

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 2.

УДК 517.938.5

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-7-32

Топология слоений Лиувилля трехмерных билиардов с проскальзыванием¹

Г. В. Белозеров, В. Н. Завьялов

Белозеров Глеб Владимирович — Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: gleb0511beloz@yandex.ru***Завьялов Владимир Николаевич** — аспирант, Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова; Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана; Московский центр Фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: vnzavyalov@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются билиарды в трехмерных областях, ограниченных софокусными квадрами, с проскальзыванием на границе. Такие динамические системы являются интегрируемыми по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. В случае двумерных столов класс билиардов с проскальзыванием был введен А. Т. Фоменко. Для нескольких типов софокусных билиардов с проскальзыванием определены классы гомеоморфности поверхностей постоянной энергии, построены бифуркационные диаграммы, описана топология слоения Лиувилля малых окрестностей особых и неособых слоев.

Ключевые слова: интегрируемая система, билиард, интегрируемый билиард, слоение Лиувилля, бифуркационная диаграмма, проскальзывание.

Библиография: 32 названия.

Для цитирования:

Белозеров Г. В., Завьялов В. Н. Топология слоений Лиувилля трехмерных билиардов с проскальзыванием // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 7–32.

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда 22-71-00111 в МГУ имени М. В. Ломоносова. Г. В. Белозеров и В. Н. Завьялов являются стипендиатами фонда БАЗИС.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 2.

UDC 517.938.5

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-7-32

The topology of Liouville foliations of three-dimensional billiards with slipping

G. V. Belozеров, V. N. Zavyalov

Belozеров Глеб Владимирович — Lomonosov Moscow State University (Moscow).*e-mail: gleb0511beloz@yandex.ru***Zavyalov Vladimir Nikolaevich** — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University; Bauman Moscow State Technical University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).*e-mail: vnzavyalov@mail.ru***Abstract**

Billiards in three-dimensional confocal domains with slipping along the boundary are considered. Such dynamical systems are Liouville integrable in piecewise-smooth sense. In two-dimensional case, class of billiards with slipping was introduced by A.T.Fomenko. For several types of confocal billiards with slipping the classes of homeomorphism of constant energy surfaces are found, the bifurcation diagrams are constructed and the topology of Liouville foliation in small neighborhoods of singular and non-singular fibers is described.

Keywords: integrable system, billiard, integrable billiard, Liouville foliation, bifurcation diagram, slipping.

Bibliography: 32 titles.

For citation:

Belozеров, G. V., Zavyalov, V. N. 2025, “Topology of Liouville foliations of three-dimensional billiards with slipping”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 7–32.

1. Введение

Математический бильярд — это задача о движении материальной точки внутри области n -мерного евклидова пространства с абсолютно упругим отражением от границы (т.е. по классическому закону “угол падения равен углу отражения”). Интегрируемость бильярда внутри эллипса была замечена Дж. Д. Биркгофом в работе [1]. В книге В. В. Козлова и Д. В. Трещева [2] отмечена интегрируемость плоских бильярдов, ограниченных дугами софокусных квадрик. В качестве дополнительного первого интеграла таких систем выступает параметр софокусной квадрики, которой касаются все звенья (или их продолжения) траектории-ломаной. Такие бильярды были исследованы с точностью до лиувиллевой эквивалентности в работах В. Драговича и М. Раднович [3, 4], а также В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) [5, 6, 7].

Важным расширением класса интегрируемых бильярдов стало введение В. В. Ведюшкиной бильярдных книжек — CW-комплексов, склеенных из плоских софокусных областей по их общим гладким дугам границы (см. [8, 9]). При попадании на границу листа (т.е. элементарного плоского бильярдного стола) книжки материальная точка переходит на другой лист согласно перестановке, указанной на ребре границы. Значимым подклассом бильярдных книжек являются топологические бильярды. Такие книжки имеют на ребрах только циклические перестановки длины 1 или 2 и являются кусочно гладкими двумерными многообразиями.

В классе таких билиардов В.В. Ведюшкиной и А.Т. Фоменко [11] были промоделированы геодезические потоки на сфере S^2 и торе T^2 , обладающие линейным по импульсам дополнительным первым интегралом, а также квадратично интегрируемые геодезические потоки на сфере S^2 . Для моделирования квадратичных геодезических потоков на торе были использованы другие билиардные книжки [10].

Еще одним обобщением плоских билиардов являются билиарды с проскальзыванием, введенные А.Т. Фоменко в работе [12]. Отражение у таких билиардов устроено иначе (см. рис. 1). Частица, попадая на границу стола, отражается и выходит из точки, полученной сдвигом точки удара вдоль границы на некоторое расстояние или, в частном случае софокусных и круговых билиардов, поворотом на некоторый угол относительно начала координат радиус-вектора точки столкновения частицы с границей стола. В работе [12] была доказана интегрируемость софокусных билиардов с проскальзыванием в случае, когда угол поворота равняется π . Там же было показано, что билиардами с проскальзыванием (софокусными и круговыми) топологически моделируются представители каждого из четырех классов геодезических потоков на неориентируемых двумерных поверхностях (проективной плоскости или бутылке Клейна), имеющих дополнительный первый интеграл малой степени, т.е. линейный или квадратичный по импульсам. В работе В.В. Ведюшкиной и В.Н. Завьялова [13] с помощью билиардов с проскальзыванием были развиты результаты В.В. Ведюшкиной и А.Т. Фоменко [11] по реализации линейных геодезических потоков билиардами на случай неориентируемых многообразий.

Одним из авторов работы, В.Н.Завьяловым, был предложен и изучен новый подкласс интегрируемых билиардов с проскальзыванием – т.н. билиарды с рациональным проскальзыванием [14]. Если комплекс склеен из круговых колец и дисков, а на каждой свободной границе введено проскальзывание на произвольный угол $k\pi/n$, соизмеримый с π , то при движении частицы сохраняется интеграл кругового билиарда, а изоэнергетическая поверхность остается трехмерным компактным топологическим многообразием (для билиардных книжек это было показано И.С.Харчевой [15]). В указанном классе удалось промоделировать как различные классы линзовых пространств (получено достаточное условие ее реализуемости билиардом в диске с проскальзыванием), так и различные значения числовых меток r, n .

Последняя задача представляет большой интерес в контексте гипотезы А.Т. Фоменко о билиардах [16] и ее локальной версии [17]. Она предполагает реализуемость билиардами произвольных значений числовых меток (доказана, см. [17, 18] и работы В.В. Ведюшкиной и В.А. Кибкало [19, 20]), а также “меченых подграфов” инварианта Фоменко–Цишанга вблизи своей вершины или ребра. Ряд результатов в этом направлении был недавно получен В.Н. Завьяловым и В.А. Кибкало. Также было бы интересно применить подходы, основанные на билиардах с проскальзыванием, для моделирования особенностей (атомов) интегрируемых систем, что для боттовских атомов выполнено В.В. Ведюшкиной и И.С. Харчевой, а для неботтовских развивается в недавних работах А.А. Кузнецовой [21].

Аналогично плоскому случаю, классические трехмерные билиарды (т.е. со стандартным законом отражения), ограниченные конечным числом софокусных квадрик, интегрируемы. Дополнительными первыми интегралами таких систем являются параметры двух софокусных квадрик, которых касаются все звенья (или их продолжения) траектории-ломаной. Билиард внутри эллипсоида был рассмотрен В. Драговичем и М. Раднович в книге [4]. В этой работе они построили бифуркационную диаграмму и описали регулярные слои этой системы. Классификация трехмерных билиардных столов в $\mathbb{R}^3$, ограниченных конечным числом софокусных квадрик и имеющих двугранные углы излома на границе равные $\pi/2$, была получена Г.В. Белозеровым в [22]. В этой работе он описал топологию 1-перестроек торов Лиувилля таких систем и показал, что неособая изоэнергетическая поверхность произвольного трехмерного софокусного билиарда гомеоморфна либо $S^2 \times S^3$, либо $S^1 \times S^4$, либо S^5 .

В настоящей работе изучается обобщение билиардов с проскальзыванием на трехмерный

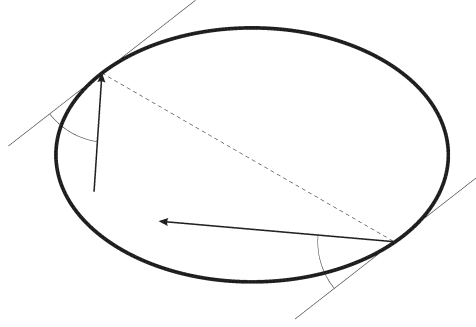


Рис. 1: Динамика частицы при попадании на границу бильярда с проскальзыванием.

случай. Рассмотрим связный трехмерный бильярдный стол (т.е. компактную область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей), симметричный относительно начала координат и ограниченный конечным числом софокусных квадрик. Все грани этого стола мы разобьем на два класса: с проскальзыванием и с отражением. При попадании на грань с проскальзыванием материальная точка, находившаяся в точке P с вектором скорости v , продолжит движение из точки $-P$ с вектором скорости v' , который получается из v путем следующих преобразований: сначала v отражается от касательной плоскости к данной грани в точке P , а затем заменяется на противоположный.

Мы рассмотрим два трехмерных бильярдных стола: область, ограниченную эллипсоидом, а также бесфокусную область, ограниченную тремя софокусными квадриками. Отметим, что первый стол допускает лишь один режим проскальзывания, в то время как второй — в точности семь. На бесфокусном столе мы рассмотрим только те режимы, в которых проскальзывание происходит ровно на одной паре противоположных граней. Для таких бесфокусных бильярдов, а также для бильярда с проскальзыванием внутри эллипсоида были определены классы гомеоморфности поверхностей постоянной энергии, описаны регулярные слои и их перестройки. Изучено локальное устройство слоев Лиувилля таких систем.

Благодарности. Авторы выражают особую благодарность своему научному руководителю Анатолию Тимофеевичу Фоменко за постановку задачи.

2. Описание задачи. Интегрируемость

Напомним определение и некоторые свойства семейства софокусных квадрик в трехмерном евклидовом пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейством софокусных квадрик в евклидовом $\mathbb{R}^3$ называется множество квадрик, заданных уравнением

$$(b - \lambda)(c - \lambda)x^2 + (a - \lambda)(c - \lambda)y^2 + (a - \lambda)(b - \lambda)z^2 = (a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda), \quad (1)$$

где $a > b > c$ — фиксированные числа, а λ — вещественный параметр. Если параметр квадрики этого семейства равен a , b или c , то она (квадрика) называется вырожденной, в противном случае — невырожденной.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\lambda \in (-\infty, c)$, то соответствующая квадрика является эллипсоидом, если $\lambda \in (c, b)$, то — однополостным гиперboloидом, если $\lambda \in (b, a)$, то — двуполостным гиперboloидом. Вырожденные квадрики — это в точности координатные плоскости. На рисунке 2 изображены три невырожденные софокусные квадрики различных типов.

