

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 2.

УДК 515.163.6

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-33-48

Погружения двудольных графов и нумизматика

С. А. Богатый, С. Ф. Грубиянов

Богатый Семеон Антонович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: bogatyi@inbox.ru

Грубиянов Сергей Федорович — выпускник механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: sfg@live.ru

Аннотация

Изучаются двудольные погружения двудольного графа в плоскость с минимальным числом самопересечения. Для некоторых классов двудольных графов вычисленно минимальное число самопересечения для всех двудольных погружений. В частности описаны все графы, обладающие двудольным вложением в плоскость. Даны приложения к хронологическому упорядочению начального чекана Ширваншаха Абу Мансур Али ибн Йазида (425–435 гг.х. = 1034–1044 р.х.).

Ключевые слова: конечнократное отображение в евклидово пространство, размерность, плотное подмножество.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Богатый С.А., Грубиянов С.Ф. Погружения двудольных графов и нумизматика
Чебышёвский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 33–48.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 2.

UDC 515.163.6

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-33-48

Immersion of bipartite graphs and numismatics

S. A. Bogatyy, S. F. Grubiyarov

Bogatyy Semeon Antonovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: bogatyi@inbox.ru

Grubiyarov Sergey Fedorovich — graduate of the Faculty of Mechanics and Mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: sfg@live.ru

Abstract

Bipartite immersions of a bipartite graph into a plane with a minimum self-intersection number are studied. For some classes of bipartite graphs, the minimum self-intersection number is calculated for all bipartite immersions. In particular, all graphs with a bipartite embedding into a plane are described. Appendixes are given to the chronological ordering of the initial coinage of Shirvanshah Abu Mansur Ali bin Yazid (425-435 AH = 1034-1044 AD).

Keywords: finite-multiple mapping into Euclidean space, dimension, dense subset.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

Bogatyy, S.A., Grubiyarov, S.F. 2025, "Immersion of bipartite graphs and numismatics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 33–48.

1

1. Введение

При работе с большим объемом информации крайне полезно ее структурировать. Одним из эффективных решений может быть представление имеющихся данных в виде графа. Всякий граф можно представлять геометрически лежащим в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с прямолинейными ребрами, пересекающимися только в общих вершинах. Визуализацию графа наиболее естественно провести геометрически, т.е. вложить заданный граф в плоскость. Классическая теорема Куратовского–Понтрягина описывает все планарные графы. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подразделений полного графа с пятью вершинами K_5 и полного двудольного графа с тремя вершинами в каждой доле $K_{3,3}$.

“Промежуточными” между пространством и плоскостью являются поверхности (ориентируемые и неориентируемые) рода $g \geq 0$. Задача определения рода заданного графа является NP -трудной [1]. В настоящее время известен алгоритм, линейный по количеству вершин графа, который определяет возможность вложения графа в поверхность заданного рода g и задает это вложение при существовании такого вложения [2]. Но представление графа на поверхности лишено наглядности.

Более наглядным является вложение вершин графа в плоскость с допуском пересечения ребер графа во внутренних точках. Проблема плохой читаемости получаемого результата связана с большим количеством пересечений между рёбрами графа и требует применения алгоритмов, направленных на уменьшение числа самопересечений графа. Отправной точкой изучения числа пересечений графа стала задача Турана (Пал Туран (1910-1976) - венгерский математик) о кирпичной фабрике. Во время Второй мировой войны Пал Туран был отправлен на принудительную работу на кирпичную фабрику, где он возил вагонетки с кирпичами из печей на склады. На фабрике между любой печью и любым складом были проложены железнодорожные пути, при этом вагонетку было сложнее толкать там, где эти пути пересекались. Это вдохновило Турана на вопрос о том, как можно перерасположить пути, чтобы минимизировать число пересечений. Также известна проблема Заранкевича нахождения минимального числа пересечений при изображении на плоскости полного двудольного графа. В 1983 году было доказано, что задача нахождения минимального числа самопересечений графа является NP -трудной [3].

Данная работа посвящена двудольным графам, образующимся при построении модели соответствия штемпелей монет. Рассматриваются именно двудольные представления таких графов на плоскости. Введено минимальное число самопересечения графа при двудольном

¹ Авторы благодарят Г. Абдуллаева, Д.Э. Ибрагимова и М.С. Шабанова за помощь в работе.

погружении. Для некоторых классов двудольных графов посчитано это число и описаны оптимальные двудольные погружения (теоремы 2, 3, 5, 6, 7, 8). Это позволило дать критерий двудольной вложимости общего двудольного графа в плоскость (теорема 4) и описать графы с максимальными числами самопересечения (следствия 4, и 7). Предложен пример двудольного графа, при оптимальном двудольном погружении которого крайние (первые и последние) вершины долей не соединены ребром.

Обсуждено применение двудольного погружения к хронологическому упорядочению монет чекана Ширваншаха Абу Мансур Али ибн Йазида (425–435 гг.х. = 1034–1044 р.х.). Наш анализ основан на рассмотрении двудольного графа сопряжения сторон всех доступных нам изображений монет начального периода правления Али ибн Йазида. Здесь важно подчеркнуть следующие три момента. Мы впервые вводим в научный оборот новый тип аверса $A4$ монет Али ибн Йазида. За счет использования новых изображений монет уже известного типа удалось почти полностью восстановить реверс $R1$ ранее известного типа и отождествить его с другим ранее известным реверсом. Кроме того, с помощью новых экземпляров монет удалось полностью восстановить аверс $A2$ ранее известного типа и за счет выше отмеченного отождествления двух реверсов $R1$ с большой степенью достоверности получить, что аверс $A2$ является хронологически вторым.

Мы также сравниваем выводы, получаемые при математическом анализе двудольных графов всей известной нам информации и только ранее опубликованной информации.

Отметим, что прочтение и расшифровка текстов на древних и средневековых монетах с арабскими надписями является сложной проблемой. Спорные представления и ошибочные утверждения в этой области обсуждаются в работе [4], к которой мы и отсылаем читателя.

2. Теоретические результаты.

Для изложения результатов работы необходимы некоторые предварительные пояснения. Формулировки и доказательства некоторых из них несомненно широко известны, но для полноты изложения мы напомним их и даже частично докажем некоторые из используемых утверждений.

Для заданного (n, m) -двудольного графа $G \subset K_{n,m}$ мы хотим вычислить минимальное число самопересечения $SInt(G)$ двудольного погружения или даже описать все двудольные погружения в плоскость $f: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ с минимальным числом самопересечения $SInt(f) = SInt(G)$.

Два ребра графа называются *пересекающимися*, если они пересекаются во внутренних точках.

Вложение вершин долей в плоскость в прямые $y = 0$ и $y = 1$ порождает *двудольное вложение* графа, если никакие два ребра не пересекаются.

Вложение вершин долей в плоскость в прямые $y = 0$ и $y = 1$ порождает *двудольное погружение* графа, если никакие три ребра не пересекаются в одной (внутренней) точке.

