

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-243-258

**75-летие профессора
Урусби Мухамедовича Пачева**

В. А. Быковский, В. Г. Чирский, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский,
Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Р. А. Дохов

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: Bykovskyya@tolstovsky.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, РАНХиГС (г. Москва).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Дохов Резуан Ауесович — кандидат физико-математических наук, Северо-Кавказский центр математических исследований (г. Ставрополь).

e-mail: rezuan.dokhov@yandex.ru

Аннотация

В данной статье рассматривается научная и педагогическая деятельность профессора, доктора физико-математических наук Урусби Мухамедовича Пачева, внесшего значительный вклад в исследования по аналитической теории чисел и геометрии чисел. Освещаются основные периоды жизни известного ученого.

У. М. Пачев продолжительное время работает в Кабардино-Балкарском государственном университете им. Х. М. Бербекова, руководит научным семинаром по теории чисел.

Продолжая дело профессора А. В. Малышева, являлся научным руководителем четырёх аспирантов по кандидатским диссертациям.

Ключевые слова: дискретный эргодический метод, представление чисел квадратичными формами, гипотеза Минковского.

Библиография: 33 названия.

Для цитирования:

Быковский, В. А., Чирский, В. Г., Чубариков, В. Н., Добровольский, Н. М., Добровольский, Н. Н., Реброва, И. Ю., Р. А. Дохов. 75-летие профессора Урусби Мухамедовича Пачева // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 243–258.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-243-258

75-th Anniversary of Professor Urusbi Mukhamedovich Pachev

V. A. Bykovskii, V. G. Chirsky, V. N. Chubarikov, N. M. Dobvol'skii,
N. N. Dobvol'skii, I. Yu. Rebrova, R. A. Dokhov

Bykovskii Viktor Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: Bykovskyya@tolstovsky.ru

Chirskii Vladimir Grigorievich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University, RANEPА (Moscow).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Dobrovolskiy Nikolay Mikhailovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Dobrovolsky Nikolay Nikolaevich — candidate of physical-mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dokhov Rezuan Auesovich — candidate of physical and mathematical sciences, North–Caucasus Federal University (Stavropol).

e-mail: rezuan.dokhov@yandex.ru

Abstract

This article examines the scientific and pedagogical activities of Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences Urusbi Mukhamedovich Pachev, who made a significant contribution to research on analytical number theory and geometry of numbers. The main periods of the famous scientist's life are covered.

U. M. Pachev has been working for a long time at the Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M. Berbekov, and heads a scientific seminar on number theory.

Continuing the work of Professor A. V. Malyshev, he was the scientific supervisor of four postgraduate students on candidate dissertations.

Keywords: discrete ergodic method, representation of numbers by quadratic forms, Minkowski hypothesis.

Bibliography: 33 titles.

For citation:

Bykovskii, V. A., Chirsky, V. G., Chubarikov, V. N., Dobvol'skii, N. M., Dobvol'skii, N. N., Rebrova, I. Yu, R. A. Dokhov. 75-th Anniversary of Professor Urusbi Mukhamedovich Pachev *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 243–258.



Рис. 1: У. М. Пачев

1. Введение

Биография Пачева Урусби Мухамедовича

Пачев У. М. родился 1-го марта 1950 г. в селении Нартан Чегемского района КБАССР. Его отец Мухамед Цутович работал водителем на дальних рейсах, а мать Гашаляна Исуфовна была домохозяйкой. У него прекрасная семья: жена Зухра Ахметовна, дочь Заира и сын Артур.

С 1957 г. по 1960 г. Урусби учился в средней школе с. Нартан. Затем семья переехала в 1961 г. в г. Нальчик, где он продолжил обучение в средней школе № 11. Интерес к математике у Урусби Мухамедовича появился в 6-ом классе, в связи с переходом к буквенным обозначениям алгебраических выражений.