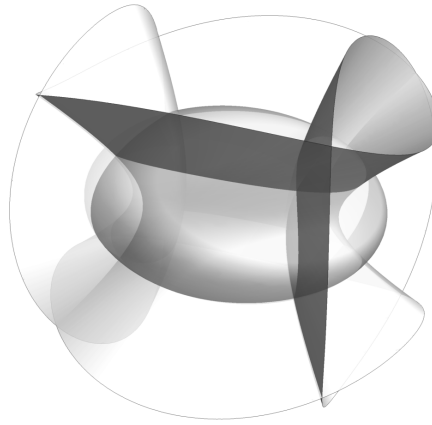


Рис. 2: Три невырожденные софокусные квадрики в $\mathbb{R}^3$: эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперboloиды.

К. Якоби, исследуя геодезический поток на эллипсоиде, показал (см. [23]), что через каждую точку $\mathbb{R}^3$ проходит в точности три софокусные квадрики (с учетом кратности). Параметры этих квадрик $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, упорядоченные по возрастанию, образуют тройку функций, называемую *эллиптическими координатами в $\mathbb{R}^3$* . В каждом координатном октанте эллиптические координаты являются однозначными, регулярными и ортогональными.

Семейству софокусных квадрик можно сопоставить две плоские кривые: *фокальный эллипс* $F_1 = \left\{ (x, y, 0) \mid \frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} = 1 \right\}$, и *фокальную гиперболу* $F_2 = \left\{ (x, 0, z) \mid \frac{x^2}{a-b} - \frac{z^2}{b-c} = 1 \right\}$. Эллипс F_1 состоит в точности из тех точек, в которых $\lambda_1 = \lambda_2$. Точки гиперболы F_2 удовлетворяют уравнению $\lambda_2 = \lambda_3$.

Теперь опишем конфигурационное пространство системы, которую мы будем изучать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Трехмерным билиардным столом будем называть связное компактное множество с непустой внутренностью, ограниченное конечным числом софокусных квадрик и имеющее двугранные углы излома на границе, равные $\pi/2$.*

Среди всех трехмерных билиардных столов выделим класс тех, с которыми мы будем работать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Трехмерный билиардный стол D будем называть допустимым, если он центрально симметричен.*

На рисунке 3 изображены два допустимых билиардных стола, которым будет посвящена большая часть настоящей работы: а — область, ограниченная эллипсоидом, b — стол, ограниченный тремя различными софокусными квадриками. Отметим, что второй стол не пересекается с фокальными кривыми. В связи с этим мы будем называть его *бесфокусным*.

Пусть D — допустимый билиардный стол, F_D — множество его гладких 2-граней, а A — оператор центральной симметрии в $\mathbb{R}^3$. Отметим, что в силу определения 3 корректно определено действие оператора A на множестве F_D . Пусть F — непустое инвариантное подмножество F_D относительно A . Рассмотрим следующую динамическую систему. Материальная точка единичной массы движется внутри допустимого билиардного стола D равномерно и прямолинейно, преобразуя свое движение на границе D по следующему правилу.

- Если материальная точка попала в точку P гладкой 2-границы $f \notin F$ с вектором скорости v , то отражение от границы в этом случае происходит классическому билиардному закону.

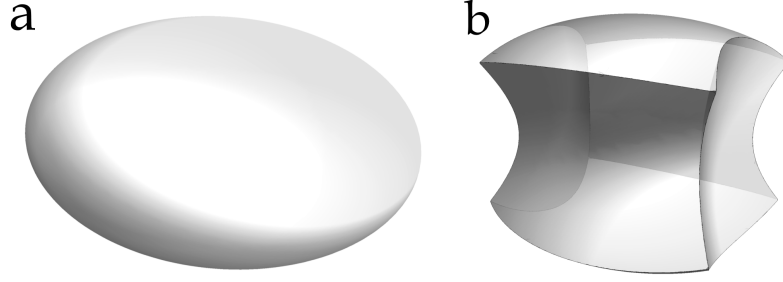


Рис. 3: Примеры допустимых бильярдных столов: а — область, ограниченная эллипсоидом, б — бесфокусная область, ограниченная тремя квадраками различных типов.

То есть материальная точка отражается от P с вектором скорости $v' = v - 2(v, n_f)n_f$, где n_f — единичный вектор нормали к грани f в точке P .

- Если материальная точка попала в точку P гладкой 2-грани $f \in F$ с вектором скорости v , то в этот же момент времени она “перескакивает” в точку AP (грани Af) и продолжает свое движение с вектором скорости $v' = Av - 2(Av, n_f)n_f$, где n_f — единичный вектор нормали к грани f в точке P .

Такую динамическую систему мы будем называть *трехмерным бильярдом с проскальзыванием*.

Отметим, что бильярдный стол, ограниченный эллипсоидом, допускает единственное проскальзывание, в то время как бесфокусный стол (изображенный на рис. 3.b), допускает 7 режимов проскальзывания. Действительно, у этого стола 3 пары центрально симметричных граней. Поэтому количество типов проскальзывания на нем равно $2^3 - 1$, т.е. 7.

На самом деле, описание системы, представленное выше, определяет ее не во всех точках конфигурационного пространства. В частности, неизвестна динамика частицы попавшей на стык двух или трех гладких 2-граней. Тем не менее, движение частицы в таких точках можно доопределить по непрерывности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Система трехмерного бильярда с проскальзыванием может быть корректно доопределена во всех точках конфигурационного пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в точках стыка двух гладких граней границы стола доопределение по непрерывности возможно. Для точек, в которых пересекаются три гладких грани, рассуждения будут аналогичными.

Пусть в точке P смыкаются грани f и g . Тогда возможны три варианта: $f, g \notin F$; $f, g \in F$; $f \in F, g \notin F$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1. Пусть $f, g \notin F$, тогда в граничных точках стола близких к P происходит отражение. Покажем сначала, что операторы отражений A_f и A_g от граней f и g в точке P соответственно коммутируют друг с другом. Пусть n_f, n_g — внешние единичные нормали к граням f и g в точке P . Поскольку софокусные квадраки пересекаются под прямым углом, векторы n_g и n_f ортогональны друг другу, т.е. $(n_g, n_f) = 0$. Тогда $\forall v \in T_P \mathbb{R}^3$ имеем

$$\begin{aligned} A_f \circ A_g(v) &= A_f(v - 2(v, n_g)n_g) = v - 2(v, n_f)n_f - 2(v, n_g)n_g + 4(v, n_g)(n_g, n_f) = \\ &= v - 2(v, n_f)n_f - 2(v, n_g)n_g = A_g \circ A_f(v). \end{aligned}$$

Коммутативность A_f и A_g доказана.

Используя этот факт покажем существование и единственность доопределения бильярдного закона в точках стыка f и g . Пусть в точку P попала частица с вектором скорости v . В

таком случае, рассмотрим близкую траекторию материальной точки с тем же вектором скорости. Поскольку n_f и n_g — внешние нормали, углы между v и n_f , v и n_g острые. Предположим, что близкая траектория сначала отразится от грани f . Тогда, после отражения угол между вектором скорости v' и n_f станет тупым, а между v' и n_g останется по-прежнему острым. Так как все двугранные углы излома на границе стола равны $\pi/2$, далее частица будет двигаться по направлению к грани g и через малое время должна от нее отразиться.

Отсюда становится ясным, что в пределе, т.е. при стремлении к точке P , отраженный вектор v'' будет получаться из v путем последовательных отражений от граней f и g , причем порядок отражений может быть произвольным. Поскольку операторы отражений от граней f и g коммутируют, поведение материальной точки в точках излома границы однозначно определено.

2. Пусть теперь $f, g \in F$. Проверим коммутативность проскальзываний на этих гранях. Этого условия снова будет достаточно для корректного доопределения траектории в точке P . При проскальзывании через грань f точка P перейдет в AP , а вектор v скорости в $v' = Av - (v, n_f)n_f$. При проскальзывании через грань g точка AP вернется в P , а вектор v' преобразуется к v'' по правилу: $v'' = Av' - (v', n_g)n_g$. Отсюда заключаем, что

$$v'' = A(Av - (v, n_f)n_f) - (Av - (v, n_f)n_f, n_g)n_g = v + (v, n_f)n_f + (v, n_g)n_g.$$

Последняя формула симметрична относительно n_f и n_g . Следовательно, проскальзывания коммутируют.

3. Этот случай проверяется аналогично предыдущим. Предложение доказано. $\square$

Таким образом, трехмерный билиард с проскальзыванием — корректно определенная динамическая система. Опишем ее фазовое пространство. Рассмотрим $\widehat{M}^6 = \{(x, v) | x \in D, v \in T_x \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\} \subset T\mathbb{R}^3$ со стандартной топологией. На множестве пар точка-вектор $(x, v) \in \widehat{M}^6$, где x лежит на границе билиардного стола D , введем отношение эквивалентности $\sim$, определяющее динамику частицы в граничных точках D . Множество $M^6 = \widehat{M}^6 / \sim$, наделенное фактор-топологией, и есть *фазовое пространство трехмерного билиарда с проскальзыванием*. Отметим, что функция $H = \|v\|^2/2$ является первым интегралом трехмерного билиарда с проскальзыванием, непрерывно зависящим от точки M^6 .

Фазовое пространство M^6 трехмерного билиарда с проскальзыванием является, вообще говоря, кусочно-гладким многообразием. Обозначим через $\widetilde{M}^6$ объединение гладких кусков M^6 . Отметим, что на $\widetilde{M}^6$ корректно определена форма $\omega = dv_x \wedge dx + dv_y \wedge dy + dv_z \wedge dz$ (здесь v_x, v_y, v_z — компоненты вектора скорости в декартовых координатах), которая обладает непрерывным пределом в точках излома M^6 (т.е. на границе стола D). Для таких систем А. Т. Фоменко было предложено понятие *гамильтонова сглаживания*. Будем говорить, что на M^6 задана *интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система* (в кусочно-гладком смысле) с функцией Гамильтона H , если

1. на $\widetilde{M}^6$ динамика точки определяется векторным полем

$$\text{sgrad } H = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j};$$

2. существуют непрерывные на M^6 и гладкие на $\widetilde{M}^6$ функции F_1, F_2 такие, что набор H, F_1, F_2 является инволютивным и функционально независимым в $\widetilde{M}^6$.