Точки $(x_i, 0)$ на прямой $y = 0$ будем обозначать через x_i или i , точки $(x_j, 1)$ на прямой $y = 1$ будем обозначать через y_j или x_j или j , т.е. индексы соответствуют точкам на разных прямых (долях). При этом точки пронумерованы так, что $(x_{i_1} < x_{i_2})$ при $i_1 < i_2$ и $(y_{j_1} < y_{j_2})$ при $j_1 < j_2$ соответственно.

ТЕОРЕМА 1. *Всякое отображение вершин полного двудольного графа $K_{n,m}$ в прямые $y = 0$ и $y = 1$ сколь угодно малым шевелением можно превратить в такое вложение вершин, которое порождает двудольное погружение.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для двудольного погружения двудольного графа G ребра $[x_{i_1}, y_{j_1}]$ и $[x_{i_2}, y_{j_2}]$ пересекаются по внутренней точке тогда и только тогда, когда $(x_{i_2} - x_{i_1})(y_{j_2} - y_{j_1}) < 0$.*

Опишем некоторые классы двудольных графов, которые нельзя двудольно вложить в плоскость.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Всякое двудольное погружение полного графа $K_{2,2}$ имеет точно одно самопересечение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, ребра $[x_1, y_2]$ и $[x_2, y_1]$ пересекаются, а остальные пары ребер погружения графа $K_{2,2}$ не пересекаются. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Простой замкнутый цикл является двудольным графом $\iff$ цикл содержит четное число ребер.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Простой замкнутый цикл длины $2n$, $n \geq 2$, является (n, n) -двудольным графом $L(n, n)$ с $2n$ ребрами. Справедливо неравенство $\text{SInt}(L(n, n)) \leq n - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расположим точки долей в следующем порядке $x_{i_1} < x_{i_n} < x_{i_2} < x_{i_{n-1}} < x_{i_3} < x_{i_{n-2}} < \dots < x_{i_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}}$, $y_{j_n} < y_{j_1} < y_{i_{n-1}} < y_{i_3} < y_{i_{n-2}} < \dots < y_{j_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}}$. Подчеркнем, что здесь индексы вершин долей рождены не порядком их расположения на прямой, а порядком их обхода при движении по циклу. При таком упорядочении вершин в долях графа получается погружение с числом самопересечения $n - 1$. $\square$

Описанное погружение цикла $L(n, n)$ будем называть “гармошкой”.

ТЕОРЕМА 2. *Для произвольного двудольного погружения $f: L(n, n) \rightarrow \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство $\text{SInt}(f) \geq n - 1$. Причем равенство имеет место только для погружения $2n$ -цикла $L(n, n)$ “гармошкой”.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по числу $n \geq 2$. Базой индукции при $n = 2$ является следствие 1.

Индуктивный переход. Обозначим точки верхней и нижней долей в порядке возрастания $y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_{n-1} < y_n$ и $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n$ соответственно. Пусть вершина y_1 соединена ребрами с вершинами $x_l < x_k$. Пусть вершина x_l соединена ребром еще с вершиной y_r . Заменим путь (ломанную) $x_k y_1 x_l y_r$ на путь (ребро) $x_k y_r$. Возникает погружение $f_0: L(n-1, n-1) \rightarrow \mathbb{R}^2$. По индуктивному предположению $\text{SInt}(f_0) \geq n - 2$.

Покажем, что $\text{SInt}(f) > \text{SInt}(f_0)$. При погружении f ребро $x_i y_j$ графа $L(n, n)$ пересекает “появившееся” ребро $x_k y_r$ графа $L(n-1, n-1)$ тогда и только тогда, когда $(k-i)(r-j) < 0$.

Если $1 < j < r$, то $i > k$. Поэтому в этом случае ребра $x_i y_j$ и $x_l y_r$ графа $L(n, n)$ пересекаются.

Если $r < j$, то $i < k$. В этом случае ребра $x_i y_j$ и $x_l y_r$ графа $L(n, n)$ пересекаются.

“Удаленный” путь содержит “удаленную” точку пересечения ребер $x_k y_1$ и $x_l y_r$ графа $L(n, n)$, поэтому погружение f графа $L(n, n)$ имеет по крайней мере на одну точку самопересечения больше чем погружение f_0 графа $L(n-1, n-1)$.

Пусть теперь погружение f графа $L(n, n)$ имеет ровно $n - 1$ точку самопересечения. Согласно базе индукции (следствию 1) можно считать, что $n \geq 3$. Согласно вышеприведенному рассуждению погружение f_0 графа $L(n-1, n-1)$ имеет ровно $n - 2$ точки самопересечения. По индуктивному предположению погружение f_0 графа $L(n-1, n-1)$ имеет вид “гармошки”.

Если $l > 1$, то для некоторого $t > 1$ имеется ребро $x_1 y_t$, которое пересекается с ребром $x_l y_1$. Указанная точка пересечения не учитывается (отсутствует) в погружении f_0 графа $L(n-1, n-1)$. Поэтому в сделанном предположении справедливо более сильное неравенство $\text{SInt}(f) \geq \text{SInt}(f_0) + 2 = n$. Далее будем считать, что $l = 1$.

Если $k > 2$, $r > 2$, то согласно индуктивному предположению “гармошки” есть ребро $x_2 y_2$, которое дает погружению f две “лишние” точки пересечения с ребрами $x_1 y_r$ и $x_k y_1$.

Если $k > 2$, $r = 2$, то согласно индуктивному предположению “гармошки” есть ребро x_2y_2 , которое дает погружению f “лишнюю” точку пересечения с ребром x_ky_1 .

Следовательно, для оптимального погружения $l = 1$, $k = 2$, $r = 2$. Таким образом “гармошка” графа $L(n-1, n-1)$ влечет “гармошку” графа $L(n, n)$. $\square$

Обозначим через T граф, в котором из одной вершины выходят три “уса” длины 2. Ясно, что граф T является двудольным графом $T \subset K_{4,3}$, одной долей которого являются центр графа и три конца усов, а вторую долю составляют три промежуточные вершины усов.

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо равенство $\text{SInt}(T) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Погружение графа T с числом пересечения 1 построить легко. Центр графа отобразим в точку x_2 .

Один ус пустим по ребрам x_2y_1 и далее по ребру x_1y_1 .

Второй ус пустим по ребрам x_2y_2 и далее по ребру x_3y_2 .

Третий ус пустим по ребрам x_2y_3 и далее по ребру x_4y_3 .

В построенном двудольном погружении есть ровно одна точка пересечения ребер x_3y_2 и x_2y_3 .

Рассмотрим теперь произвольное двудольное погружение $f: T \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Без ограничения общности можно считать, что образом центра является точка x_1 или x_2 . Пусть образом центра является точка x_1 . Тогда усы выходят по ребрам x_1y_1 , x_1y_2 и x_1y_3 . Тогда продолжение первого уса – ребро x_1y_1 пересекается с началами двух усов, поэтому имеется не менее двух точек самопересечения.

Итак, при оптимальном погружении центр графа не может отображаться в крайние точки. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что образом центра является точка x_2 .

Рассмотрим ус, который начинается по ребру x_2y_1 . Если этот ус заканчивается по ребру x_iy_1 , $i > 2$, то это ребро пересекается с началами второго и третьего усов. Следовательно, в оптимальном погружении конец первого уса идет по ребру x_1y_1 .

