доказать это, достаточно заметить, что соответствия, отличающиеся изометрией пространства M, имеют одинаковые искажения. Таким образом, условие отделения от тожественного для всех нетождественных отображений можно заменить условием отделения от изометрии, которое совпадает с условием $\varepsilon'(M) > 0$.*

3. Про 0-модификации

Начнем с определения.

Определение 14. *Метрическое пространство Z называется 0-**модификацией** метрического пространства X, если $\mathrm{d_{GH}}(Z, X) = 0$ и $X \neq Z$.*

У компактных метрических пространств 0-модификации практически очевидны.

Теорема 4 ([14]). *Пространство Y является 0-модификацией компактного метрического пространства X тогда и только тогда, когда $\overline{Y} = X$, где $\overline{Y}$ — пополнение метрического пространства Y.*

Заметим, что если пополнение метрического пространства X конечно, то и пространство X конечно. Следовательно, имеем следующую теорему.

Следствие 1. *Конечные метрические пространства не имеют 0-модификаций.*

Предложение 10. *Если пространство M удовлетворяет условиям $\varepsilon'(M) > 0$ и $\sigma(M) > 0$, то множество его 0-модификаций пусто.*

Доказательство. Предположим противное, пусть M' является 0-модификацией. Воспользуемся замечанием 9, положив $X = M'$, и искажение R с достаточно малым искажением (такое существует, так как расстояние между ними равно нулю). Значит, между M и M' существует оптимальное соответствие, то есть, соответствие с искажением равным нулю. Следовательно, пространства M и M' изометричны. Противоречие. □ Заметим, что расстояние

Громова–Хаусдорфа между метрическим пространством и его пополнением равно нулю. Следовательно, для достаточно большого класса метрических пространств существует несчетное число 0-модификаций, в частности, если из интервала $(0,1)$ убрать разное количество рациональных точек, то получатся неизометричные пространства (количество компонент линейной связности будет различно), а расстояние между ними, как и расстояние между интервалом и интервалом без точек, будет равно нулю. Теперь выясним, между какими 0-модификациями существует оптимальное соответствие, а между какими существует оптимальная хаусдорфова реализация.

Предложение 11. *Если между пространствами, находящихся на нулевом расстоянии Громова–Хаусдорф а существует оптимальное соответствие, то они изометричны.*

Доказательство. Это утверждение практически очевидно. Действительно, если существует оптимальное соответствие, то его искажение равно нулю и оно является изометрией. В частности, оно является биекцией, так как если двум различным точкам соответствуют различные, то искажение соответствия будет строго больше нуля. $\square$

Теорема 5. *Между двумя метрическими пространствами, находящимися на нулевом расстоянии, существует оптимальная хаусдорфова реализация тогда и только тогда, когда их пополнения изометричны. В частности, между неизометричными полными пространствами, находящимися на нулевом расстоянии, не существует оптимальной хаусдорфовой реализации.*

Доказательство. Рассмотрим оптимальную хаусдорфову реализацию X, и пополним ее, получив X'. Тем самым мы пополнили $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, получив $\tilde{A}'$ и $\tilde{B}'$ лежащие в X'. Для каждой точки a из $\tilde{A}$ существует последовательность точек $a_n \in \tilde{A}$, для которых верно $\mathrm{d}^{X'}(a_n, a) \le 1/n$. Так как $\mathrm{d}_H^X(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mathrm{d}_H^{X'}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0$, то существует последовательность точек $b_n \in \tilde{B} \subseteq B$, для которых верно $\mathrm{d}^{X'}(a_n, b_n) \le 1/n$, в силу неравенства треугольника, имеем $\mathrm{d}^{X'}(a, b_n) < 2/n$. То есть, b_n сходится, а так как $\tilde{B}'$ полное, то сходится к некоторой точке $b \in \tilde{B}'$, причем $\mathrm{d}^{X'}(a, b) = 0$. Мы доказали, что для каждой точки из $\tilde{B}'$ существует точка из B на нулевом расстоянии, аналогично доказывается для B. $\square$ Таким образом, все метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии Громова–Хаусдорфа друг от друга, разбиваются на классы эквивалентности так, что между любыми двумя элементами из одного класса существует оптимальная Хаусдорфова реализация, а между различными – нет.