В некоторых случаях удастся ввести гладкую структуру во всех точках “излома” многообразия M^6 так, что форма ω и функции H, F_1, F_2 тоже становились бы гладкими. Вопрос сглаживания многообразия M^6 рассматривался В. Лазуткиным [25] и Е. А. Кудрявцевой [26].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Трехмерный билиард с проскальзыванием является интегрируемой системой в кусочно-гладком смысле.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, рассмотрим классический бильярд (т.е. без проскальзывания) внутри допустимого бильярдного стола. Согласно теореме Якоби-Шаля такая динамическая система является интегрируемой. Ее первыми интегралами являются кинетическая энергия H , а также параметры двух квадрик $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$ софокусных с границей стола, которых касаются все прямолинейные участки траектории или их продолжения. Покажем, что эти же функции H , Λ_1 , Λ_2 являются первыми интегралами рассматриваемой задачи.

Если прямая, проведенная из точки $P \in f$ в направлении вектора v касается софокусной квадрики Q , то прямая, проведенная из этой же точки в направлении вектора $v' = v - 2(v, n_f)n_f$, также касается Q (это следует из интегрируемости классического софокусного бильярда). Однако при проскальзывании точка P переходит в $AP = -P$, а вектор v в $Av - 2(Av, n_f)n_f$, т.е. в $Av' = -v'$. Остается заметить, что уравнения софокусных квадрик не содержат линейной части, а следовательно, если прямая из точки P с вектором скорости v' касается Q , то прямая, проведенная из точки AP с направляющим вектором Av' , также касается Q . $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При различных положительных значениях h_i энергии H система бильярда на изоэнергетических поверхностях $Q_{h_i}^5 = \{(x, v) \in M^6 | H(x, v) = h\}$ "устроена одинаково". Действительно, увеличивая или уменьшая энергию материальной точки, мы изменяем скорость ее движения, не меняя при этом траектории на столе. Поэтому далее мы будем рассматривать бильярды в ограничении на их изоэнергетические поверхности.

В заключении параграфа напомним уравнения движения трехмерного бильярда с проскальзыванием на изоинтегральной поверхности $H = h$, $\Lambda_1 = l_1$, $\Lambda_2 = l_2$. Для этого рассмотрим функции $I_1 = H(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ и $I_2 = H\Lambda_1\Lambda_2$. Они тоже являются первыми интегралами нашей задачи и в декартовых координатах вычисляются по формулам:

$$I_1 = \frac{b+c}{2}\dot{x}^2 + \frac{a+c}{2}\dot{y}^2 + \frac{a+b}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2),$$

$$I_2 = \frac{bc}{2}\dot{x}^2 + \frac{ac}{2}\dot{y}^2 + \frac{ab}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}(aK_x^2 + bK_y^2 + cK_z^2),$$

где K_x, K_y, K_z — компоненты вектора кинетического момента. Эти формулы легко получить, выписав условие касания квадрики.

Переходя к эллиптическим координатам $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и сопряженным им импульсам (p_1, p_2, p_3) , преобразуем функции H, I_1, I_2 к следующему виду.

$$H = 2\frac{(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}p_1^2 + 2\frac{(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}p_2^2 + 2\frac{(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}p_3^2,$$

$$I_1 = 2\frac{(\lambda_2+\lambda_3)(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}p_1^2 + 2\frac{(\lambda_1+\lambda_3)(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}p_2^2 +$$

$$+ 2\frac{(\lambda_1+\lambda_2)(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}p_3^2,$$

$$I_2 = 2\frac{\lambda_2\lambda_3(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}p_1^2 + 2\frac{\lambda_1\lambda_3(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}p_2^2$$

$$+ 2\frac{\lambda_1\lambda_2(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}p_3^2,$$

Отсюда с учетом уравнений Гамильтона приходим к следующим уравнениям движения.

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} \sqrt{(H\lambda_i^2 - I_1\lambda_i + I_2)(a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i)}.$$

Ввиду зависимости I_1, I_2 от Λ_1 и Λ_2 получаем уравнения движения на изоинтегральной поверхности.

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} \sqrt{h(\lambda_i - l_1)(\lambda_i - l_2)(a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i)}. \quad (2)$$

Эти формулы нам понадобятся в дальнейшем.

Далее мы остановимся на двух видах трехмерных билиардов: билиард с проскальзыванием внутри эллипсоида, а также билиард внутри бесфокусного стола с проскальзыванием на одной паре противоположных граней. Для каждой из этих систем в следующем параграфе мы определим топологические типы поверхностей постоянной энергии, после чего, в четвертом и пятом параграфах опишем локальное устройство их слоений Лиувилля.

3. Топология изоэнергетических поверхностей

В настоящем параграфе мы определим классы гомеоморфности изоэнергетических поверхностей Q^5 билиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида, а также билиарда в бесфокусной области с проскальзыванием на одной паре противоположных граней.

Чем примечательны эти системы? Конфигурационные пространства таких билиардов естественным образом двулистно накрываются конфигурационными пространствами других известных интегрируемых гамильтоновых систем.

Действительно, конфигурационное пространство билиарда внутри эллипсоида есть трехмерное проективное пространство $\mathbb{R}P^3$, которое получается факторизацией трехмерной сферы S^3 по инволюции центральной симметрии. Для того чтобы явно описать это накрытие, склеим две одинаковых области D_1 и D_2 , ограниченные эллипсоидом, по их границе. В результате мы получим комплекс X , гомеоморфный трехмерной сфере. Заметим, что X не что иное, как (простейшая) трехмерная билиардная книжка. Инволюцию α на этом комплексе зададим так: если $P \in D_1$, то через $\alpha(P)$ объявим точку центрально симметричную точке P , лежащую на листе D_2 , и наоборот. При этом, отметим, что факторизация произвольной билиардной траектории на X есть траектория билиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида. Это означает, что инволюция α продолжается до инволюции на изоэнергетической поверхности $\tilde{Q}^5$ билиарда на книжке X , а фактор по этой инволюции есть изоэнергетическая поверхность Q^5 билиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида.

Аналогичные соображения сработают и для бесфокусного билиарда с проскальзыванием. Для этого нужно рассмотреть две копии такого стола и склеить их по соответствующим участкам границы, на которых определено проскальзывание. Применим эти рассуждения для нахождения топологических типов поверхностей Q^5 .

ТЕОРЕМА 1. *Изоэнергетическая поверхность Q^5 билиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида гомеоморфна почти прямому произведению $(S^3 \times S^2)/\mathbb{Z}_2(\alpha)$, где инволюция α действует на сомножителях центральной симметрией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что конфигурационное и фазовое пространства геодезического потока на стандартной трехмерной сфере гомеоморфны соответствующим пространствам билиарда на трехмерной книжке X , описанной выше. Поэтому если рассмотреть геодезический поток на стандартной сфере S^3 , а затем отождествить пары $(P, v), (-P, -v)$ для всех $P \in S^3, v \in T_P S^3$, то фазовое пространство этой системы будет гомеоморфно Q^5 .

Поскольку сфера S^3 — группа Ли (изоморфная $SU(2)$), многообразие $M = \{(g, v) | g \in SU(2), v \in T_g SU(2), \|v\| = 1\}$ единичных касательных векторов к ней диффеоморфно прямому произведению двумерной и трехмерной сфер. Действительно, этот диффеоморфизм φ можно

построить так: $\forall g \in SU(2), v \in T_g SU(2), \|v\| = 1$ положим

$$\varphi(g, v) = (g, dL_{g^{-1}}v) \in SU(2) \times S^2 \cong S^3 \times S^2,$$

где через $L_{g^{-1}}$ обозначен левый сдвиг группы $SU(2)$ на элемент g^{-1} .

Склейка диаметрально противоположных точек на сфере S^3 эквивалентна факторизации группы $SU(2)$ по подгруппе $\mathbb{Z}_2 = \langle -E \rangle$ (т.е. порожденной матрицей $-E$). Эта подгруппа действует и на фазовом пространстве, и на поверхностях постоянной энергии геодезического потока на сфере S^3 . Ее действие как раз и порождает склейку пар точка-вектор, описанную выше. Остается заметить, что в силу коммутативности этой подгруппы $\langle -E \rangle$ в $SU(2)$ она действует на произведении $S^3 \times S^2$ центральной симметрией на обоих сомножителях. $\square$

Теперь определим классы гомеоморфности изоэнергетических поверхностей бильярдов с проскальзыванием на бесфокусном столе. Для этого, как и в случае эллипсоида, упростим конфигурационное пространство системы. Вместо бесфокусного стола мы можем рассмотреть куб, одной паре граней которого сопоставим эллипсоид границы, второй — однополостный гиперболоид, третьей — двуполостный гиперболоид. Нетрудно убедиться, что при таком преобразовании фазовое пространство и изоэнергетическая поверхность не изменят класс гомеоморфности.

ТЕОРЕМА 2. *Изоэнергетическая поверхность Q^5 бильярда в бесфокусной области с проскальзыванием на одной паре противоположных граней гомеоморфна почти прямому произведению $(S^1 \times S^4)/\mathbb{Z}_2(\alpha)$, где инволюция α действует на каждом сомножителе центральной симметрией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было отмечено выше, мы можем рассматривать бильярд внутри куба, на одной паре граней которого задано проскальзывание. Заметим, что фазовое пространство (а также изоэнергетические поверхности) рассматриваемого бильярда двулистно накрывается фазовым пространством (соответственно изоэнергетическими поверхностями) бильярда внутри трехмерной области D , получаемой следующим образом. Рассмотрим два одинаковых прямоугольных параллелепипеда, выберем на каждом из них по одной паре противоположных граней, а затем склеим эти параллелепипеды по выбранным граням.

Отметим, что область D представляет собой полноторие, которое получается вращением квадрата вдоль некоторой оси. Обозначим это полноторие через K . Мы утверждаем, что изоэнергетическая поверхность $\tilde{Q}^5$ бильярда внутри K гомеоморфна прямому произведению окружности и четырехмерной сферы. Тот факт, что $\tilde{Q}^5$ обладает тривиальным S^1 расслоением, является довольно очевидным. Действительно, полноторие K обладает тривиальным S^1 расслоением и на каждом его слое ограничение $\tilde{Q}^5$ “устроено одинаково”. Остается показать, что ограничение $\tilde{Q}^5$ на каждый такой слой полнотория K гомеоморфно сфере S^4 . Опишем устройство этого ограничения.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ плоский квадрат $R = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, z = 0\}$. В каждой точке этого квадрата рассмотрим единичную сферу касательных векторов со следующим отношением эквивалентности на границе R :

$$(P, v) \sim (P, v'), \quad \text{где } P \in \partial R, \ v, v' \in T_P \mathbb{R}^3, \ \|v\| = \|v'\| = 1, \ v - v' \parallel (0, 0, 1).$$

Введем на этом множестве фактор-топологию и обозначим получившееся топологическое пространство через Q' . По построению ясно, что $\tilde{Q}^5 \cong S^1 \times Q'$.