Если конец второго уса идет по ребру x_4y_2 , то это ребро пересекает с обоими ребрами третьего уса. Таким образом, в оптимальном погружении конец второго уса идет по ребру x_3y_2 , которое в этом случае пересекается только с ребром начала третьего уса. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. *Доказанное утверждение можно усилить в разных направлениях. Например, можно показать, что если в графе G имеется точка порядка 3, из которой выходят “усы” длин $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ соответственно, то $\text{SInt}(G) = n_3 - 1$. Более кропотливый перебор возможных погружений позволяет показать, что для дерева G с единственной точкой ветвления порядка $r \geq 3$, из которой выходят “усы” длин $n_1 \geq \dots \geq n_r$ соответственно, имеет место равенство*

$$\text{SInt}(G) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor} (i-1)(n_{2i-1}-1) + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (i-1)(n_{2i}-1).$$

ТЕОРЕМА 4. *Двудольный граф двудольно вкладывается в плоскость тогда и только тогда, когда он не содержит ни замкнутого цикла, ни графа T .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теоремам 2 и 3 двудольно вкладываемый в плоскость граф не может содержать ни один из перечисленных графов.

Пусть теперь граф G является деревом, не содержащим графа T . Индукцией по числу вершин (ребер) графа G построим двудольное вложение.

Если $G = K_{n,1}$, то всякое вложение n точек в прямую $y = 0$ порождает двудольное вложение графа $G = K_{n,1}$ в плоскость.

Если все вершины данного дерева G имеют порядок ≤ 2 , то это змеевидный граф и он двудольно вкладывается в плоскость. Причем у него есть только два двудольных вложения, которые получаются друг из друга инверсией, т.е. сменой начала и конца.

Пусть теперь у данного дерева G есть вершины порядка ≥ 3 . Рассмотрим произвольную вершину A порядка $\text{Ord}(A) \geq 3$. Так как дерево G не содержит дерево T , то из вершины A выходит не менее чем $\text{Ord}(A) - 2 \geq 3 - 2 = 1$ висячих ребер, т.е. ребер к другим концам которых не примыкают другие ребра. Удалим из дерева G какое-нибудь висячее ребро, входящее в вершину A . Согласно индуктивному предположению полученный граф обладает двудольным вложением $f_0: G' \rightarrow \mathbb{R}^2$. Можно считать, что $G \neq K_{n,1}$. Поэтому из вершины A выходят два или одно не висячее ребро. Без ограничения общности можно считать, что вершина A принадлежит нижней доле.

Если из вершины A выходят два не висячих ребра, то при вложении f_0 эти ребра занимают крайние положения. Т.е. существует такой индекс k , что при вложении f_0 одно не висячее ребро (из вершины A) отображается в ребро $x_A y_k$, а другое не висячее ребро отображается в ребро $x_A y_{k+\text{Ord}(A)-2}$. Теперь всякая не занятая точка интервала $(y_k, y_{k+\text{Ord}(A)-2})$ определяет вложение ранее удаленного висячего ребра, что задает двудольное вложение первоначального графа G ,

Если из вершины A выходит одно не висячее ребро, то при вложении f_0 это ребро занимает крайнее положение. Без ограничения общности можно считать, что это крайнее положение является самым левым. Теперь всякая не занятая точка интервала $(y_k, +\infty)$ позволяет двудольное вложение f_0 продолжить до двудольного вложения f первоначального графа G . $\square$

Вычисление для заданного двудольного графа G инварианта $\text{SInt}(G)$ является сложной задачей. Теоремы 2 и 3 можно понимать как примеры вычисления числа самопересечения конкретных графов, они позволяют получать некоторые оценки снизу в общем случае.

Для двудольного графа G рассмотрим инвариант $k_{2,2}(G)$ – число различных подграфов графа G , которые являются полными графами $K_{2,2}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для двудольного графа G справедливо неравенство $\text{SInt}(G) \geq k_{2,2}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно следствию 1 всякий подграф $K_{2,2} \subset G$ порождает одну точку самопересечения и разные такие подграфы порождают разные точки самопересечения. $\square$

Согласно теореме 3 полученная оценка не является точной. Согласно теореме 2 для замкнутого цикла $L(n, n)$, $n \geq 2$, длины $2n$ полученная оценка верна только для $n = 2$. Ниже мы показываем, что для некоторых специальных графов оценка следствия 2 точна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для двудольного погружения полного двудольного графа $K_{n,m}$ ребро $[i, j]$, соединяющее вершины с номерами i и j верхней и нижней долей соответственно, пересекается с $S_{i,j} = (i-1)(m-j) + (n-i)(j-1)$ других ребер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 1 ребро $[i, j]$ пересекается с ребром $[i', j'] \iff (i-i')(j-j') < 0$. Таких пар $S_{i,j} = (i-1)(m-j) + (n-i)(j-1)$. $\square$

ТЕОРЕМА 5. Для всякого двудольного погружения полного двудольного графа $K_{n,m}$ число самопересечения равно

$$\text{SInt}(K_{n,m}) = k_{2,2}(K_{n,m}) = C_n^2 C_m^2 = \frac{n(n-1)m(m-1)}{4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякий подграф $K_{2,2} \subset K_{n,m}$ порождает одну точку самопересечения и всякая точка самопересечения возникает из одного подграфа $K_{2,2} \subset K_{n,m}$. $\square$

Этот же результат можно получить, если по всем ребрам $[i, j]$ просуммировать числа $S_{i,j}$: $2 \text{SInt}(K_{n,m}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S_{i,j}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для множества всех погружений полного двудольного графа без одного ребра $K_{n,m} \setminus K_{1,1}$ числа самопересечения образуют множество

$$\Pi(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) = \{C_n^2 C_m^2 - S_{i,j} : i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано погружение $f: K_{n,m} \setminus K_{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Это есть стандартное погружение полного графа $K_{n,m}$ из которого удаляется одно ребро. Если удаляется ребро $[i, j]$, то для оставшейся части полного графа число самопересечения равно $C_n^2 C_m^2 - S_{i,j}$. Рассматривая все возможные значения i и j , получаем все возможные значения числа самопересечения для всех возможных погружений. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Так как $S_{i,j} = S_{n+1-i, m+1-j}$, то можно считать, что $i = 1, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ или $j = 1, \dots, \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$. Также укажем, что при $n = 2k + 1$ для любого j справедливо равенство $S_{k+1,j} = k(m-1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. На прямоугольнике $\Pi = [-a, a] \times [-b, b] = \{(x, y) : -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$, $a, b > 0$, функция $f(x, y) = -2xy$ достигает свой максимум $2ab$ в точках $(-a, b)$ и $(a, -b)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Для любых $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ справедливо неравенство $S_{i,j} \leq S_{1,m} = S_{n,1} = (n-1)(m-1)$. Причем равенство имеет место только для указанных пар $i = 1, j = m$ и $i = n, j = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 4 для любых $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ справедливо равенство $S_{i,j} = (i-1)(m-j) + (n-i)(j-1) = (\frac{n-1}{2} + x)(\frac{m-1}{2} - y) + (\frac{n-1}{2} - x)(\frac{m-1}{2} + y) = \frac{(n-1)(m-1)}{2} - 2xy$, где $x = i - \frac{n+1}{2}, y = j - \frac{m+1}{2}$. Так как переменные x, y лежат внутри прямоугольника $[-\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}] \times [-\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2}]$, вершины которого соответствуют целым значениям $i = 1, n$ и $j = 1, m$ соответственно, то согласно предложению 6 максимальное значение величины $S_{i,j}$ достигается на парах $i = 1, j = m$ и $i = n, j = 1$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3. Для полного двудольного графа без одного ребра $G = K_{n,m} \setminus K_{1,1}$ справедливы равенства