Среднюю школу Урусби Пачев окончил с одной четвёркой, но в том 1969 г. серебряные медали не выдавали. После окончания средней школы Урусби Мухамедович в 1969 г. поступил в КБГУ на физико-математический факультет (отделение математики), который окончил в 1974 году с отличием. На математические способности студента 1-го курса Урусби Пачева обратил внимание преподаватель кафедры геометрии и высшей алгебры Шокуев Владимир Нухович, в то время уже кандидат физико-математических наук, который в дальнейшем защитил докторскую диссертацию.

На первом курсе Урусби Мухамедович принимал также активное участие в кружке по математике, руководителем которого был доцент кафедры математического анализа Скворцов П. Г.

Дипломная работа Пачева У. была посвящена теории чисел. После окончания КБГУ Урусби Мухамедович был направлен по распределению учителем математики в среднюю школу с. Старый Черек. После того как он проработав там два года в школе, Урусби Пачева отозвали обратно в университет для прохождения аспирантуры по целевому направлению в Ленинградском государственном университете. Выбор ЛГУ был не случайным. Именно в то время на математико-механическом факультете ЛГУ работал деканом Борович Зенон Иванович – всемирно известный математик. Его биография интересна тем, что он одно время (с 1929 г. по 1939 г.) проживал в Нальчике, куда его семья переехала из Житомирской области (Украина).



Рис. 2: З. И. Боревич

Окончив школу в Нальчике в 1939 г., Зенон Иванович поступил на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета. В дальнейшем он в 1967 г. защитил докторскую диссертацию, а затем долгое время работал деканом этого факультета. Урусби Пачева рекомендовал в аспирантуру в ЛГУ доцент кафедры геометрии и высшей алгебры Лион Исмаилович Шидов, связавшись с Боревичем З. И., и тем самым был ускорен процесс поступления Пачева У. М. в аспирантуру ЛГУ.

Урусби Пачев, успешно сдав все экзамены, поступил в аспирантуру ЛГУ по рекомендации З. И. Боревича к профессору А. В. Малышеву – специалисту по теории чисел, одному из создателей, наряду с академиком Ю. В. Линником, дискретного эргодического метода (ДЭМ) в теории чисел.



Рис. 3: А. В. Малышев

В совместной работе А. В. Малышева и У. М. Пачева в 1979 г. был построен новый вариант дискретного эргодического метода. В дальнейшем У. М. Пачеву в 1980 г. удалось развить данный метод, что позволило применить его к вопросам представимости целых чисел неопределёнными тернарными квадратичными формами специального вида. В результате активной научно-исследовательской работы У. М. Пачеву удалось в установленный срок представить кандидатскую диссертацию, которая была защищена в 1980 г. в ЛГУ.

На защите его кандидатской диссертации выступили известные математики, член корр. АН СССР Фаддеев Д. К. и профессор Боревич З. И., высоко оценившие полученные Пачевым У. М. научные результаты. Учёная степень к.ф.-м.н. Пачеву У. М. присуждена решением

Совета в ЛГУ им. А. А. Жданова от 9 октября 1980 г.



Рис. 4: Д. К. Фаддеев

После аспирантуры Пачев У. М. работал на следующих должностях в КБГУ:

- с 1980 г. по 1985 г. ассистентом кафедры геометрии и высшей алгебры;
- с 1985 г. по 1993 г. старшим преподавателем данной кафедры;
- в 1993 г. присвоено звание доцента по кафедре геометрии и высшей алгебры; аттестат ДЦ № 009611;
- с 1993 г. по 2011 г. – доцент кафедры геометрии и высшей алгебры.

Докторская диссертация «Приложения дискретного эргодического метода к арифметике бинарных и изотропных тернарных квадратичных форм» представлена в 2008 г. к защите. Докторскую диссертацию Урусби Мухамедович защитил в 2009 г. в Диссертационном совете Д212.154.32 при Московском педагогическом государственном университете. Его оппонентами были член-корреспондент РАН В. А. Быковский, профессор С. А. Гриценко и профессор Е. П. Голубева.