На пространстве Q' определена и непрерывна функция f , которая паре точка-вектор $(P, v) \in Q'$ сопоставляет третью координату вектора v . Функция f принимает значения на отрезке $[-1, 1]$ и ее поверхности уровня $f^{-1}(t)$ гомеоморфны друг другу при $t \in (-1, 1)$. При этом, $f^{-1}(1)$ и $f^{-1}(-1)$ гомеоморфны двумерным дискам. Заметим, что $f^{-1}(0)$ есть изоэнергетическая поверхность бильярда внутри квадрата R . Поэтому согласно результатам В. В. Ведюшкиной поверхность $f^{-1}(0)$ гомеоморфна трехмерной сфере S^3 .

Итак, согласно приведенным выше результатам для всех $t \in (-1, 1)$ поверхность $f^{-1}(t)$ гомеоморфна трехмерной сфере S^3 , а при $t = \pm 1$ — двумерному диску. Отсюда заключаем, что Q' гомеоморфна четырехмерной сфере S^4 (трехмерные сферы стягиваются к двумерным дискам). Более строгое доказательство этого факта читатель может найти в [24].

Итак, мы показали, что $\tilde{Q}^5 \cong S^1 \times S^4$, а следовательно, $Q^5 = (S^1 \times S^4)/\mathbb{Z}_2$. Осталось описать действие факторизующей инволюции. Совершенно ясно, что она склеивает диаметрально противоположные точки окружности. Чуть менее очевидно устроена инволюция на сфере S^4 . Тем не менее, аккуратно выписав условия склейки области D , можно убедиться, что и на S^4 группа $\mathbb{Z}_2$ склеивает диаметрально противоположные точки. Таким образом, теорема доказана. $\square$

4. Биллиард внутри эллипсоида с проскальзыванием

Цель настоящего параграфа — изучить топологию слоения Лиувилля биллиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида. Согласно замечанию 2 на различных поверхностях постоянной энергии Q_h^5 слоение Лиувилля этой системы устроено одинаково. Поэтому мы зафиксируем уровень $h = 1$ и опишем топологию слоения Лиувилля на Q_1^5 . Далее нижний индекс у Q_1^5 писать не будем ввиду его неинформативности.

Без ограничения общности можем считать, что параметр c семейства софокусных квадрик положителен. Рассмотрим биллиард с проскальзыванием внутри эллипсоида параметра 0. Отметим, что траектория биллиардного стола не может касаться двух софокусных квадрик положительной гауссовой кривизны. Следовательно, дополнительные первые интегралы Λ_1 и Λ_2 нашего биллиарда удовлетворяют следующим ограничениям: $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$, $\Lambda_1 \in [c, a]$, $\Lambda_2 \in [0, b]$. Отсюда заключаем, что образ отображения момента $\mathcal{F} : Q^5 \rightarrow \mathbb{R}^2(\Lambda_1, \Lambda_2)$ представляет собой многоугольник, изображенный на рисунке 4а.

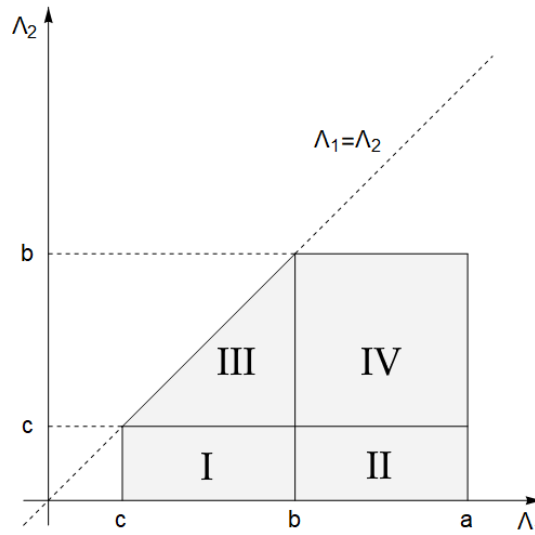


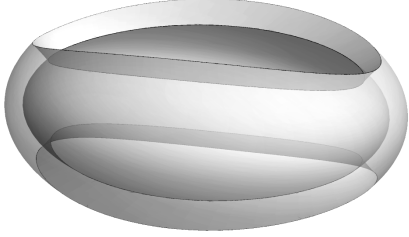
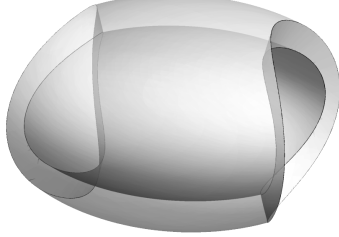
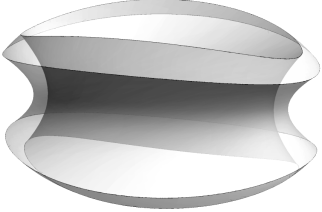
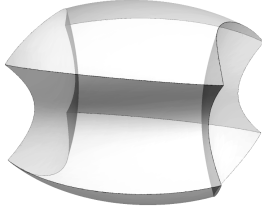
Рис. 4: Образ отображения момента $\mathcal{F} : Q^5 \rightarrow \mathbb{R}^2(\Lambda_1, \Lambda_2)$ трехмерного биллиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида. Черными сплошными линиями выделена бифуркационная диаграмма. Римскими цифрами пронумерованы камеры диаграммы.

Заметим, что вид области возможного движения (далее ОВД) может измениться либо на прямых $\Lambda_1 = b$, $\Lambda_2 = c$, либо на границе образа отображения момента. Действительно, на прямых $\Lambda_1 = b$, $\Lambda_2 = c$ меняется тип квадрики-каустики, а на границе образа отображения момента появляются/исчезают слои системы. Таким образом, граница образа отображения

момента, а также отрезки прямых $\Lambda_1 = b$, $\Lambda_2 = c$ составляют *бифуркационную диаграмму* нашего билиарда. Точки образа отображения момента, не лежащие на бифуркационной диаграмме, будем называть *регулярными*. Слои Лиувилля, отвечающие регулярным точкам, тоже будем называть *регулярными*.

Исходя из уравнений 2, опишем типичные области возможного движения. Все они представлены в таблице 1. Каждая из них отвечает ровно одной камере бифуркационной диаграммы. Нумерация ОВД совпадает с нумерацией соответствующих камер.

Таблица 1: Области возможного движения общего положения

I $0 < \Lambda_2 < c < \Lambda_1 < b$ 	II $0 < \Lambda_2 < c < b < \Lambda_1 < a$ 
III $c < \Lambda_2 < \Lambda_1 < b$ 	IV $c < \Lambda_2 < b < \Lambda_1 < a$ 

Следующая теорема описывает устройство слоения Лиувилля в окрестности регулярных слоев.

ТЕОРЕМА 3. *Регулярные слои трехмерного билиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида гомеоморфны трехмерному тору. Слоение Лиувилля вблизи регулярных слоев тривиально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обусловимся нумеровать камеры бифуркационной диаграммы номерами соответствующих им типов областей возможного движения из таблицы 1. Мы докажем теорему для точек камеры I. Остальные случаи разбираются аналогично.

Пусть $P = (l_1, l_2) \in \text{I}$. Обозначим через D_P соответствующую ОВД, а через T_P — поверхность совместного уровня, отвечающего точке P . В каждой точке $x \in D_P$ рассмотрим все векторы v такие, что $(x, v) \in T_P$. Согласно уравнениям движения 2 каждой внутренней точке D_P , не лежащей ни в одной из координатных плоскостей, отвечают в точности 8 таких векторов. Действительно, в этих точках эллиптические координаты удовлетворяют ограничениям $\lambda_1 \in (0, l_1)$, $\lambda_2 \in (c, l_2)$, $\lambda_3 \in (b, a)$, а следовательно, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Более подробный анализ показывает, что оставшимся внутренним точкам области D_P также отвечают 8 векторов скорости.

В каждой гладкой грани границы области D_P в силу билиардного закона и уравнений 2 возникают в точности 4 пары неэквивалентных векторов, в то время как на ребрах излома — 2 пары.

Используя знания о расположении векторов скорости в точках ОВД, опишем слой T_P . Для этого введем обозначения векторов скорости внутренних точек области D_P , не лежа-

щих в координатных плоскостях. Отметим, что плоскости $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ разбивают D_P на 8 компонент связности. Рассмотрим произвольную точку любой из этих восьми компонент. Тогда каждый касательный вектор в ней можно однозначно закодировать набором знаков $(\text{sign } \dot{\lambda}_1, \text{sign } \dot{\lambda}_2, \text{sign } \dot{\lambda}_3)$. Занумеруем также координатные октанты: через $(>, <, >)$ будем обозначать октант $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$ и т.д. Используя эту кодировку, заполним таблицу обозначений.

Таблица 2: Ваша таблица

	$(+, +, +)$	$(-, +, +)$	$(-, -, +)$	$(+, -, +)$	$(+, +, -)$	$(-, +, -)$	$(-, -, -)$	$(+, -, -)$
$(>, >, >)$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
$(<, >, >)$	v_5	v_6	v_7	v_8	v_1	v_2	v_3	v_4
$(>, >, <)$	v_2	v_1	v_3	v_3	v_6	v_5	v_8	v_7
$(<, >, <)$	v_6	v_5	v_8	v_7	v_2	v_1	v_3	v_3
$(>, <, >)$	v_4	v_3	v_2	v_1	v_8	v_7	v_6	v_5
$(<, <, >)$	v_8	v_7	v_6	v_5	v_4	v_3	v_2	v_1
$(>, <, <)$	v_3	v_4	v_1	v_2	v_7	v_8	v_5	v_6
$(<, <, <)$	v_7	v_8	v_5	v_6	v_3	v_4	v_1	v_2

Отметим, что одному и тому же набору знаков мы сопоставили разные обозначения векторов. Однако такая нумерация выбрана не случайно. Все дело в том, что векторные поля v_i можно непрерывно продолжить на все множество D_P . Более того, продолжения векторных полей v_i будут гладкими внутри D_P .

Векторные поля $v_1, \dots, v_8$ разбивают поверхность T_P на 8 компонент связности, каждая из которых гомеоморфна области D_P . Обозначим эти компоненты через $D_1, \dots, D_8$ соответственно. В силу билиардного отражения, а также устройства D_P заключаем, что D_1 и D_4 , D_2 и D_3 , D_5 и D_8 , D_6 и D_7 отождествляются на внутренней эллиптической границе, а D_1 и D_2 , D_3 и D_4 , D_5 и D_6 , D_7 и D_8 — на гиперболических. В силу проскальзывания на границе стола D_1 и D_4 , D_2 и D_3 , D_5 и D_8 , D_6 и D_7 склеиваются с “перекруткой” (точка x на большой эллиптической границе D_i отождествляется с точкой $-x \in D_j$). При склейке областей D_i по соответствующим границам, получим два трехмерных тора T^3 , которые будут составлены из компонент $D_1, \dots, D_4$ и $D_5, \dots, D_8$. Таким образом, первую часть теоремы мы доказали.