$$\text{SInt}(G) = k_{2,2}(G) = \text{SInt}(K_{n,m}) - (n-1)(m-1) = \frac{(n-1)(m-1)(nm-4)}{4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложениям 5 и 7 имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} \text{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) &= \frac{n(n-1)m(m-1)}{4} - \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} S_{i,j} = \\ &= \frac{n(n-1)m(m-1)}{4} - (n-1)(m-1) = \frac{(n-1)(m-1)(nm-4)}{4}. \end{aligned}$$

$\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. При $n, m \geq 2$ для (n, m) -двудольного графа G следующие условия эквивалентны:

- 1) граф G является полным графом $K_{n,m}$;
- 2) для всякого двудольного погружения $f: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ число самопересечения $\text{SInt}(f) = C_n^2 C_m^2 = \frac{n(n-1)m(m-1)}{4}$;
- 3) для всякого двудольного погружения $f: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ число самопересечения $\text{SInt}(f) > \text{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) = \text{SInt}(K_{n,m}) - (n-1)(m-1) = \frac{(n-1)(m-1)(nm-4)}{4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\implies$ 2) это теорема 5.

Импликация 2) $\implies$ 3) очевидна.

3) $\implies$ 1). Если $G \neq K_{n,m}$, то $G \subset K_{n,m} \setminus K_{1,1}$ для некоторого ребра $K_{1,1}$. Получено противоречие $\text{SInt}(G) \leq \text{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1})$. $\square$

Таким образом мы видим, что в структуре чисел самопересечения всех (n, m) -двудольных графов имеются большие лакуны. Опишем скачок, возникающий при удалении второго ребра.

ТЕОРЕМА 6. *Для двудольного графа $G = K_{n,m} \setminus K_{k,l}$, $k \leq n$, $l \leq m$, имеют место равенства*

$$\text{SInt}(G) = k_{2,2}(G) = C_{n-k}^2 C_m^2 + C_n^2 C_{m-l}^2 - C_{n-k}^2 C_{m-l}^2 = C_{n-k}^2 C_m^2 + \frac{k(2n-k-1)}{2} C_{m-l}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем какое-нибудь двудольное погружение графа $K_{n,m}$. Удалим ребра полного графа $K_{k,l}$, построенного на первых k вершинах нижней доли и последних l вершинах верхней доли.

Опишем пары вершин $i_1 < i_2$ и $j_1 < j_2$, которые образуют подграф $K_{2,2}$ в графе G .

Если среди вершин i_1, i_2 нижней доли нет вершин $1, \dots, k$, то для любых двух вершин верхней доли получается полный граф типа $K_{2,2}$, который содержится в рассматриваемом графе. Таких графов ровно $C_{n-k}^2 C_m^2$.

Если среди вершин j_1, j_2 верхней доли нет вершин $m-l+1, \dots, m$, то для любых двух вершин нижней доли получается полный граф типа $K_{2,2}$, который содержится в рассматриваемом графе. Таких графов ровно $C_n^2 C_{m-l}^2$.

При этом графы с $k+1 \leq i_1$ и $j_2 \leq m-l$ учитываются дважды. Таких графов ровно $C_{n-k}^2 C_{m-l}^2$.

Если $i_1 \leq k$ и $m-l+1 \leq j_2$, то в графе G нет ребра $[i_1, j_2]$. Поэтому в этом случае две пары вершин $i_1 < i_2$ и $j_1 < j_2$ не порождают в графе G подграф $K_{2,2}$ и, более того, эти две пары вершин не порождают точку самопересечения в графе G .

Полученные утверждения сформулируем в компактной форме. Двудольный подграф в G с нижними вершинами (i_1, i_2) и верхними вершинами (j_1, j_2) является полным графом $K_{2,2}$ тогда и только тогда, когда $k < i_1, i_2$ или $j_1, j_2 < m-l+1$; и это в точности случаи точки самопересечения, рожденной в G двумя парами вершин. Графов, удовлетворяющих первому условию ровно $C_{n-k}^2 C_m^2$, графов, удовлетворяющих второму условию ровно $C_n^2 C_{m-l}^2$. Причем графов удовлетворяющих обоим условиям ровно $C_{n-k}^2 C_{m-l}^2$. Следовательно число искомым графов $C_{n-k}^2 C_m^2 + C_n^2 C_{m-l}^2 - C_{n-k}^2 C_{m-l}^2$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 5. *Для двудольного графа $G = K_{n,m} \setminus K_{1,2}$ имеют место равенства*

$$\text{SInt}(G) = k_{2,2}(G) = \text{SInt}(K_{n,m}) - (n-1)(2m-3) = \text{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) - (n-1)(m-2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\text{SInt}(G) = k_{2,2}(G) = C_{n-1}^2 C_m^2 + (n-1)C_{m-2}^2 = \frac{(n-1)(n-2)m(m-1)}{4} + (n-1)C_{m-2}^2 = \frac{n(n-1)m(m-1)}{4} - (n-1)(2m-3) = \text{SInt}(K_{n,m}) - (n-1)(2m-3) = \text{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) - (n-1)(m-2)$. $\square$

ТЕОРЕМА 7. *Для двудольного графа $G = K_{n,m} \setminus (K_{k_1,l_1} \sqcup K_{k_2,l_2})$, где графы K_{k_1,l_1} и K_{k_2,l_2} не имеют общих вершин, справедливы равенства $\text{SInt}(G) = k_{2,2}(G) = C_{k_1}^2 C_{m-l_1}^2 + C_{k_1}^1 C_{n-k_1-k_2}^1 C_{m-l_1}^2 + C_{k_1}^1 C_{k_2}^1 C_{m-l_1-l_2}^2 + C_{n-k_1-k_3}^2 C_m^2 + C_{n-k_1-k_2}^1 C_{k_2}^1 C_{m-l_2}^2 + C_{k_2}^2 C_{m-l_2}^2 = \frac{k_1(2n-k_1-2k_2-1)}{2} C_{m-l_1}^2 + C_{k_1}^1 C_{k_2}^1 C_{m-l_1-l_2}^2 + C_{n-k_1-k_3}^2 C_m^2 + \frac{k_2(2n-2k_1-k_2-1)}{2} C_{m-l_2}^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем какое-нибудь двудольное погружение графа $K_{n,m}$. Удалим ребра полного графа K_{k_1,l_1} , построенного на первых k_1 вершинах нижней доли и последних l_1 вершинах верхней доли. Удалим также ребра полного графа K_{k_2,l_2} , построенного на последних k_2 вершинах нижней доли и первых l_2 вершинах верхней доли.