Рис. 5: Е. П. Голубева

На защите докторской диссертации Пачева У. М. его официальный оппонент член-корреспондент РАН Быковский Виктор Алексеевич отметил, что все результаты этой диссертации в совокупности могут рассматриваться как завершение построения дискретного эргодического метода для изотропных тернарных квадратичных форм.



Рис. 6: С. А. Гриценко

Учёная степень доктора физико-математических наук присуждена Пачеву У. М. решением ВАК от 12 марта 2010 г. № 10д/41 серия ДДН № 013074 г. Москва.

— с 2011 г. по 2021 г. Пачев У. М. — профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений;

— с 2021 г. по 2024 г. — старший научный сотрудник кафедры алгебры и дифференциальных уравнений;

— с 18.11.2024 г. — главный научный сотрудник кафедры алгебры и дифференциальных уравнений КБГУ.

Наряду с научно-исследовательской работой Пачев У. М. уделяет большое внимание и педагогической работе. Он читает общие курсы «Алгебра», «Линейная алгебра и геометрия», «Теория чисел», «Аналитическая геометрия», «Дискретная математика», а также спецкурсы: «Теория групп», «Избранные главы теории чисел», «Арифметика квадратичных форм», «Дискретный эргодический метод в теории чисел». Руководит курсовыми и дипломными работами, а также магистерскими диссертациями. Его ученик Дохов Р. А. в 2016 г. защитил кандидатскую диссертацию по аналитической теории квадратичных форм.

На ранних этапах педагогической деятельности обучал студентов подготовительного отделения, для которых выпустил замечательную по методическому построению разработку по элементарной математике.

Большое значение Пачев У. М. придаёт и НИР студентов. Так дипломная работа студента Адрианова В. И. (1984 г.), выполненная под его руководством, рекомендована в печать и признана одной из лучших выпускных работ.

С 1981 г. по 2010 г. проводил кружок по математике для студентов 1-2 курсов физико-математического факультета. Он также долгое время работал завучем воскресной математической школы при Кабардино-Балкарском университете, организованной В. Н. Шокуевым для школьников старших классов.

Более 40 лет Пачев У. М. являлся организатором студенческих олимпиад по математике. Читал в 15-ой, 17-ой и 30-ой средних школах г. Нальчика спецкурсы для 10-х классов по углублённому изучению математики.

У. М. Пачев интересуется не только теорией чисел. В частности, у него есть публикации по теории конечных групп, ввиду чего его также можно считать специалистом по теории групп.

У Урусби Мухамедовича развито особое чутьё и в методических проблемах, например, в вопросах частной школьной и вузовской методик, что редко встречается среди учёных-математиков. Пачев У. М. является членом редколлегии журнала «Чебышевский сборник».

Пачеву У. М. присвоено почётное звание «Почётный работник науки и высоких технологии РФ» (Приказ Минобрнауки России от 11 октября 2022 г. № 710 к/н).

Руководство магистерскими диссертациями:

1. Жанатаевой Рузаны Артуровны «О многочленах и уравнениях над конечным полем». Дата защиты: г. Нальчик. 15.05.2017 г.
2. Гелоевой Фатимы Заурбиевны «Сравнения по двойному модулю и их связь с конечными полями». Дата защиты: г. Нальчик. 15.05.2017 г.
3. Максидовой Карины Аслановны «О рациональных и квадратично иррациональных корнях алгебраических уравнений». Дата защиты: г. Нальчик. 15.05.2017 г.
4. Алачева Беслана Маюновича «О числе решений сравнений с несколькими неизвестными по простому модулю». Дата защиты: г. Нальчик. 2018 г.
5. Эсмурзиевой Сильжаны Даудовны «О гауссовых коэффициентах».
6. Шебзуховой Асият Адальбиевны «О квадратичных формах над конечным полем». г. Нальчик. 2015 г.
7. Самимуллах Мияхель «Пифагоровы тройки с дополнительными условиями». г. Нальчик. 2022 г.