Осталось отметить, что при малом изменении точки P область возможного движения не поменяет свой тип, а векторные поля v_i будут непрерывно меняться. Значит, вблизи T_P слоение Лиувилля тривиально. Что и требовалось доказать. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Таким образом, для билиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида выполнен кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля. Отметим, что рассуждения в доказательстве теоремы 3 справедливы не только для эллипсоида но и для других допустимых билиардных столов.

Теперь опишем топологию слоения Лиувилля вблизи нерегулярных слоев. Для этого напомним понятие 2-атома, введенное А. Т. Фоменко (см., например, [27]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $f = c$ — критическое значение функции Морса на компактном ориентируемом многообразии M^2 . Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано так, что на отрезке $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ точка c является единственным критическим значением f . Связная компонента множества $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$, расслоенная на линии уровня функции f , называется 2-атомом.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Все 2-атомы рассматриваются с точностью до послойного диффеоморфизма.

Приведем несколько примеров 2-атомов. Согласно лемме Морса в окрестности невырожденной особой точки P функция f приводится к виду $f = f(P) \pm x^2 \pm y^2$. Поэтому, если P — точка минимума или максимума, 2-атом, отвечающий ей, представляет собой круг, расложенный семейством концентрических окружностей (см. рис. 5.a). Такой атом называется 2-атомом A . Атомов, отвечающих седловым особенностям, бесконечно много. В настоящей работе нам понадобятся только два из них: B и C_2 . Они изображены на рисунках 5.b и 5.c соответственно. Отметим, что атомы B и C_2 являются центрально симметричными.

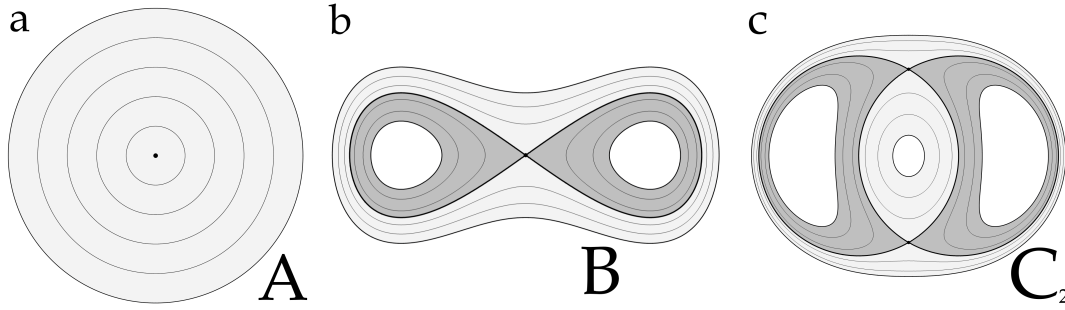


Рис. 5: Примеры 2-атомов: а) A ; б) B ; в) C_2 .

Согласно результатам Н. Т. Зунга, слоение Лиувилля в окрестности многих седловых невырожденных особенностей представимо в виде почти прямого произведения 2-атомов (см., например, [28]). Для произвольных невырожденных особенностей сложности 1 систем с 2 степенями свободы реализация их топологических инвариантов в классе биллиардных книжек с потенциалом Гука была выполнена в работе В.А.Кибкало и А.Т.Фоменко [29]. Реализация произвольных полулокальных фокусных особенностей системы с 2 степенями свободы также была получена в [30]. Оказывается, аналогичное представление справедливо для невырожденных особенностей биллиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида.

Заметим, что на бифуркационной диаграмме имеется ровно одна точка типа *крест*: (b, c) (см. рис. 4). Если мы опишем слоение Лиувилля вблизи слоя, отвечающего этой точке, то будет ясно, какие бифуркации происходят на прямых $\Lambda_1 = b$ и $\Lambda_2 = c$. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Малая окрестность слоя, отвечающего точке (b, c) , в Q^5 послойно гомеоморфна произведению $S^1 \times \frac{C_2 \times C_2}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$, где инволюция α действует центральной симметрией на каждом из 2-атомов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим точку креста (b, c) через P , слой слоения Лиувилля, соответствующий ей — через T_P , а малую замкнутую окрестность слоя T_P — через U . Точке P отвечают две критические окружности, возникающие при движении частицы вдоль оси Ox (по и против ее направления). Окружность, соответствующую движению материальной точки в направлении оси Ox , обозначим через $\gamma(P)$. Оказывается, что на близких к T_P торах Лиувилля $T_{P'}$ можно выбрать базисный цикл $\gamma(P')$, гомологичный $\gamma(P)$, который при стремлении P' к P перейдет в $\gamma(P)$. Это наглядно показано на рисунке 6 для всех четырех видов торов Лиувилля близких к T_P .

На самом деле, этот факт говорит о наличии тривиального S^1 расслоения окрестности U . Ниже мы схематично докажем его с помощью переменных действия.

Из результатов В.Ф.Лазуткина [25] следует (см. также работу Е.А.Кудрявцевой [26]), что биллиард с проскальзыванием внутри эллипсоида является сглаживаемой системой, а формы

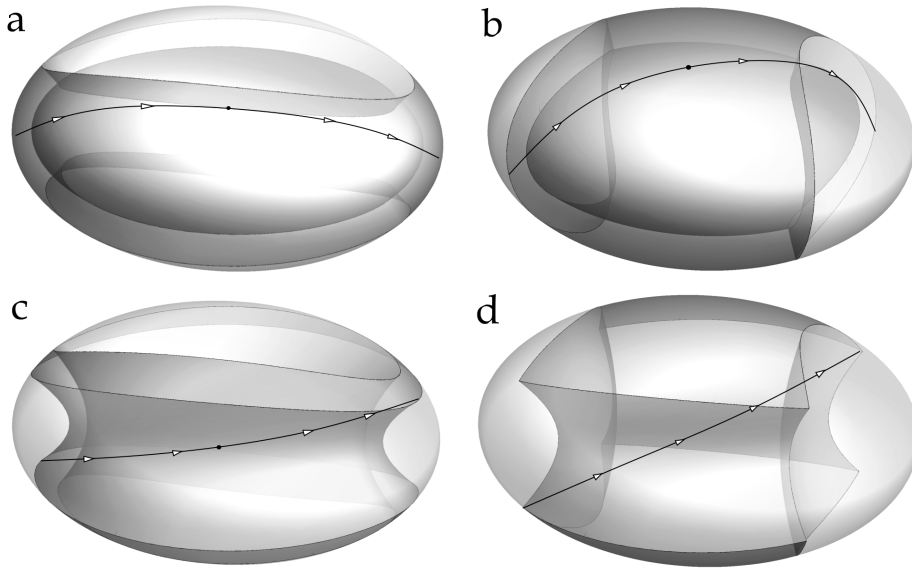


Рис. 6: Цикл $\gamma(P')$ на торах Лиувилля $T_{P'}$, близких к изоинтегральной поверхности L .

Выделенные точки есть точки касания цикла $\gamma(P')$ и эллипсоида (в случаях а, б), однополостного гиперболоида (случай с) меньших параметров.

$\alpha = p_1 d\lambda_1 + p_2 d\lambda_2 + p_3 d\lambda_3$ и $\omega = dp_1 \wedge d\lambda_1 + dp_2 \wedge d\lambda_2 + dp_3 \wedge d\lambda_3$ корректно определены на фазовом пространстве билиарда. Определим в малой окрестности слоя T_P в Q^5 на регулярных участках слоения Лиувилля функцию

$$s(P') = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(P')} \alpha.$$

Функция s — не что иное, как переменная действия. Покажем, что она корректно определена в малой окрестности точки P . Для этого найдем ее явную формулу. Согласно уравнениям разделенных переменных (см. 2) справедливы равенства

$$p_i^2 = \frac{H}{2} \frac{(\lambda_i - \Lambda_1)(\lambda_i - \Lambda_2)}{(a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i)} \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Поскольку Q^5 задается уравнением $H = 1$, а цикл γ обходит каждую эллиптическую координату в точности 2 раза, получаем

$$s(\Lambda_1, \Lambda_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\min\{\Lambda_1, c\}} \sqrt{2 \frac{(t - \Lambda_1)(t - \Lambda_2)}{(a - t)(b - t)(c - t)}} dt + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\max\{c, \Lambda_1\}}^{\min\{\Lambda_2, b\}} \sqrt{2 \frac{(t - \Lambda_1)(t - \Lambda_2)}{(a - t)(b - t)(c - t)}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\max\{b, \Lambda_2\}}^a \sqrt{2 \frac{(t - \Lambda_1)(t - \Lambda_2)}{(a - t)(b - t)(c - t)}} dt.$$

На первый взгляд может показаться, что функция s является разрывной. Однако оказывается, что это не так.

ЛЕММА 1. *Функция s является аналитической в малой окрестности точки P .*

Доказательство леммы 1. Пусть $\Lambda_1 \neq b$, $\Lambda_2 \neq c$. Рассмотрим на комплексной плоскости контур C , изображенный на рисунке 7. Он состоит из верхней полуокружности l , соединяющей точки 0 и a , четырех верхних полуокружностей l_ε радиусов ε с центрами в точках $c, b, \Lambda_1, \Lambda_2$ и пяти отрезков. Выберем на контуре положительное направление обхода. Пусть

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2(z - \Lambda_1)(z - \Lambda_2)}{(a - z)(b - z)(c - z)}}.$$

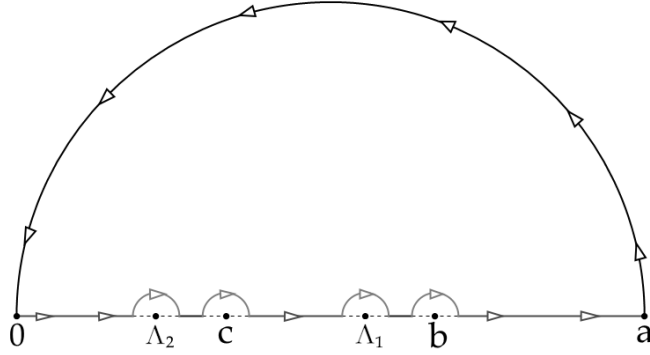


Рис. 7: Контур интегрирования. Черным выделена дуга l .