4. Преимущества хаусдорфовой реализации над соответствиями

Для начала напомним, что существование оптимального соответствия влечет существование оптимальной хаусдорфовой реализации.

Предложение 12 ([1]). *Если существует оптимальное соответствие между двумя метрическими пространствами, то существует и оптимальная хаусдорфова реализация.*

Пример двух метрических пространств, между которыми не существует оптимального соответствия, но существует оптимальная хаусдорфова реализация практически очевиден — достаточно взять некоторое неполное метрическое пространство и его пополнение. Если между ними существует оптимальное соответствие, то они изометричны, что неверно (хотя бы потому, что одно из них полное, а другое нет). Тем не менее каноническое вложение исходного пространства в его пополнение представляет собой оптимальную хаусдорфову реализацию.

Теперь покажем, что существует пара метрических пространств, находящихся на ненулевом расстоянии Громова–Хаусдорфа, между которыми существует оптимальная хаусдорфова реализация, но не существует оптимального соответствия.

Замечание 1. *Пусть* $A = (0,1)$, *а* $B = [0,2]$, *со стандартной метрикой вещественной прямой. По формуле* (9) *имеем* $\mathrm{d_{GH}}(A,B) \geq 1/2|\operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B)| = 1/2$. *Рассмотрим вложение* $(0,1) \to [0,2]$, $t \to t + 1/2$, *оно, как уже обсуждалось выше, задает хаусдорфову реализацию. Обозначим это пространство через* X. *Тогда* $\mathrm{d}_H^X(A,B) = 1/2$, *следовательно,* $\mathrm{d_{GH}}(A,B) = 1/2$ *и указанная хаусдорфова реализация является оптимальной. Пусть существует оптимальное соответствие* R *между* A *и* B. *Тогда рассмотрим точки* a *и* a' *из* A, *для которых верно* aRb_0 *и* $a'Rb_2$, *где* b_0 *и* b_2 *— это крайние точки из* B. *Тогда получаем* $\operatorname{dis}(R) \geq \big||b_0b_2| - |aa'|\big| > |2-1| = 1$ *(последний знак строгий, так как равенство* $|aa'| = 1$ *не достигается ни на каких точках из* A*). Получили противоречие, так как* $1 < \operatorname{dis}(R) = 1 = 2\,\mathrm{d_{GH}}(A,B)$.

Отмечу, что существование полных метрических пространств, удовлетворяющих примеру 1 является открытым вопросом.

Замечание 2. *Может показаться, что в общем случае верен следующий факт: Пусть* X,Y *– два компактных метрических пространства, а* X' *таково, что его пополнение совпадает с* X, *но* $X \neq X'$ *с точностью до изометрии. Тогда между* X' *и* Y *не существует оптимального соответствия. Однако, этот факт неверен в общем случае: достаточно рассмотреть* $Y = \triangle_1$ *и* X *– произвольное компактное метрическое пространство, для которого существует* X', *обсуждавшийся выше. Но для любого метрического пространства* Z, *множество оптимальных соответствий* $\mathbb{R}_{opt}(\triangle_1, Z)$ *непусто.*

4.1. Пример Хансена

Хансен показал, что существует пара метрических пространств, между которыми не существует оптимальной хаусдорфовой реализации. Покажем, что в его случае геодезическая может быть построена с использованием 0-модификаций. Для начала напомним результат Хансена.

Замечание 3 ([7]). *Не существует оптимальной хаусдорфовой реализации для пространств* N *и* M, *где* $M = 3\triangle_2$, *а* $N = \{\mathbb{N}, \mathrm{d}^N\}$, *где* $\mathrm{d}^N(i,j) = 1 - 2^{-max(i,j)}$ *для* $i \neq j$. *Более того,* $\mathrm{d_{GH}}(N,M) = 1$.

Теперь построим такую 0-модификацию пространства N, что между модифицированным пространством и M существует не только оптимальная хаусдорфова реализация, но и оптимальное соответствие.