Список аспирантов Пачева У. М.:

1. Дохов Резуан Ауесович – к.ф.-м.н. Тема диссертации: «Двойные суммы Гаусса и распределение целых точек на гиперболических поверхностях». Защита: г. Душанбе. 16.06.2017 г.
2. Шакова Татьяна Анатольевна «Об арифметике обобщённых кватернионов в связи с задачей представления чисел анизотропными тернарными квадратичными формами». (Научный доклад об основных результатах подготовленной диссертации). г. Нальчик. 2020 г.
3. Шакова Милана Тлепшуковна «Представление целых чисел квадратичными формами в связи с гипотезами L -функции Дирихле». (Научный доклад об основных результатах подготовленной диссертации). г. Нальчик, 2021 г.
4. Халилова Ляна Аниуаровна «Представление целых чисел квадратичными формами с линейным соотношением переменных». (Научный доклад об основных результатах подготовленной диссертации). г. Нальчик, 2021 г.

Пачев У. М. являлся официальным оппонентом по диссертациям:

1. Шевцовой Марии Витальевны «Распределение простых чисел в арифметической прогрессии, разность которой является степенью простого числа» (кандидатская диссертация), 2011 г., 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел. Место защиты: Московский педагогический государственный университет (МПГУ).
2. Куртовой Лилианы Николаевны «Бинарные аддитивные задачи с квадратичными формами» (кандидатская диссертация). 2014 г. Место защиты: г. Ульяновск.

3. Рахимова Алишера Орзуходжаевича «Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми» (к.ф.-м.н.) Место защиты: г. Душанбе. 16.06.2017. Диссертационный совет: Д047.007.02.
4. Замонова Бехрузы Маликасороровича «Короткие кубические тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса» (к.ф.-м.н.) (отзыв Пачева У.М. от ведущей организации КБГУ). Место защиты: г. Душанбе. 2017 г. 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел. Диссертационный совет: Д047.007.02.
5. Матвеева Владимира Юрьевича «Свойства элементов прямых произведений полей» (кандидатская диссертация). Дата защиты: 16.10.2020 г. МГУ.
6. Крупицына Евгения Станиславовича «Арифметические свойства рядов некоторых классов» (кандидатская диссертация). Дата защиты: 16.10.2020 г. МГУ.
7. Самсонова Алексея Сергеевича «Арифметические свойства элементов прямых произведений полей с неархимедовыми нормированиями» (кандидатская диссертация). Дата защиты: г. Красноярск. 12.12.2024 г.
8. Хайруллоева Шамсулло Амрулоевича «Нули производных функций Харди и Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой» (докторская диссертация). Дата защиты: г. Душанбе. 2022 г. Диссертационный совет: Д047.007.02.
9. Собирова Абдушукур Абдурасуловича «Асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми» (кандидатская диссертация). Дата защиты: г. Душанбе. 10.02.2023 г. Диссертационный совет: Д047.007.02.

2. Научная деятельность

После окончания Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова в 1975 г., как уже писалось выше, Пачев У. М. был направлен в целевую аспирантуру в Ленинградском государственном университете им. А. А. Жданова.

После успешной сдачи вступительных экзаменов он поступил в аспирантуру, а его научным руководителем стал Александр Васильевич Малышев — крупный специалист по теории чисел.

Активная научная деятельность Урусби Мухамедовича Пачева началась в совместной работе [32], которая была важным этапом в исследованиях под руководством профессора А. В. Малышева.

На первоначальном этапе А. В. Малышев предложил У. М. Пачеву принять участие в исследовательской работе по геометрии чисел при решении одной гипотезы Минковского о критическом определителе двумерной области $|x|^p + |y|^p \leq 1$ при различных значениях вещественного параметра $p \geq 1$ для $5 \leq p \leq 6$. При этом рассматривается вспомогательная вещественная переменная σ , меняющаяся от 1 до $\sigma_p = (2^p - 1)^{\frac{1}{p}}$.