Согласно теореме Коши об интеграле по замкнутому контуру

$$0 = \oint_{C^+} f(z) dz = \int_{l^+} f(z) dz + I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) + I_3(\varepsilon), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= \int_0^{\min\{\Lambda_1, c\} - \varepsilon} f(z) dz + \int_{\max\{c, \Lambda_1\} + \varepsilon}^{\min\{\Lambda_2, b\} - \varepsilon} f(z) dz + \int_{\max\{b, \Lambda_2\} - \varepsilon}^a f(z) dz, \\ I_2(\varepsilon) &= \int_{\min\{\Lambda_1, c\} + \varepsilon}^{\max\{\Lambda_1, c\} - \varepsilon} f(z) dz + \int_{\min\{b, \Lambda_2\} + \varepsilon}^{\max\{\Lambda_2, b\} - \varepsilon} f(z) dz, \\ I_3(\varepsilon) &= \int_{l_\varepsilon^-(\xi_1)} f(z) dz + \int_{l_\varepsilon^-(\xi_1)} f(z) dz + \int_{l_\varepsilon^-(\xi_2)} f(z) dz + \int_{l_\varepsilon^-(c)} f(z) dz + \int_{L_\varepsilon^-(b)} f(z) dz. \end{aligned}$$

Заметим, что $s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1(\varepsilon)$, а выражение $I_2(\varepsilon)$ является чисто мнимым. При этом, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_3(\varepsilon) = 0$. Последний факт следует из стандартного неравенства:

$$\left| \oint_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot |\gamma|.$$

Таким образом,

$$s = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{l^-} \sqrt{\frac{2(z - \Lambda_1)(z - \Lambda_2)}{(a - z)(b - z)(c - z)}} dz.$$

Ввиду отсутствия на дуге l особых точек $c, b, \Lambda_1, \Lambda_2$ функция s корректно определена и является аналитической в малой окрестности точки P . Лемма 1 доказана. ■

Далее, используя методы интегрирования функции комплексного переменного, можно показать, что в окрестности U дифференциал функции s не обращается в ноль, более того, векторное поле $v = \text{sgrad } s$ трансверсально подмногообразию с краем $\hat{M} \subset Q^5$, задаваемому уравнением $x = 0$.

Поскольку s — переменная действия, согласно классической теории интегрируемых гамильтоновых систем, траектории поля $v = \text{sgrad } s$ замкнуты, а интегральные кривые являются 2π -периодическими. Более того, траектории v , “живущие” на слое $T_{P'}$, гомологичны циклам $\gamma(P')$, которые по своему определению гомологичны $\gamma(P)$.

Рассмотрим задачу Коши векторного поля v с начальными точками на многообразии $\hat{M}$. Получаем поток g_t , под действием которого многообразие $\hat{M}$ деформируется внутри Q^5 . Однако заметим, что $g_{2\pi} = g_0 = \text{id}$. Иными словами, за время $t = 2\pi$ многообразие $\hat{M}$ возвращается в исходное положение. Таким образом, мы получаем отображение $G : \hat{M} \times S^1 \rightarrow U$, которое действует по формуле $G(x, t) = g_t(x)$. Перечислим свойства этого отображения.

1. Отображение G непрерывно. Этот факт следует из теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных.
2. Отображение G биективно. Действительно, многообразие $\hat{M}$ пересекает каждый тор Лиувилля $T_{P'}$ близкий к слою T_P по двумерному тору $\tilde{T}_{P'}$. При этом, векторное поле $v = \text{sgrad } s$ будет трансверсальным к $\tilde{T}_{P'}$. А значит, интегральные траектории поля v , проведенные из разных точек $\tilde{T}_{P'}$, пересекаются не будут. Отсюда заключаем инъективность отображения G на каждом из торов $\tilde{T}_{P'} \times S^1$. Если дополнить произвольный базис на этом двумерном торе $\tilde{T}_{P'}$ циклом $\gamma(P')$, полученная тройка будет базисом в группе гомологий тора $T_{P'}$. Следовательно, весь тор Лиувилля $T_{P'}$ накрывается отображением G . Отсюда нетрудно показать биективность G на всем произведении $\hat{M} \times S^1$.

Поскольку $\hat{M}$ и S^1 компактны, а отображение G — непрерывная биекция, то G — гомеоморфизм.

Ограничим слоение Лиувилля в Q^5 на $\hat{M}$ и продолжим его на $\hat{M} \times S^1$, тривиально умножив каждый слой на окружность. Согласно построению отображение G является послойным гомеоморфизмом. Поэтому, для того чтобы описать слоение Лиувилля в окрестности U , необходимо выяснить, как устроено слоение Лиувилля в $\hat{M}$.

Рассмотрим уравнения движения 2, индуцированные на $\hat{M}$. Поскольку на $\hat{M}$ зафиксирована третья эллиптическая координата λ_1 , изучим дифференциальные уравнения на λ_2 и λ_3 . Имеем:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= \pm \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(a - \lambda_1)} \sqrt{(\lambda_1 - \Lambda_1)(\lambda_1 - \Lambda_2)(a - \lambda_1)(b - \lambda_1)(c - \lambda_1)}, \\ \dot{\lambda}_2 &= \pm \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(a - \lambda_2)} \sqrt{(\lambda_2 - \Lambda_1)(\lambda_2 - \Lambda_2)(a - \lambda_2)(b - \lambda_2)(c - \lambda_2)}.\end{aligned}$$

Поскольку $\lambda_1, \lambda_2 < a$, слоение Лиувилля на $\hat{M}$ будет совпадает с соответствующим слоением системы, уравнения движения которой имеют следующий вид.

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= \pm \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{(\lambda_1 - \Lambda_1)(\lambda_1 - \Lambda_2)(b - \lambda_1)(c - \lambda_1)} \\ \dot{\lambda}_2 &= \pm \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{(\lambda_2 - \Lambda_1)(\lambda_2 - \Lambda_2)(b - \lambda_2)(c - \lambda_2)}\end{aligned}$$

Однако мы должны учесть, что при проскальзывании в точке вида $(0, y, z)$ первая координата вектора скорости меняет свой знак. Это равносильно переходу материальной точки с листа на лист бильярдной книжки, склеенной из двух эллипсов. Таким образом, для описания слоения Лиувилля на $\hat{M}$ необходимо понять, какая динамическая система на бильярдной книжке из двух склеенных эллипсов задается приведенной выше системой уравнений.

Оказывается, аналогичным уравнениям удовлетворяет софокусный бильярд с потенциалом Гука (см., например, [31]). Поскольку $h > 0$ и бильярдная книжка, описанная выше, представляет собой двумерный эллипсоид, слоение Лиувилля на многообразии $\hat{M}$ послойно гомеоморфно малой окрестности особого слоя точки типа седло-седло бильярда с отталкивающим потенциалом Гука на трехосном эллипсоиде. А эта окрестность послойно гомеоморфна почти прямому произведению двух 2-атомов C_2 с инволюцией, отождествляющей центрально симметричные точки атомов. Таким образом, $U \cong S^1 \times \frac{C_2 \times C_2}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$, где α действует центральной симметрией на сомножителях. Теорема доказана. $\square$

Теоремы 3, 4 описывают устройство слоения Лиувилля вблизи слоев, отвечающих внутренним точкам образа отображения момента. В самом конце параграфа мы приведем полный ответ, описывающий устройство слоения Лиувилля рассматриваемого бильярда в окрестности произвольного слоя. Однако перед этим напомним определение двух важных вырожденных особенностей, часто встречающихся в различных интегрируемых гамильтоновых системах двух степеней свободы (см., например, [32]).

Рассмотрим на многообразии $\mathbb{R}^3(x, y, z) \times S^1(\varphi)$ две гладкие функции: $H = z$, $F = x^2 + y^4 - zy^2$. Эти функции задают разбиение многообразия $\mathbb{R}^3(x, y, z) \times S^1(\varphi)$ на связные компоненты их совместного уровня (см. рис. 8).

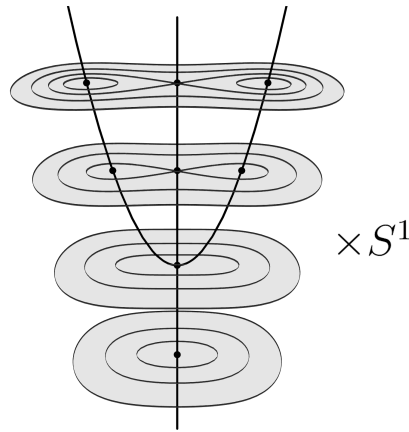


Рис. 8: Слоение особенности “эллиптическая вилка”.

Малая окрестность слоя точки $x = y = z = \varphi = 0$, разбитая на слои, называется *ориентированной эллиптической вилкой*. Будем обозначать ее через PF_o . Заметим, что на вилке PF_o действует группа $\mathbb{Z}_2$, которая сопоставляет точке $\mathbb{R}^3$ симметричную ей относительно оси Oz , а точке окружности S^1 — диаметрально противоположную. Фактор PF_o по этой подгруппе будем называть *неориентированной эллиптической вилкой* и обозначать PF_{no} .

Ниже на рисунке 9 представлено полное описание локального устройства слоения Лиувилля на поверхности постоянной энергии бильярда с проскальзыванием внутри трехосного эллипсоида. Малые окрестности точек стенок и вершин бифуркационной диаграммы пронумерованы римскими и арабскими цифрами. Для каждой из этих окрестностей справа в таблице описан их послойный прообраз при отображении момента.

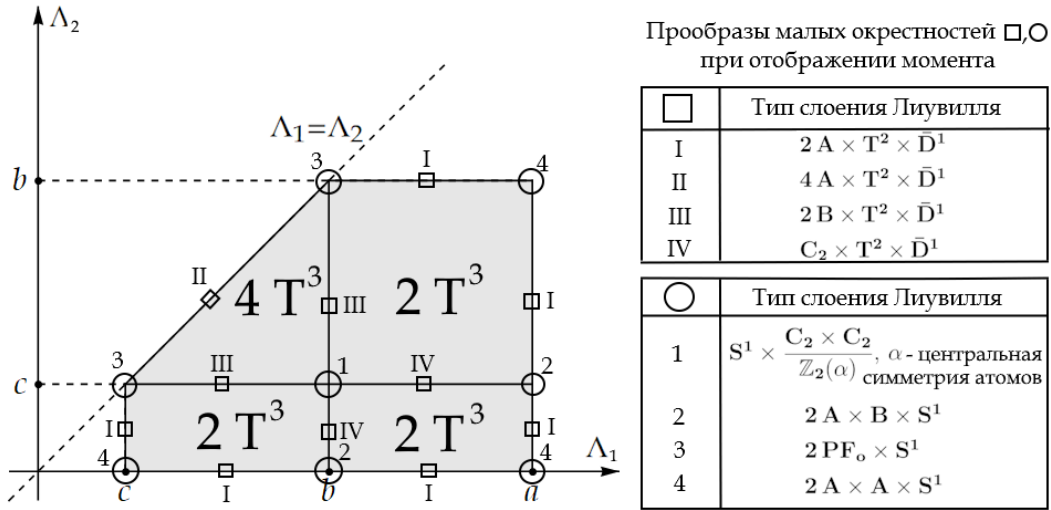


Рис. 9: Слоение Лиувилля на изоэнергетической поверхности билиарда с проскальзыванием внутри трехосного эллипсоида.