Опишем пары вершин $i_1 < i_2$ и $j_1 < j_2$, которые образуют подграф $K_{2,2}$ в графе G .

I. Если $i_2 \leq k_1$, то получается полный граф типа $K_{2,2}$ тогда и только тогда, когда $j_2 \leq m - l_1$. Таких графов ровно $C_{k_1}^2 C_{m-l_1}^2$.

II. Если $i_1 \leq k_1 < i_2 \leq n - k_2$, то получается полный граф типа $K_{2,2}$ тогда и только тогда, когда $j_2 \leq m - l_1$. Таких графов ровно $C_{k_1}^1 C_{n-k_1-k_2}^1 C_{m-l_1}^2$.

III. Если $i_1 \leq k_1$ и $n - k_2 + 1 \leq i_2$, то получается полный граф типа $K_{2,2}$ тогда и только тогда, когда $j_2 \leq m - l_1$ и $l_2 + 1 \leq j_1$. Таких графов ровно $C_{k_1}^1 C_{k_2}^1 C_{m-l_1-l_2}^2$.

IV. Если $k_1 + 1 \leq i_1 < i_2 \leq n - k_2$, то всегда получается полный граф типа $K_{2,2}$. Таких графов ровно $C_{n-k_1-k_2}^2 C_m^2$.

V. Если $k_1 + 1 \leq k_1 \leq n - k_2 < i_2$, то получается полный граф типа $K_{2,2}$ тогда и только тогда, когда $l_2 + 1 \leq j_1$. Таких графов ровно $C_{n-k_1-k_2}^1 C_{k_2}^1 C_{m-l_2}^2$.

VI. Если $n - k_2 + 1 \leq i_1$, то получается полный граф типа $K_{2,2}$ тогда и только тогда, когда $l_2 + 1 \leq j_1$. Таких графов ровно $C_{k_2}^2 C_{m-l_2}^2$.

Следовательно число искомых графов $C_{k_1}^2 C_{m-l_1}^2 + C_{k_1}^1 C_{n-k_1-k_2}^1 C_{m-l_1}^2 + C_{k_1}^1 C_{k_2}^1 C_{m-l_1-l_2}^2 + C_{n-k_1-k_2}^2 C_m^2 + C_{n-k_1-k_2}^1 C_{k_2}^1 C_{m-l_2}^2 + C_{k_2}^2 C_{m-l_2}^2$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 6. Для двудольного графа $G = K_{n,m} \setminus (K_{1,1} \sqcup K_{1,1})$ справедливы равенства $\text{SInt}(G) = k_{2,2}(G) = C_n^2 C_m^2 - 2(n-1)(m-1) + 1 = \text{SInt}(K_{n,m} \setminus (K_{1,1}) - (n-1)(m-1) + 1 = \text{SInt}(K_{n,m} \setminus (K_{1,2}) - (n-2))$.

СЛЕДСТВИЕ 7. При $m \geq n \geq 2$, $m \geq 3$, для (n, m) -двудольного графа G следующие условия эквивалентны:

- 1) граф G является полным графом без ребра $K_{n,m} \setminus K_{1,1}$;
- 2) $\text{SInt}(G) = \text{SInt}(K_{n,m}) - (n-1)(m-1)$;
- 3) $\text{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,2}) = \text{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) - (n-1)(m-2) < \text{SInt}(G) \leq \text{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\implies$ 2) это следствие 3.

Импликация 2) $\implies$ 3) очевидна.

3) $\implies$ 1). Если $G \not\supset K_{n,m} \setminus K_{1,1}$, то имеет место по крайней мере одно из включений $G \subset K_{n,m} \setminus (K_{1,1} \sqcup K_{1,1})$, $G \subset K_{n,m} \setminus K_{1,2}$, $G \subset K_{n,m} \setminus K_{2,1}$. В первом случае согласно следствию 6 справедливо неравенство $\text{SInt}(G) \leq \text{SInt}(K_{n,m} \setminus (K_{1,1} \sqcup K_{1,1})) = \text{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,2}) - (n-2)$. Во втором случае справедливо неравенство $\text{SInt}(G) \leq \text{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,2})$. В третьем случае согласно следствию 5 справедливо неравенство $\text{SInt}(G) \leq \text{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{2,1}) = \text{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) - (n-2)(m-1) = \text{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) - (n-1)(m-2) - (m-n) = \text{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,2}) - (m-n)$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Для (n, m) -двудольного графа G можно рассмотреть структуру множества

$$\Pi(G) = \{\text{SInt}(f): f: G \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ является двудольным погружением}\} \subset [0, C_n^2 C_m^2].$$

Из рассмотрений работы следует, что $C_n^2 C_m^2 \in \Pi(G) \iff G \supset K_{n,m} \setminus (K_{1,1} \sqcup K_{1,1})$. Три графа $K_{n,m}$, $K_{n,m} \setminus K_{1,1}$ и $K_{n,m} \setminus (K_{1,1} \sqcup K_{1,1})$ различаются по наименьшему числу в множества $\Pi(G)$. Множество $\Pi(G)$ состоит из $n!m!$ чисел (каждое число учитывается с кратностью количества двудольных погружений с таким числом самопересечения. Можно предположить, что множество $\Pi(G)$ однозначно восстанавливает граф G .

Во всех рассмотренных нами случаях в оптимальном погружении первые и последние вершины долей соединены ребрами. Для указанных ниже графов во всяком оптимальном погружении ни первые ни последние вершины не соединены ребром, т.е. удаление любого ребра в указанных графах уменьшает число самопересечения.

ТЕОРЕМА 8. При $n, m \geq 4$ для $(n + 2, m + 2)$ -двудольного графа G , получаемого из графа $K_{n,m}$ приклейкой четырех висячих ребер (двух к разным вершинам нижней доли и двух к разным вершинам верхней доли), справедливо равенство

$$\text{SInt}(G) = k_{2,2}(G) + 2 = \text{SInt}(K_{n,m}) + 2.$$

Причем оптимальное погружение получается только следующим образом. Берётся такое погружение графа $K_{n,m}$, при котором вершины приклейки висячих ребер являются крайними (самыми правыми и самыми левыми). Свободный конец висячего ребра располагается с той же стороны, с которой находится другой конец этого ребра (из графа $K_{n,m}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что для описанных погружений графа G число самопересечения равно указанному числу.

Рассмотрим какое-нибудь оптимальное двудольное погружение f графа G . Оно порождает двудольное погружение графа $K_{n,m}$, которое согласно теореме 5 имеет в $K_{n,m}$ ровно $\text{SInt}(K_{n,m})$ точек самопересечения. Отождествим граф $K_{n,m}$ со своим образом при погружении f . Вершины графа $K_{n,m}$ занумеруем согласно порядку на прямой, т.е. будем считать, что $x_1 < \dots < x_n$ и $y_1 < \dots < y_m$. Отождествим также висячие ребра со своими образами при погружении f .