У. М. Пачев установил в этой задаче границы изменения этого параметра σ , а именно

$$1 + \frac{1}{5p} \leq \sigma \leq 1 + \frac{1,28}{\sqrt{p}}$$

и

$$1 + \frac{1,28}{\sqrt{p}} \leq \sigma \leq \sigma_p,$$

при этом коэффициент 1,28 оказался подходящим значением для случая $5 \leq p \leq 6$ в гипотезе Минковского, причем А. В. Малышев сохранил указанный коэффициент при публикации совместной статьи (см. [32]). Позднее на завершающем этапе к этим исследованиям подключились Н. М. Глазунов и А. С. Голованов — ученики А. В. Малышева.

В итоге в 1986 г. А. В. Малышев, опираясь на отдельные результаты своих учеников, полностью доказал гипотезу Минковского из геометрии чисел.

Как указывали У. М. Пачев и Е. В. Подсыпанин — ученики Александра Васильевича в своей юбилейной статье [29], Александр Васильевич Малышев гордился, что в этом цикле работ удалось полностью доказать гипотезу Минковского.

В дальнейшем А. В. Малышев окончательно определил направление исследований для аспиранта У. М. Пачева, связанное с приложениями дискретного эргодического метода (ДЭМ) к вопросам представления чисел тернарными квадратичными формами. Основы этого метода были заложены академиком Ю. В. Линником в 1940 г., который развивал этот метод совместно со своим учеником А. В. Малышевым для изучения распределения целых точек на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = n$ при $n \rightarrow \infty$ (название этого метода взято Ю. В. Линником из эргодической теории, рассматривая ее дискретные аналоги для потоков целых точек на сфере и на других поверхностях второго порядка). При построении своего метода Ю. В. Линник использовал замечательные исследования Б. А. Венкова по теории поворотов кватернионов, связанные с изучением целых точек на сфере заданного радиуса [1]–[7].

Но вначале при применении ДЭМ Ю. В. Линнику удавалось получать только оценки для числа представлений целых чисел положительными тернарными квадратичными формами.

По ходу исследований А. В. Малышевым были внесены в ДЭМ значительные усовершенствования, позволяющие получать вместо оценок числа представлений чисел тернарными квадратичными формами уже асимптотические формулы для числа целых точек не только на сферах, но и на эллипсоидах как по областям на них, так и по классам вычетов по данному модулю.

Следующая принципиальная совместная работа У. М. Пачева и А. В. Малышева [27] вышла уже в 1979 году. Она во многом определила всю дальнейшую научную судьбу Урусби Мухамедовича.

В дальнейшем, начиная с 1979 г. ДЭМ А. В. Малышевым и У. М. Пачевым применялся как к положительным, так и к неопределенным тернарным квадратичным формам (случаи целых точек на эллипсоидах и гиперболоидах). Так в их большой совместной работе [28] была построена арифметика целочисленных матриц второго порядка, используемая при применении ДЭМ к задаче представления целых чисел неопределенными тернарными квадратичными формами.

При этом на целые примитивные вектор-матрицы

$$L = \begin{pmatrix} b & -a \\ c & -b \end{pmatrix}$$

с нулевым следом и заданной нормы была перенесена теория Венкова Б. А. поворотов кватернионов (см. [1]–[7]).

Теория поворотов вектор-матриц второго порядка для простейшей неопределенной тернарной квадратичной формы $xy - z^2$ была построена Ю. В. Линником и развита А. В. Малышевым совместно с У. М. Пачевым (см. [28]).

Теория поворотов позволяет строить потоки целых векторов-матриц L нормы m , при этом используется характерное для ДЭМ условие: символ Лежандра $\left(\frac{-m}{p}\right) = 1$, где p — простой делитель заданного нечетного числа q , связанного с матричным разложением

$$l + L = Q_1 Q_2 \cdot \dots \cdot Q_s U,$$

где $\det Q = q$; l — скаляр, L — вектор-матрица, U — некоторая целая матрица. При этом для любого целого $s > 0$ найдется число l , что $l^2 + m \equiv 0 \pmod{q^s}$. Это позволяет строить все цепочки вектор-матриц длины s в нужном количестве

$$L \rightarrow L^{(1)} \rightarrow L^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow L^{(s)},$$

при этом s есть величина порядка $\log t$ и векторам-матриц сопоставляются целые точки, лежащие в заданной области на соответствующем гиперboloиде. Затем доказывается так называемая эргодическая теорема для потоков целых вектор-матриц, из которой уже получается асимптотика целых точек в заданной области гиперboloида.