5. Билиарды с проскальзыванием в бесфокусной области

В этом параграфе мы опишем локальное устройство слоения Лиувилля билиарда в бесфокусной области с проскальзыванием на одной паре противоположных граней.

Бесфокусный стол обладает тремя парами центрально симметричных граней. Каждая из этих пар лежит либо на эллипсоиде, либо на однополостном гиперboloиде, либо на двуполостном. Присвоим этим парам номера 1, 2 и 3 соответственно. Без ограничения общности будем считать, что параметр граничного эллипсоида равен 0. Параметры граничных однополостного и двуполостного гиперboloидов обозначим через λ' и λ'' соответственно.

Как уже отмечалось, на бесфокусном столе можно задать 7 режимов проскальзывания. Закодируем их векторами длины три из нулей и единиц следующим образом. Вектору $(a_1, a_2, a_3) \in \{0, 1\}^3$ сопоставим режим проскальзывания, при котором на i -й паре граней отражение происходит в том и только том случае, когда $a_i = 0$. В частности, вектор $(0, 0, 0)$ кодирует обычный билиард в бесфокусной области. Нас интересуют режимы $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

На изоэнергетических поверхностях этих билиардов рассмотрим отображение момента $\mathcal{F} : Q^5 \rightarrow \mathbb{R}^2(\Lambda_1, \Lambda_2)$. Заметим, что образ этого отображения является пятиугольником, изображенным на рисунке 10, и не зависит от режима проскальзывания.

Как устроены бифуркационные диаграммы этих систем? Безусловно они обязаны включать в себя границу образа отображения момента, а также отрезки $\Lambda_1 = b$, $\Lambda_2 = c$ (поскольку на них меняется тип одной из каустик). Однако в случаях $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ проскальзывание тоже вносит свой вклад в диаграмму. Действительно, пусть внутренняя точка P образа отображения момента такова, что одна из ее координат равна параметру границы с проскальзыванием. В этом случае в любой сколь угодно малой окрестности P можно выбрать точки P' и P'' такие, что режимы движения, отвечающие значениям P' и P'' пары интегралов (Λ_1, Λ_2) , будут разные. В одном случае материальная точка не будет доходить до границы с проскальзыванием, а в другом — будет проходить сквозь нее и продолжать свое движение из диаметрально противоположной точки стола. Таким образом, бифуркационная диаграмма билиарда $(0, 1, 0)$ обязана содержать отрезок прямой $\Lambda_2 = \lambda'$, а диаграмма билиарда $(0, 0, 1)$ — отрезок прямой $\Lambda_1 = \lambda''$.

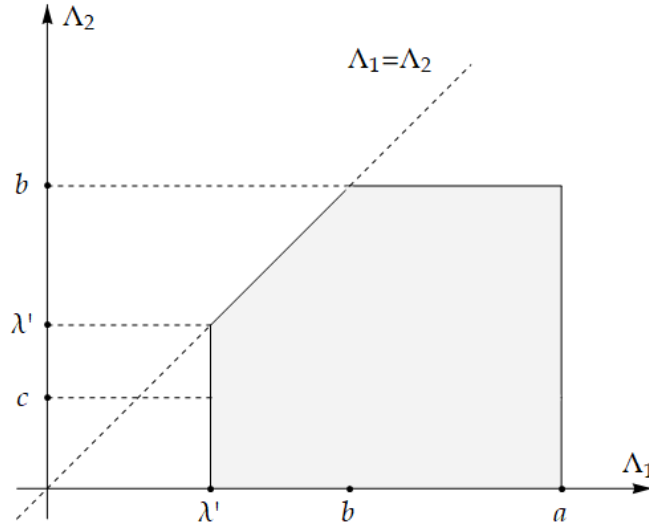


Рис. 10: Образ отображения момента билиарда с проскальзыванием в бесфокусной области.

Итак, бифуркационная диаграмма билиарда $(1, 0, 0)$ содержит ровно одну точку креста — (b, c) , в то время как диаграммы билиардов $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ помимо (b, c) содержат также точки (b, λ') и (λ'', c) соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Точка (b, λ') билиарда $(0, 1, 0)$ соответствует топологически неустойчивой невырожденной особенности ранга 2. Поэтому слоение Лиувилля в малой окрестности слоя, отвечающего этой точке, нельзя описать в виде почти прямого произведения атомов, цилиндров и окружностей.

Согласно замечанию 3 регулярные слои билиарда с проскальзыванием в бесфокусной области гомеоморфны трехмерным торам, а слоение Лиувилля в их малой окрестности тривиально. Следующая теорема описывает устройство слоения Лиувилля вблизи слоев, отвечающих точкам креста (кроме точки (b, λ') билиарда $(0, 1, 0)$).

ТЕОРЕМА 5. Слоение Лиувилля в окрестности точек креста билиардов в бесфокусной области с проскальзыванием на одной паре противоположных граней устанавливает следующая таблица.

Режим	Точка креста	Слоение Лиувилля
$(1, 0, 0)$	(b, c)	$\frac{B \times C_2 \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$
$(0, 1, 0)$	(b, c)	$\frac{B \times C_2 \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$
$(0, 0, 1)$	(b, c)	$2 \frac{B \times B \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$
$(0, 0, 1)$	(λ'', c)	$\frac{B \times C_2 \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$

Здесь α — инволюция центральной симметрии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем идею доказательства этой теоремы. Рассмотрим бесфокусный стол. Координаты точки $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ внутри такого стола ограничены значениями a, b, c сверху

и параметрами граничных квадрик снизу соответственно. Поэтому множители $\lambda_i - \lambda_j$, $\lambda_i - \lambda_k$ в знаменателях уравнений 2 можно отбросить, так как они не влияют на топологию слоения Лиувилля. В итоге, переменные в уравнениях 2 полностью разделились.

Теперь возьмем 2 экземпляра бесфокусного стола с проскальзыванием и склеим соответствующие грани, на которых оно было введено. Данный комплекс будет двулисто накрывать исходный билиардный стол с проскальзыванием. Более того, как отмечалось в доказательстве теоремы 2 при таком двулистном накрытии столов происходит двулистное накрытие соответствующих изоэнергетических поверхностей. Однако заметим, что в накрытии система уравнений движения останется прежней, а накрывающий билиардный стол разложится в прямое произведение одномерных столов. Поскольку переменные в уравнениях движения полностью разделены, слоение Лиувилля в малой окрестности точки креста в накрывающем Q^5 раскладывается в прямое произведение окружностей и окрестностей слоев невырожденных особенностей систем одной степени свободы, т.е. 2-атомов. Остается вычислить фактор от таких произведений по накрывающей инволюции. В результате получим устройство слоения Лиувилля в окрестности точек креста. $\square$

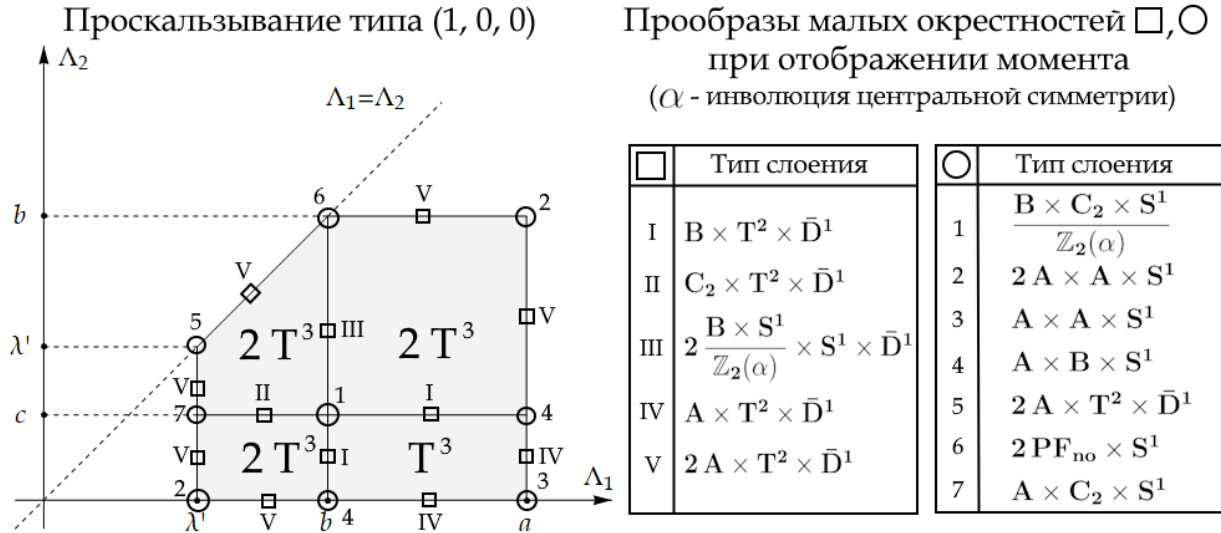


Рис. 11: Слоение Лиувилля билиарда с проскальзыванием типа $(1, 0, 0)$ в бесфокусной области.

На рисунках 11, 12, 13 мы приводим описание локального устройства слоения Лиувилля билиардов на бесфокусном столе с режимами проскальзывания $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. В тех случаях, когда окрестность слоя можно представить в виде почти прямого произведения 2-атомов и окружностей, мы запишем ответ именно в такой форме. Однако напомним, что почти прямое произведение $\frac{B \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$, где α — инволюция центральной симметрии, гомеоморфно 3-атому A^* , а произведение $\frac{C_2 \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$ — прямому произведению 2-атома B и окружности (более подробно см. [27]).

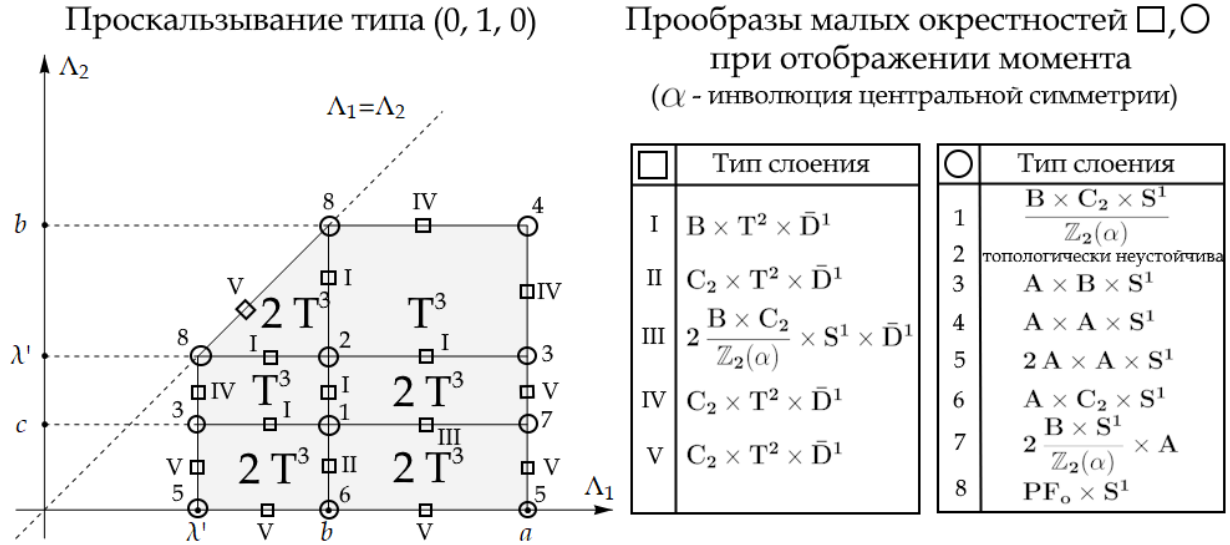


Рис. 12: Слоение Лиувилля биллиарда с проскальзыванием типа $(0, 1, 0)$ в бесфокусной области.