Предложение 13. *Существует такое метрическое пространство* $\tilde{N}$, *что* $\mathrm{d_{GH}}(N,\tilde{N}) = 0$ *и множество оптимальных соответствий* $\mathbb{R}_{opt}(\tilde{N}, M)$ *не является пустым.*

Доказательство. Будем строить $\tilde{N}$ вида $\big\{\mathbb{N} \cup \{p\}, \tilde{\mathrm{d}}\big\}$, где $\tilde{\mathrm{d}}\ |_{\mathbb{N}} = \mathrm{d}^N$ из примера 3, а $\tilde{\mathrm{d}}(p,i) = 1$ для всех $i \in N$. Это действительно будет метрическим пространством, так как все ненулевые расстояния лежат в отрезке $[1/2, 1]$. Покажем, что расстояние между N и $\tilde{N}$ равно нулю. Рассмотрим следующее соответствие между N и $\tilde{N}$: $R_n = \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup}(i,i) \cup (n,p)$. Его искажение

$$\operatorname{dis}(R_n) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\big|\tilde{\mathrm{d}}(p,i) - \mathrm{d}^N(n,i)\big| = \sup_{i\in\mathbb{N}}\big|1 - (1 - 2^{-max(n,i)})\big| = 2^{-n}.$$

Получаем $\operatorname{dis}(R_n) \to 0$, когда $n \to \infty$. То есть, $\mathrm{d_{GH}}(N,\tilde{N}) = 0$. В силу неравенства треугольника, $\mathrm{d_{GH}}(\tilde{N},M) = \mathrm{d_{GH}}(N,M) = 1$. Наконец, построим оптимальное соответствие между $\tilde{N}$ и

$M = \{p_1, p_2\}$. Рассмотрим $R = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{(p_1, i)\} \cup \{(p_2, p)\}$. Имеем

$$\operatorname{dis}(R) = \max\Big(\sup_{i,j \in \mathbb{N}} \big|\mathrm{d}^M(p_1,p_1) - d_{\tilde N}(i,j)\big|, \sup_{k \in \mathbb{N}} \big|\mathrm{d}^M(p_1,p_2) - d_{\tilde N}(p,k)\big|\Big) =$$
$$= \max\Big(\sup_{i,j \in \mathbb{N}} \big|0 - (1 - 2^{-max(i,j)})\big|, \sup_{k \in \mathbb{N}} \big|3 - 1\big|\Big) = 2.$$

То есть $R \in \mathbb{R}_{opt}(\tilde N, M)$, так как $\operatorname{dis}(R) = 2\,\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(\tilde N, M) = 2$. Предложение доказано. □ Отмечу, что в этом примере также построена пара полных неизометричных метрических пространств N и $\tilde N$, находящихся на нулевом расстоянии. Может показаться, что для каждой пары пространств можно подобрать их 0-модификации так, чтобы между ними существовало оптимальное соответствие и между ними можно было построить геодезическую. Однако, в работе [14] показана неверность данного предположения.

4.2. Расширение примера Хансена

Покажем, что существуют такие пространства A и B, что

(1) $\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(A,B) > 0$,

(2) для любых A' и B', $\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(A,A') = 0$ и $\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(B,B') = 0$, выполнено $H_{opt}(A',B') = \emptyset$.

Докажем, что построенные в [14] пространства удовлетворяют указанным выше свойствам.

Алгоритм 1. *Пространством A является $\triangle_2$. Пространство B строится следующим образом. Возьмем $C = (\mathbb{N}, \mathrm{d}^C)$, где*

$$d_C(i,j) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1/4 - 1/2^{\max(i,j)+2}, & i \neq j. \end{cases}$$

Пространство B получается из пространства C добавлением для каждой пары $i < j$ новой точки $p_{i,j}$, а расстояние от этой точки для других точек равно

(1) $\mathrm{d}^B(p_{i,j}, j) = \delta$,

(2) $\mathrm{d}^B(p_{i,j}, i) = \mathrm{d}^C(i,j) - \delta$,

(3) $\mathrm{d}^B(p_{i,j}, k) = \mathrm{d}^C(j,k) + \delta$ *для* $k \notin \{i,j\}$,

(4) $\mathrm{d}^B(p_{i,j}, p_{k,l}) = \mathrm{d}^C(l,j) + 2\delta$ *для* $j \neq k$, $i \neq l$ *и* $p_{i,j} \neq p_{k,l}$,

(5) $\mathrm{d}^B(p_{i,j}, p_{j,l}) = \mathrm{d}^C(j,l)$,

где $\delta = 1/2023$. В работе [14] показано, что

(1) d^B *является метрикой,*

(2) $\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(A,B) = 3/8 + \delta/2$,

(3) *не существует 0-модификаций A и B.*

Теорема 6. *Не существует оптимальных хаусдорфовых реализаций для пространств A и B, построенных выше.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть E — искомая реализация и $A = \{u, v\}$. Так как $\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{E}}(A, B) = 3/8 + \delta/2$, то у каждой точки из B должна быть точка из A на расстоянии, не превышающем $3/8 + \delta/2$.