Пусть висячая вершина y_0 лежит внутри верхней доли графа $K_{n,m}$ и соединена ребром с вершиной x_{i_0} . Если $x_{i_0} = x_1$, то висячее ребро $[x_1, y_0]$ имеет не менее $n - 1 \geq 3$ точек пересечения с ребрами графа $K_{n,m}$ (с ребрами $[x_i, y_1]$, $i = 2, \dots, n$). Если $x_1 < x_{i_0} < x_n$, то висячее ребро $[x_{i_0}, y_0]$ имеет не менее $m \geq 4$ точек пересечения с ребрами графа $K_{n,m}$ (с ребрами $[x_1, y_j]$ при $y_0 < y_j$ и ребрами $[x_n, y_j]$ при $y_j < y_0$). Если $x_{i_0} = x_n$, то висячее ребро $[x_n, y_0]$ имеет не менее $n - 1 \geq 3$ точек пересечения с ребрами графа $K_{n,m}$ (с ребрами $[x_i, y_m]$, $i = 1, \dots, n - 1$). Во всех случаях число самопересечения строго больше числа из формулировки, которое, как мы уже указали, является верхней оценкой числа самопересечения графа. Следовательно все висячие вершины находятся вне отрезка вершин соответствующей доли полного графа $K_{n,m}$.

Пусть для висячей вершины $y_0 < y_1$ и пусть она соединена ребром с вершиной x_{i_0} полного подграфа. Если $x_1 < x_{i_0}$, то висячее ребро $[x_{i_0}, y_0]$ имеет не менее $m \geq 4$ точек пересечения с ребрами графа $K_{n,m}$ (с ребрами $[x_1, y_j]$, $j = 1, \dots, m$). Значит невисячие вершины висячих ребер являются крайними точками полного графа $K_{n,m}$. $\square$

Подчеркнем, что при оптимальном двудольном погружении рассмотренного графа первые и последние вершины долей не соединены ребрами. На первый взгляд это представляется удивительным, так как такое ребро всегда вносит нулевой вклад в число точек самопересечения.

3. Приложения к нумизматике.

Большинство монет имеют две стороны с изображениями - металлические денежные средства с односторонним изображением являются редкостью и обычно называются *брактеатами*. Одна сторона монеты называется *аверсом*, противоположная сторона называется *реверсом*. В качестве *аверса* (главной стороны) обычно берут сторону с данными об эмитенте монеты (правителе от имени которого она выпущена). Монеты Древнего мира и Средневековья не всегда несут информацию о дате (или даже эмитенте), поэтому не всегда удается точно узнать дату их создания.

Даже в случае наличия на монете имени эмитента и известности времени его правления, остается задача хронологического упорядочения его монет. Мы обсуждаем модель для хронологического упорядочения монетных типов одного эмитента в случае, когда вся имеющаяся в нашем распоряжении информация имеет не кладовый характер, а является результатом объединения данных по всем известным в настоящее время экземплярам монет, т.е. по единичным находкам и монетам с неизвестной историей. Основой для попыток хронологического

упорядочения различных монет (штемпелей монет) является сравнение монет с одной общей стороной (сторонами одного типа или даже сторонами, отчеканенными одним штемпелем) и различными оборотными сторонами.

Таким образом все аверсы (аверсы одного типа или аверсы, отчеканенные одним штемпелем, при более детальном и точном анализе) образуют вершины одной доли двудольного графа сопряженности (оттисков) штемпелей, а все реверсы образуют вершины другой доли. В рассматриваемом нами случае нет сведений о монетах, отчеканенных двумя аверсами или двумя реверсами. Аверс и реверс соединены ребром (сопряжены), если имеется монета, отчеканенная этой парой аверс-реверс. Так как при ручной чеканке монет верхние штемпеля, по которым бьют молотком, испытывают большие механические напряжения, то они чаще выходят из строя и заменяются на новые. Это приводит к тому, что граф сопряженности состоит не из отдельных ребер, а из больших связных компонент. На практике эти компоненты связности не всегда удастся *“линейно развернуть”*, т.е. двудольно вложить в плоскость. Это связано с тем, что в монетной мастерской обычно работают несколько чеканщиков и это порождает различные сочетания сторон. Возникает сложная задача *“развертывания двудольного графа”*, т.е. *“хронологически правильного”* упорядочения вершин долей. Бывают случаи возврата к старым уже выработанным штемпелям. Специалисты-нумизматы определяют это по изношенности или подрезке штемпеля и наличию *“далеких”* сопряженностей. Также учитываются при упорядочении штемпелей стилистические и весовые характеристики монет и данные покладам. Отсутствие в кладе монет некоторых типов является признаком их более позднего производства. В нашей модели эти элементы игнорируются.

К чекану Ширваншаха Али ибн Йазида мы применяем гипотезу:

Хронологически верное упорядочение штемпелей совпадает с их упорядочением в некотором оптимальном или близком к оптимальному двудольном погружении графа сопряженности. Близость можно понимать по (относительной) избыточности числа пересечения в погружениях. Почти эквивалентным образом гипотезу можно сформулировать так. *Некоторое оптимальное погружение задает хронологически верное или близкое к нему упорядочение штемпелей.* Близость можно понимать по (относительному) количеству инверсных пар в каждой доле графа сопряженности.

По мнению В.Ф. Минорского династия Ширваншахов правила (областью Ширван, государством Ширван, государством Ширваншахов) около 1000 лет непрерывно [5], [6, стр. 43]. Эта область находится в северо-восточной части современной Республики Азербайджан; с востока она ограничена Каспийским морем, с севера Кавказскими горами, с юго-запада рекой Кура, а с северо-запада рекой Ганых (Алазань) [6, стр. 17]. В разные периоды истории границы правления Ширваншахов раздвигались и сжимались. Истории Ширвана и монетному наследию Ширваншахов посвящено много работ [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15]. Мы рассматриваем один конкретный вопрос, связанный с чеканом Ширваншаха Али ибн Йазида [425–435] г.х. (1034–1044) р.х.

Ширваншаху Йазиду ибн Ахмаду [381–418] г.х. последовательно наследовали три его сына: Минучихр I ибн Йазид [418–425], Абу Мансур Али ибн Йазид [425–435] и Кубад ибн Йазид [435–441].

Согласно письменным источникам Абу Мансур Али ибн Йазид занял престол Ширвана в [425] г.х. (1034) г. [5] [6, стр. 88].

Монета Али ибн Йазида с датой 424 (аверс A_1) привела к пересмотру времени его прихода к власти [14], [15, стр. 95].

Насколько однозначно письменные источники указывают на дату 425 как на время прихода к власти Али ибн Йазида, и возможно ли альтернативное объяснение наличия монеты с именем Абу Мансур Али ибн Йазида и датой 424?

“В 425 г.х./1034 г. ширваншах Минучихр после семилетнего правления был предательски убит в своем доме братом Абу Мансур [Али] ибн Йазидом. Причиной послужило то, что

Абу Мансур сам опасался ширваншаха и прятался от него. ... Абу Мансур Али ибн Йазид ибн Ахмад, вступив на трон в 425 г.х./1034 г., приказал похоронить брата и по истечении установленного обычая срока, через год женился на его вдове в раби I 426 г.х./январе 1035 г. После того как население ал-Баба выгнало своего эмира Абд ал-Малика в канун пятницы 17 раби I/9 февраля 1034 г. жители ал-Баба подчинились ширваншаху Мансуру, ..." [6, стр. 88].