В кандидатской диссертации У. М. Пачева, защищенной в 1980 г. в Ленинградском государственном университете, результаты Ю. В. Линника о простейшей тернарной квадратичной форме $f_0(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 - x_2^2$ перенесены на неопределенные тернарные квадратичные формы довольно общего вида, а именно на формы вида

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_0 \left(\sum_{i=1}^3 c_{1i}x_i, \sum_{i=1}^3 c_{2i}x_i, \sum_{i=1}^3 c_{3i}x_i \right),$$

где c_{ij} — целые числа и $\det(c_{ij}) \neq 0$.

Арифметика квадратичных форм является одним из активно разрабатываемых разделов современной теории чисел. В настоящее время наибольший интерес представляет случай целочисленных тернарных квадратичных форм, поскольку к ним не применимы те аналитические методы, которыми удалось полностью исследовать случай квадратичных форм от четырех и более переменных. Важнейшие результаты в рассматриваемой тематике получили акад. Ю. В. Линник и его школа. Ю. В. Линник для изучения вопроса о представлении целых чисел тернарными квадратичными формами разработал своеобразный аналитико-алгебраический метод, использующий некоммутативную арифметику, и названный впоследствии дискретным эргодическим методом (ДЭМ). Проблема представления чисел тернарными квадратичными формами, поставленная Ю. В. Линником, и имеющая связь и с другими важными проблемами математики, еще далека от своего завершения, хотя в последнее время в этом направлении получен ряд новых результатов, относящихся к случаю изотропных неопределенных тернарных квадратичных форм.

Дальнейшие как самостоятельные результаты У. М. Пачева относились к различным аспектам ДЭМ. В 1994 г. У. М. Пачевым найдено одно интересное применение ДЭМ к вопросу о числе классов гауссова рода, арифметический минимум которых делится на квадрат заданного нечетного числа (Математические заметки, 1994, [25]).

Несколько позднее У. М. Пачев обратил внимание на исследования А. В. Малышева со своим вьетнамским аспирантом Нгуен Нгор Гоем, относящихся к случаю распределения целых точек на некоторых однополостных гиперboloидах, обобщившим результаты Б. Ф. Скубенко — известного специалиста по теории чисел. Кроме того, У. М. Пачеву приглянулась еще одна статья А. Н. Карпова в Записках семинаров ЛОМИ, 1986 г. [33], в которой дается обобщение результатов Ю. В. Линника и У. М. Пачева на случай изотропных гиперboloидов, но при этом случай Скубенко однополостных гиперboloидов остался вне рассмотрения.

В дальнейшем появилась также статья: Малышев А.В., Широков Б.М. Вестник Ленингр. ун-та, 1991, вып. 2, с.34-40, в которой было дано доказательство ключевой леммы ДЭМ для вектор-матриц второго порядка, относящейся к случаям, исследованным Ю. В. Линником и Б. Ф. Скубенко.

Под влиянием этих двух работ Пачев У. М. предпринимает проведение исследования по применению ДЭМ к изотропным тернарным квадратичным формам, охватывающего оба вида гиперboloидов как двуполостного, так и однополостного. Пользуясь результатами А. В. Малышева и Б. М. Широкова по ключевой лемме ДЭМ У. М. Пачеву удалось полностью завершить исследование, относящееся к случаю всех изотропных гиперboloидов. Соответствующие результаты были опубликованы У. М. Пачевым в журнале Изв.РАН-2006. Серия матем. [24].