Если для некоторой точки $p \in B$ верно, что $\mathrm{d}^E(p, u) \le 3/8 + \delta/2$, то в силу неравенства треугольника выполнено неравенство $\mathrm{d}^E(p, v) \ge 1 - (3/8 + \delta/2) > 3/8 + \delta/2$. Значит, у каждой точки из B существует ровно одна точка из A на расстоянии не превышающем $3/8 + \delta/2$, а оставшаяся точка из A будет находиться на расстоянии не меньшем, чем $5/8 - \delta/2$. То есть, все точки из B разбиваются на два класса: $\{p \in B\colon\ \mathrm{d}^E(p, u) \le 3/8 + \delta\}$ и $\{p \in B\colon\ \mathrm{d}^E(p, v) \le 3/8 + \delta\}$, причем эти два класса не пересекаются.

Под i, j, k будем обозначать произвольные точки из C. Пусть, без ограничения общности, для $1 \in C \subset B$ выполнено $\mathrm{d}^E(1, u) \le 3/8 + \delta/2$. Покажем, что если $d(i, u) \le 3/8 + \delta/2$, то для любого $p_{i,j} \in B$ верно $d(p_{i,j}, u) \le 3/8 + \delta/2$. Предположим обратное, то есть $d(p_{i,j}, v) \le 3/8 + \delta/2$, тогда

$$1 = d(u, v) \le d(u, i) + d(i, p_{i,j}) + d(p_{i,j}, v) \le 3/8 + \delta/2 + (1/4 - 2^{-j-2}) - \delta + 3/8 + \delta/2 < 1,$$

противоречие.

Покажем теперь, что если $d(u, p_{i,j}) \le 3/8 + \delta/2$, то и $d(u, j) \le 3/8 + \delta/2$. Действительно, если $d(u, j) > 3/8 + \delta/2$, то $d(v, j) \le 3/8 + \delta/2$. Однако,

$$1 = d(u, v) \le d(u, p_{i,j}) + d(p_{i,j}, j) + d(j, v) \le 3/8 + \delta/2 + \delta + 3/8 + \delta/2 < 1,$$

противоречие.

Получаем, что для каждой точки $b \in B$ верно неравенство $d(u, b) \le 3/8 + \delta/2$. Следовательно, для каждой точки $b \in B$ выполнено $d(v, b) \ge 5/8 - \delta/2$, поэтому такой оптимальной реализации не существует. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Burago D., Burago Y., Ivanov S. A course in metric geometry. Providence: American Mathematical Society, 2021. 416 p. (Graduate Studies in Mathematics; vol. 33).

2. Blumenthal L. Theory and applications of distance geometry // The Mathematical Gazette. 1954. Vol. 38, no. 324. P. 213-220.

3. Chikin V.M. Functions preserving metrics, and Gromov-Hausdorff space // Moscow University Mathematics Bulletin. 2021. Vol. 76. P. 154-160.

4. Chowdhury S., Mémoli F. Explicit geodesics in Gromov-Hausdorff space // Electronic Research Announcements. 2018. Vol. 25. P. 48-59.

5. Bogataya S.I., Bogatyy S.A., Redkozubov V.V., Tuzhilin A.A. Gromov-Hausdorff class: its completeness and cloud geometry // Topology and its Applications. 2023. Vol. 329. P. 108771.

6. Gromov M. Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Paris: CEDIC, 1981. 120 p.

7. Hansen J. Is Gromov Hausdorff distance realized when one space is compact? // Math Stack Exchange. 2022. URL: https://math.stackexchange.com/questions/4552398 (дата обращения: 22.11.2024).

8. Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. Realizations of Gromov-Hausdorff distance // ArXiv e-prints. 2016. arXiv:1603.08850 [math.MG].

9. Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. The Gromov-Hausdorff metric on the space of compact metric spaces is strictly intrinsic // Mathematical Notes. 2016. Vol. 100, no. 6. P. 883-885.

10. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Isometric embeddings of bounded metric spaces into the Gromov-Hausdorff class // Sbornik: Mathematics. 2022. Vol. 213, no. 10. P. 1400-1414.

11. Grigorjev D.S., Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Gromov-Hausdorff distance to simplexes // Chebyshevskii Sbornik. 2019. Vol. 20, no. 2. P. 100-114.

12. Borsík J., Doboš J. On metric preserving functions // Real Analysis Exchange. 1988. Vol. 13, no. 2. P. 285-293.

13. Vikhrov A. Denseness of metric spaces in general position in the Gromov-Hausdorff class // Topology and its Applications. 2024. Vol. 342. P. 108771.

14. Vikhrov A. Geometry of linear and nonlinear geodesics in the proper Gromov-Hausdorff class // Matematički Vesnik. 2024. Vol. 76, no. 1. P. 1-15.

15. Mémoli F., Wan Z. Characterization of Gromov-type geodesics // Differential Geometry and its Applications. 2023. Vol. 88. P. 102006. DOI: 10.1016/j.difgeo.2023.102006.

16. Ghanaat P. Gromov-Hausdorff distance and applications // Metric Geometry Les Diablerets. 2013. 25-30 August. P. 1-15.

REFERENCES

1. Burago, D, Burago, Y, and Ivanov, S. 2021, *A course in metric geometry.* Graduate Studies in Mathematics, 33. Providence, RI: American Mathematical Society.

2. Blumenthal, L. 1954, “Theory and applications of distance geometry”, *The Mathematical Gazette*, 38(216).

3. Chikin, V.M. 2021, “Functions preserving metrics, and Gromov–Hausdorff space”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 76, pp. 154–160.

4. Chowdhury, S. and Mémoli, F. 2018, “Explicit geodesics in Gromov–Hausdorff space”, *Electronic Research Announcement*, 25, pp. 48–59.

5. Bogataya, S.I., Bogatyy, S.A., Redkozubov, V.V. and Tuzhilin, A.A. 2023, “Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry”, *Topology and its Applications*, 329.

6. Gromov, M. 1981, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes.* Textes Mathématiques, no. 1. Paris: CEDIC.

7. Hansen, J. (n.d.). “Is Gromov–Hausdorff distance realized when one space is compact?“”, *Math Stack Exchange.* Available at: https://math.stackexchange.com/questions/4552398/is-gromov-hausdorff-distance-realized-when-one-space-is-compact. (Accessed: 22 November 2024).

8. Ivanov, A.O., Iliadis, S. and Tuzhilin, A.A. 2016, “Realizations of Gromov–Hausdorff distance”, *ArXiv e-prints*, arXiv:1603.08850.

9. Ivanov, A.O., Nikolaeva, N.K. and Tuzhilin, A.A. 2016, “The Gromov–Hausdorff metric on the space of compact metric spaces is strictly intrinsic”, *Mathematical Notes*, 100, pp. 883–885.

10. Ivanov, A.O. and Tuzhilin, A.A. 2022, "Isometric embeddings of bounded metric spaces into the Gromov–Hausdorff class", *Sbornik: Mathematics*, 213(10), pp. 1400–1414.

11. Grigorjev, D.S., Ivanov, A.O. and Tuzhilin, A.A. 2019, "Gromov–Hausdorff distance to simplexes", *Chebyshevskii Sbornik*, 20(2), pp. 100–114.

12. Borsík, J. and Doboš, J. 1988, "On metric preserving functions", *Real Analysis Exchange*.

13. Vikhrov, A. 2024, "Denseness of metric spaces in general position in the Gromov–Hausdorff class", *Topology and its Applications*, 342.

14. Vikhrov, A. 2024, "Geometry of linear and nonlinear geodesics in the proper Gromov–Hausdorff class", *MATEMATIČKI VESNIK*, 342.

15. Mémoli, F. and Wan, Z. 2023, "Characterization of Gromov-type geodesics", *Differential Geometry and its Applications*, 88, Article 102006. Available at: https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2023.102006.

16. Ghanaat, P. (2013) "Gromov-Hausdorff distance and applications", *Metric Geometry Les Diablerets*, 25–30 August.

Получено: 14.12.2024
Принято в печать: 07.04.2025