В описании указанных событий современные историки обычно ссылаются на монографию В.Ф. Минорского [5]. Источником для В.Ф. Минорского послужила историческая хроника "Тарих ал-Баб-ва-Ширван", для которой он подготовил критическое издание текста и прекрасно откомментированный перевод. Исследование востоковеда А.К. Аликберова позволило установить, что хроника "Тарих ал-Баб-ва-Ширван" создавалась в Багдаде и была завершена в 1106-1107 г. А.К. Аликберов считает, что авторство принадлежит Маммусу ал-Лакзи ад-Дербенди, который вынужден был переехать из Дербенда (ал-Баба) в Багдад в связи со сменой политической власти в городе [16].

Таким образом, можно предполагать, что автор хроники не ошибался, указывая даты. Дата 17 раби I [425]/9 февраля 1034 г. очень конкретна, чтобы предполагать в ней ошибку. Следовательно Али ибн Йазид убил брата не позже 17.03.425 г.х. Это согласуется со временем свадьбы в месяце раби I 426 г.х. Согласно хронике "Тарих ал-Баб-ва-Ширван" княгиня Ситт супруга ширваншаха Минучихра являлась одним из главных действующих лиц убийства последнего. Поэтому можно предполагать, что свадьба состоялась немедленно "по истечении установленного обычая срока, через год". Тем более, что свадьба со вдовой покойного ширваншаха придавала легитимности новому ширваншаху, в которой он, судя по описанию убийства Минучихра [6, стр. 88], нуждался. Нам представляется маловероятным, что Али ибн Йазид уже в 424 до убийства своего брата обладал властью и возможностью для чекана собственной монеты. Вполне возможно, что эта дата фальшиво была поставлена для легитимации захвата власти. Возможно с этим как-то связана и последовавшая заморозка даты 425 на монетах Али ибн Йазид.

В следующей таблице собраны все доступные нам данные по группе монет Али ибн Йазид ранней чеканки. Трехсложные числа в таблице являются опубликованными в [15, стр. 117-124] типами монет. Обычные числа указывают количество известных нам монет этого нового типа.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
R_1	1.1.0	1.2.5							
R_2		1.2.6	1.3.2	3	7	2			
R_3		2	1.3.1	5	1.2.2	1.2.4	1.2.3		
R_4								1.2.1	
R_5									1.3.3

Таблица 1: Схема всех известных типов монет

Формальные методы не позволяют упорядочить между собой компоненты связности графа сопряженности. Они также не позволяют определять "направление времени", т.е. отличать начало и конец. В нашем случае дата 424 на аверсе A_1 позволяет считать соответствующую монету первой. Неединственность оптимального погружения также оставляет возможности для различного упорядочения штемпелей. В нашем случае аверсы $A_3 - A_6$ можно переставлять в любом порядке. Так как аверс A_4 ранее не публиковался, то мы посчитали нужным дать его фото.

Математика это аксиоматическая (формализованная) наука, поэтому её выводы достоверны и верны (в рамках взятых аксиом). Однако достоверность (точность) выводов приложения математики к реальным явлениям зависит от степени адекватности модели, принятой для описания реального процесса. Одним из косвенных признаков применимости метода к реальному

процессу является его устойчивость к небольшим погрешностям (изменениям) данных процесса. Граф сопряженности ранее опубликованных данных (таблицы 1 без обычных чисел) является двудольно вложимым в плоскость деревом и порождает тот же порядок долей, но с возможностью любой перестановки аверсов $A_5 - A_7$ (в отсутствии аверса A_4). Важно то, что для двудольно вложимого графа порождаемый порядок вершин долей представляется почти достоверно верным порядком. Общими для двух рассмотренных графов являются заданный порядок с возможностью любой перестановки аверсов $A_4 - A_6$.

На самом деле таблица 1 содержит важное уточнение опубликованных данных. В опубликованном варианте реверсы типов 1.1.0 и 1.2.5 считаются различными. В действительности это один реверс и нам удалось его реконструировать почти полностью.

Мы также полностью реконструировали аверс A_2 типов 1.2.5 и 1.2.6. Важно указать, что новые экземпляры помогли увидеть в правой части центрального круга монеты слово “кубад”, которое, впрочем, встречается на реверсе еще одного типа монет ширваншаха Али ибн Йазида (типа 2.1.3 [15, стр. 127]). Это слово “кубад” можно воспринимать как имя брата Али – следующего Ширваншаха. Но, видимо, такое восприятие не соответствует стилистике и месту этого слова в поле монеты. Таким образом, это слово надо понимать как “качественная”.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
R_1	1.1.0								
R_1^*		1.2.5							
R_2		1.2.6	1.3.2						
R_3			1.3.1		1.2.2	1.2.4	1.2.3		
R_4								1.2.1	
R_5									1.3.3

Таблица 2: Схема опубликованных типов с раздвоением штемпеля R_1

Раздвоение штемпеля R_1 на R_1 и R_1^* “отрывает” тип 1.1.0. У оставшейся компоненты связности формально неопределимы начало и конец, что, видимо, и привело к публикации типов конца этого дерева как начальных типов.

На самом деле в публикации типов допущены опечатки. Типу 1.3.2 приписан реверс R_1^* , а типу 1.2.4 приписан реверс R_4 . Построение графа сопряженности при буквальном следовании публикации приводит при двудольном вложении к необходимости перестановки аверсов A_6, A_7 и реверсов R_1^*, R_2 . На самом деле эти перестановки фактически переставляют хронологически только аверсы A_6 и A_7 . Другие опечатки не влияют на структуру графа сопряженности штемпелей, поэтому здесь не обсуждаются.

Отметим, что обычно чекан каждого эмитента начинается с монеты новых аверса и реверса, т.е. в хронологическом погружении графа сопряжения обычно (в нашем случае это так) первые вершины долей соединены ребром. Теорема 8 показывает, что для общего двудольного графа нельзя утверждать, что существует оптимальное двудольное погружение, при котором первые вершины долей соединены ребром.