Но еще остается более сложный случай анизотропных тернарных квадратичных форм.

Кроме того, У. М. Пачевым проведен также цикл исследований по асимптотике числа приведенных бинарных квадратичных форм, опубликованных в журналах ПОМИ РАН, «Сибирь»

ский математический журнал» [23], «Чебышевский сборник», [21], «Математические заметки».

По результатам проведенных исследований по применениям ДЭМ в теории чисел У. М. Пачевым в 2009 г. была защищена докторская диссертация в Московском педагогическом государственном университете.

В этой диссертации с помощью ДЭМ У. М. Пачевым получено полное решение задачи об асимптотике числа представлений целых чисел произвольной целой изотропной тернарной квадратичной формой как по областям так и по классам вычетов по заданному модулю.

В дальнейшем У. М. Пачевым была опубликована обзорная статья по применению ДЭМ в теории чисел в журнале «Чебышевский сборник» в 2010 г. [22].

В последнее время У. М. Пачев проводил также исследования и по другим вопросам теории чисел. Так, например, вместе со своим учеником Доховым Р. А. проводилось исследование о взвешенном числе целых точек на некоторых многомерных гиперболоидах, в которых используется метод Харди-Литтлвуда.

С аспирантом Шаковой Т. А. один результат о единицах анизотропной тернарной квадратичной формы опубликован в журнале Чебышевский сборник в 2019 г. [13]. Наряду с этим получен также результат о преобразовании подобия анизотропных вектор-матриц и появляется некоторая уверенность в успешном исследовании анизотропных тернарных квадратичных форм.

Проводилось также исследование по асимптотике числа представлений пары целых чисел квадратичной и линейной формой с конгруэнциальным условием. Такая задача поставленная специалистами долгое время не удавалось решить. Полученные результаты по этой задаче опубликованы в журналах [30] и [31]. У У. М. Пачева имеются и другие публикации по некоторым арифметическим вопросам комбинаторики.

3. Заключение

В настоящее время Урусби Мухамедович продолжает плодотворно заниматься научной деятельностью, смотри например работу [31].

Авторы статьи, коллеги и ученики желают Урусби Мухамедовичу здоровья и творческих успехов.

В данной работе авторами использовались материалы из юбилейных публикаций, которые вышли в г. Нальчик.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Венков Б. А. Об арифметике кватернионов. Пятое сообщение // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук. – 1929. – № 7. – С. 607–622.
2. Венков Б. А. Об арифметике кватернионов. Четвертое сообщение // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук. – 1929. – № 6. – С. 535–562.
3. Венков Б. А. Об арифметике кватернионов. Третье сообщение // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук. – 1929. – № 5. – С. 489–504.
4. Венков Б. А. О числе классов бинарных квадратичных форм отрицательных определителей. Часть вторая // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук. – 1928. – № 5. – С. 455–480.
5. Венков Б. А. О числе классов бинарных квадратичных форм отрицательных определителей. Часть первая // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук. – 1928. – № 4. – С. 375–392.