Рис. 13: Слоение Лиувилля биллиарда с проскальзыванием типа $(0, 0, 1)$ в бесфокусной области.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. Ижевск: Удмуртский университет, 1999. 408 с.
2. Козлов В.В., Трещев Д.В. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 240 с.

3. Dragović V., Radnović M. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards // Regul. Chaotic Dyn. 2009. Vol. 14, no. 4-5. P. 479-494.
4. Драгович В., Раднович М. Интегрируемые билиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010. 338 с.
5. Фокичева В.В. Описание особенностей системы "бильярд в эллипсе" // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2012. № 5. С. 31-34.
6. Фокичева В.В. Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2014. № 4. С. 18-27.
7. Фокичева В.В. Топологическая классификация билиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 10. С. 127-176.
8. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т., Харчева И.С. Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими билиардами // Докл. РАН. 2018. Т. 479, № 6. С. 607-610.
9. Ведюшкина В.В., Харчева И.С. Билиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2018. Т. 209, № 12. С. 17-56.
10. Ведюшкина В.В. Интегрируемые билиарды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе // Матем. сб. 2020. Т. 211, № 2. С. 46-73.
11. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические билиарды // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. Т. 83, № 6. С. 63-103.
12. Fomenko A.T., Vedyushkina V.V., Zav'yalov V.N. Liouville foliations of topological billiards with slipping // Russ. J. Math. Phys. 2021. Vol. 28, no. 1. P. 37-55.
13. Ведюшкина В.В., Завьялов В.Н. Реализация геодезических потоков с линейным интегралом билиардами с проскальзыванием // Матем. сб. 2022. Т. 213, № 12. С. 31-52.
14. Завьялов В.Н. Билиард с проскальзыванием на любой рациональный угол // Матем. сб. 2023. Т. 214, № 9. С. 3-26.
15. Харчева И.С. Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2020. № 4. С. 12-22.
16. Фоменко А.Т., Ведюшкина В.В. Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2019. № 3. С. 15-25.
17. Ведюшкина В.В., Кибкало В.А., Фоменко А.Т. Топологическое моделирование интегрируемых систем билиардами: реализация числовых инвариантов // Докл. РАН. Матем., информ., процессы упр. 2020. Т. 493, № 1. С. 9-12.
18. Кибкало В.А., Фоменко А.Т., Харчева И.С. Реализация интегрируемых гамильтоновых систем бильярдными книжками // Тр. ММО. 2021. Т. 82, № 1. С. 45-78.
19. Ведюшкина В.В. Локальное моделирование бильярдами слоений Лиувилля: реализация реберных инвариантов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2021. № 2. С. 28-32.

20. Ведюшкина В.В., Кибкало В.А. Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2020. № 4. С. 22-28.
21. Кузнецова А.А. Моделирование вырожденных особенностей интегрируемых бильярдных систем бильярдными книжками // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2023. № 5. С. 3-10.
22. Белозеров Г.В. Топологическая классификация билиардов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадраками // Матем. сб. 2022. Т. 213, № 2. С. 3-36.
23. Якоби К. Лекции по динамике. М.-Л.: ОНТИ, 1936. 272 с.
24. Белозеров Г.В. Топология изоэнергетических 5-поверхностей трехмерного бильярда внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2022. № 6. С. 21-31.
25. Lazutkin V. KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions. Berlin: Springer, 1993. 387 p.
26. Кудрявцева Е.А. Интегрируемые по Лиувиллю обобщённые билиардные потоки и теоремы типа Понселе // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Т. 20, № 3. С. 113-152.
27. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация: В 2 т. Ижевск: Удмуртский университет, 1999. Т. 1. 444 с.; Т. 2. 448 с.
28. Nguen T.Z. Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, I: Arnold–Liouville with singularities // Compositio Math. 1996. Vol. 101. P. 179-215.
29. Fomenko A.T., Kibkalo V.A. Saddle singularities in integrable Hamiltonian systems: examples and algorithms // Contemporary approaches and methods in fundamental mathematics and mechanics. Cham: Springer, 2021. P. 3-26. (Underst. Complex Syst.).
30. Ведюшкина В.В., Кибкало В.А., Пустовойтов С.Е. Реализация фокусных особенностей интегрируемых систем билиардными книжками с потенциалом Гука // Чебышевский сб. 2021. Т. 22, № 5. С. 44-57.
31. Кобцев И.Ф. Эллиптический билиард в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ // Матем. сб. 2020. Т. 211, № 7. С. 93-120.
32. Болсинов А.В., Рихтер П.Х., Фоменко А.Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 2. С. 3-42.

REFERENCES

1. Birkhoff, G.D., 1927, *Dynamical Systems*, Providence: American Mathematical Society, 295 p. (Colloquium Publications; vol. 9).
2. Kozlov, V.V., Treshchev, D.V., 1991, *A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts*, Providence: American Mathematical Society, 171 p. (Translations of Mathematical Monographs; vol. 89).

3. Dragović, V., Radnović, M., 2009, “Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards”, *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 14, no. 4-5, pp. 479-494.
4. Dragović, V., Radnović, M., 2010, *Integrable Billiards, Quadrics and Multidimensional Poncelet Porisms*, Moscow-Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 338 p. [in Russian].
5. Fokicheva, V.V., 2014, “Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 69, no. 4, pp. 148-158.
6. Fokicheva, V.V., 2014, “Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 205, no. 8, pp. 1201-1221.
7. Fokicheva, V.V., 2015, “A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 206, no. 10, pp. 1463-1507.
8. Vedyushkina, V.V., Fomenko, A.T., Kharcheva, I.S., 2018, “Modeling nondegenerate bifurcations of closures of solutions for integrable systems with two degrees of freedom by integrable topological billiards”, *Doklady Mathematics*, vol. 97, no. 2, pp. 174-176.
9. Vedyushkina, V.V., Kharcheva, I.S., 2018, “Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 209, no. 12, pp. 1690-1727.
10. Vedyushkina, V.V., 2020, “Integrable billiard systems realize toric foliations on lens spaces and the 3-torus”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 211, no. 2, pp. 201-225.
11. Vedyushkina, V.V., Fomenko, A.T., 2019, “Integrable geodesic flows on orientable two-dimensional surfaces and topological billiards”, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 83, no. 6, pp. 1137-1173.
12. Fomenko, A.T., Vedyushkina, V.V., Zavyalov, V.N., 2021, “Liouville foliations of topological billiards with slipping”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 28, no. 1, pp. 37-55.
13. Vedyushkina, V.V., Zavyalov, V.N., 2022, “Realization of geodesic flows with a linear first integral by billiards with slipping”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 213, no. 12, pp. 1645-1664.
14. Zavyalov, V.N., 2023, “Billiard with slipping by an arbitrary rational angle”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 214, no. 9, pp. 1191-1211.
15. Kharcheva, I.S., 2020, “Isoenergetic manifolds of integrable billiard books”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 75, no. 4, pp. 149-160.
16. Fomenko, A.T., Vedyushkina, V.V., 2019, “Billiards and integrability in geometry and physics. New scope and new potential”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 74, no. 3, pp. 98-107.
17. Vedyushkina, V.V., Kibkalo, V.A., Fomenko, A.T., 2020, “Topological modeling of integrable systems by billiards: realization of numerical invariants”, *Doklady Mathematics*, vol. 102, no. 1, pp. 269-271.
18. Kibkalo, V.A., Fomenko, A.T., Kharcheva, I.S., 2021, “Realizing integrable Hamiltonian systems by means of billiard books”, *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, vol. 82, pp. 37-64.
19. Vedyushkina, V.V., 2021, “Local modeling of Liouville foliations by billiards: implementation of edge invariants”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 76, no. 2, pp. 60-64.

20. Vedyushkina, V.V., Kibkalo, V.A., 2020, “Realization of the numerical invariant of the Seifert fibration of integrable systems by billiards”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 75, no. 4, pp. 161-168.
21. Kuznetsova, A.A., 2023, “Modeling the Degenerate Singularities of Integrable Billiard Systems by Billiard Books”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 78, no. 5, pp. 207-215.
22. Belozеров, G.V., 2022, “Topological classification of billiards bounded by confocal quadrics in three-dimensional Euclidean space”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 213, no. 2, pp. 129-160.
23. Jacobi, K., 1936, *Lectures on Dynamics*, Moscow: Gostekhizdat [in Russian].
24. Belozеров, G.V., 2022, “Topology of 5-surfaces of a 3D billiard inside a triaxial ellipsoid with Hooke’s potential”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 77, no. 6, pp. 277-289.
25. Lazutkin, V., 1993, *KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions*, Berlin: Springer, 387 p.
26. Kudryavtseva, E.A., 2017, “Liouville integrable generalized billiard flows and Poncelet type theorems”, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 225, no. 4, pp. 611-638.
27. Bolsinov, A.V., Fomenko, A.T., 2004, *Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification*, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 730 p.
28. Nguyen, T.Z., 1996, “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, I: Arnold-Liouville with singularities”, *Compositio Mathematica*, vol. 101, pp. 179-215.
29. Fomenko, A.T., Kibkalo, V.A., 2021, “Saddle singularities in integrable Hamiltonian systems: examples and algorithms”, in *Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics*, Cham: Springer, pp. 3-26.
30. Vedyushkina, V.V., Kibkalo, V.A., Pustovoitov, S.E., 2021, “Realization of focal singularities of integrable systems using billiard books with a Hooke potential field”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 44-57.
31. Kobtsev, I.F., 2020, “An elliptic billiard in a potential force field: classification of motions, topological analysis”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 211, no. 7, pp. 987-1013.
32. Bolsinov, A.V., Richter, P.H., Fomenko, A.T., 2000, “The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 191, no. 2, pp. 151-188.

Получено: 19.11.2024

Принято в печать: 07.04.2025