Так как обычный текст читается последовательно, т.е. символы в нем линейно упорядочены, то при упорядоченности вершин долей двудольного графа возникает задача линейного упорядочения ребер. Обычно (и в нумизматике тоже) ребрам номера присваиваются в лексикографическом порядке после выбора одной из долей (аверса) в качестве первой [17], [18], [19]. Не всякий линейный порядок ребер порождается лексикографически из порядков на долях. Поэтому возникает естественная задача определения принципа (алгоритма) построения по линейному порядку на множестве всех ребер двудольного графа упорядочения вершин долей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thomassen Carsten. The graph genus problem is NP-complete // Journal of Algorithms. 1989. V. 10. № 4. P. 568–576. doi:10.1016/0196-6774(89)90006-0.
2. Mohar Bojan A Linear Time Algorithm for Embedding Graphs in an Arbitrary Surface // SIAM J. Discr. Math. 1999. V. 12. № 1. P. 6-26. doi:10.1137/S089548019529248X.
3. M. R. Garey, D. S. Johnson. Crossing number is NP-complete // SIAM J. Alg. Discr. Meth. 1983. V. 4. № 3. P. 312-316. doi: 10.1137/0604033
4. Носовский Г.В., Фоменко А.Т. Старые русские деньги. Средневековые русские монеты с арабскими надписями – Москва: Издательство АСТ, 2024 г.
5. Минорский В.Ф. История Ширвана и Дербенда X–XI веков – Москва: 1963 г.
6. Ашурбейли С.Б. Государство Ширваншахов (VI–XVI вв.) – Баку: Издательство “Элм”, 1983 г.
7. Пахомов Е.А. Монеты Азербайджана – Баку: вып 1, 1959 г.; вып 2, 1962 г.
8. Сейфеддини М.А. Монетное дело и денежное обращение в Азербайджане XII–XV вв. – Баку: Издательство “Элм”, Книга I. 1978 г.; Книга II. 1981 г.
9. Сейфеддини М.А., Алиев З.М. Нумизматика Азербайджана. Денежное обращение и монетное дело при феодальных государствах Азербайджана (IX – первой половины XIII в.) – Баку: Издательство “Элм”, Том II. 1997 г.
10. Раджабли Али. Нумизматика Азербайджана. (Очерки истории монетного дела и денежного обращения Азербайджана) – Баку: Издательство “Элм ве Хаят”, 1997 г.
11. Злобин Г.В. Монеты Ширваншахов династии Дербенди (третья династия) 784–956 г.х. / 1382–1548 гг. – Москва: Издательство “Маска”, 2010 г.
12. Раджабли Али Монеты Азербайджана – Баку: Издательство “Xalq Bank”, 2012 г.
13. Раджабли Али Монетная чеканка в государстве Ширваншахов (VIII – XVI вв.) – Баку: Издательство “Тахсил ве Тедрис”, 2015 г.
14. Злобин Г.В., Казбеков К.Х. К нумизматике ширваншахов Кисранидов: Уточнение даты начала правления ширваншаха Али б. Йазида 425–435 г.х./1034–1043 гг. Journey from modern Azerbaijan to the historical states of Shirvanshahs. Baku: 2018, с. 299–303.
15. Злобин Г.В. Монеты Ширвана и Ширваншахов династии Кесранидов (вторая династия) 330–784 г.х. / 941–1382 гг. – Москва: Издательство “Маска”, 2020 г.
16. Аликберов А.К. Об авторе исторической хроники XI в. “Та’рих Баб ал-абваб ва-Ширван”. Рукописная и книжная культура в Дагестане – Махачкала: 1990, с. 119–121.
17. Мельникова А.С. Русские монеты от Ивана Грозного до Петра Первого – Москва: Издательство “Финансы и статистика 1989 г.
18. Клешинов В.Н., Гришин И.В. Каталог русских средневековых монет с правления царя Ивана IV (Грозного) до шведской оккупации Новгорода (1533-1617гг.) Москва: Издательство УРСС, 1998 г.
19. Савоста Р.Ю. Монеты Хаджи-Тархана 813 – 831 годов хиджры – Николаев: 2016 г.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thomassen, C., 1989, “The graph genus problem is NP-complete”, *Journal of Algorithms*, vol. 10, no. 4, pp. 568–576. DOI: [https://doi.org/10.1016/0196-6774\(89\)90006-0](https://doi.org/10.1016/0196-6774(89)90006-0).
2. Mohar, B., 1999, “A linear time algorithm for embedding graphs in an arbitrary surface”, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 12, no. 1, pp. 6–26. DOI: <https://doi.org/10.1137/S089548019529248X>.
3. Garey, M.R., Johnson, D.S., 1983, “Crossing number is NP-complete”, *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, vol. 4, no. 3, pp. 312–316. DOI: <https://doi.org/10.1137/0604033>.
4. Nosovskiy, G.V., Fomenko, A.T., 2024, “Old Russian money. Medieval Russian coins with Arabic inscriptions”, Moscow: AST Publishing House, 352 p.
5. Minorsky, V.F., 1963, “History of Shirvan and Derbent in the 10th–11th centuries”, Moscow.
6. Ashurbeyli, S.B., 1983, “State of the Shirvanshahs (VI–XVI centuries)”, Baku: Publishing house “Elm”, 344 p.
7. Pakhomov, E.A., 1959; 1962, “Coins of Azerbaijan”, Baku: issue number 1; issue number 2.
8. Seifeddini, M.A., 1978; 1981, “Coinage and money circulation in Azerbaijan in the 12th–15th centuries”, Baku: Publishing house “Elm”, Book I, 268 p.; Book II, 244 p.
9. Seifeddini, M.A., Aliyev, Z.M., 1997, “Numismatics of Azerbaijan. Money circulation and coinage in the feudal states of Azerbaijan (IX – first half of the XIII century)”, Baku: Publishing house “Elm”, Book II, 228 p.
10. Rajabli, A., 1997, “Numismatics of Azerbaijan. (Essays on the history of coinage and money circulation in Azerbaijan)”, Baku: Publishing house “Elm ve Hayat”, 232 p.
11. Zlobin, G.V., 2010, “Coins of the Shirvanshahs of the Derbendi dynasty (third dynasty) 784–956 AH / 1382–1548”, Moscow: Publishing house “Maska”, 432 p.
12. Rajabli, A., 2012, “Coins of Azerbaijan”, Baku: Publishing house “Xalq Bank”, 358 p.
13. Rajabli, A., 2015, “Coin minting in the state of the Shirvanshahs (VIII – XVI centuries)”, Baku: Publishing house “Tahsil ve Tedris”, 240 p.
14. Zlobin, G.V., Kazbekov, K.Kh., 2018, “On the numismatics of the Shirvanshahs of the Kisranids: Clarification of the start date of the reign of Shirvanshah Ali b. Yazid 425–435 AH / 1034–1043”, in “Journey from modern Azerbaijan to the historical states of Shirvanshahs”, Baku, pp. 299–303.
15. Zlobin, G.V., 2020, “Coins of Shirvan and the Shirvanshahs of the Kesranid dynasty (second dynasty) 330–784 AH / 941–1382”, Moscow: Publishing house “Maska”, 800 p.
16. Alikberov, A.K., 1990, “About the author of the historical chronicle of the 11th century “Ta’rikh Bab al-abwab va-Shirvan””, in “Manuscript and book culture in Dagestan”, Makhachkala, pp. 119–121.
17. Melnikova, A.S., 1989, “Russian coins from Ivan the Terrible to Peter the Great”, Moscow: Publishing house “Finance and statistics”.

18. Kleshchinov, V.N., Grishin, I.V., 1998, "Catalog of Russian medieval coins from the reign of Tsar Ivan IV (the Terrible) to the Swedish occupation of Novgorod (1533–1617)", Moscow: Publishing house URSS.
19. Savosta, R.Ju., 2016, "Coins of Haji-Tarkhan 813–831 Anno Hegirae", Nikolaev.

Получено: 15.01.2025

Принято в печать: 07.04.2025