6. Венков Б. Об арифметике кватернионов. (Второе сообщение) // Известия Российской Академии Наук. VI серия. – 1922. – Т. 16. – С. 221–246.
7. Венков Б. Об арифметике кватернионов. (Первое сообщение) // Известия Российской Академии Наук. VI серия. – 1922. – Т. 16. – С. 205–220.
8. Пачев У. М., Кодзоков А. Х., Езаова А. Г., Токбаева А. А., Гучаева З. Х. Об одном способе решения линейных уравнений над евклидовым кольцом // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2024. – Т. 46, № 1. – С. 9–21.
9. Пачев У. М., Дохов Р. А., Кодзоков А. Х., Нирова М. С. О некоторых арифметических применениях к теории симметрических групп // Чебышевский сборник. – 2023. – Т. 24, № 4. – С. 252–263.
10. Пачев У. М., Халилова Л. А. Об асимптотике числа представлений пары целых чисел квадратичной и линейной формами с конгруэнциальным условием // Математические заметки. – 2022. – Т. 111, № 5. – С. 726–737.
11. Дохов Р. А., Пачев У. М. О числе примитивных неассоциированных матриц третьего порядка заданного определителя // Чебышевский сборник. – 2021. – Т. 22, № 5. – С. 129–137.
12. Пачев У. М., Исакова М. М. О числе циклических подгрупп простого порядка в группе диагональных матриц над круговым полем // Математические заметки. – 2020. – Т. 107, № 3. – С. 479–480.
13. Пачев У. М., Шакова Т. А. О единицах кватернионного порядка неопределённой анизотропной тернарной квадратичной формы // Чебышевский сборник. – 2019. – Т. 20, № 4. – С. 270–280.
14. Пачев У. М., Дохов Р. А. Об особых функциях в задаче о взвешенном числе целых точек на многомерных гиперблоидах специального вида // Математические заметки. – 2019. – Т. 105, № 2. – С. 278–293.
15. Пачев У. М. Об алгебре и арифметике биномиальных и гауссовых коэффициентов // Чебышевский сборник. – 2018. – Т. 19, № 3. – С. 257–269.
16. Пачев У. М., Исакова М. М. О циклических подгруппах полной линейной группы третьей степени над полем нулевой характеристики // Владикавк. математический журнал. – 2018. – Т. 20, № 2. – С. 62–68.
17. Пачев У. М. Эргодические свойства потоков целых точек на некоторых гиперблоидах в связи с гипотезами для L-функции Дирихле // Чебышевский сборник. – 2016. – Т. 17, № 1. – С. 171–186.
18. Пачев У. М., Дохов Р. А. О числе целых точек с условием делимости первых координат на гиперблоидах специального вида // Математические заметки. – 2016. – Т. 100, № 6. – С. 881–886.
19. Дохов Р. А., Пачев У. М. О взвешенном числе целых точек на некоторых многомерных гиперблоидах // Чебышевский сборник. – 2015. – Т. 16, № 3. – С. 219–245.
20. Пачев У. М. О числе примитивных неассоциированных матриц второго порядка определителя n , делящихся на заданную матрицу // Владикавк. математический журнал. – 2015. – Т. 17, № 2. – С. 62–67.

21. Пачев У. М. О распределении приведенных неопределенных бинарных квадратичных форм с условием делимости первых коэффициентов по классам вычетов // Чебышевский сборник. – 2013. – Т. 14, № 2. – С. 139–150.
22. Пачев У. М. Обзор исследований по дискретному эргодическому методу в теории чисел // Чебышевский сборник. – 2010. – Т. 11, № 1. – С. 217–233.
23. Пачев У. М. Об асимптотике числа приведенных целочисленных бинарных квадратичных форм с условием делимости первых коэффициентов // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 376–388.
24. Пачев У. М. Представление целых чисел изотропными тернарными квадратичными формами // Известия РАН. Серия математики. – 2006. – Т. 70, № 3. – С. 167–184.
25. Пачев У. М. О числе классов гауссова рода, арифметический минимум которых делится на квадрат заданного нечетного числа // Математические заметки. – 1994. – Т. 55, № 2. – С. 118–127.
26. Жемухова М. З., Пачев У. М. Циклические подгруппы полной линейной группы второй степени над полем нулевой характеристики // Владикавк. математический журнал. – 2011. – Т. 13, № 3. – С. 17–21.
27. Малышев А. В., Пачев У. М. О представлении целых чисел положительными тернарными квадратичными формами (новый вариант дискретного эргодического метода) // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1979. – Т. 82. – С. 33–87.
28. Малышев А. В., Пачев У. М. Об арифметике матриц второго порядка // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1980. – Т. 93. – С. 41–86.
29. Пачев У. М., Подсыпанин Е. В. Александр Васильевич Малышев и его исследования в теории чисел // Чебышевский сборник. – 2019. – Т. 20, № 3. – С. 27–42.
30. Пачев У. М., Халилова Л. А. Об асимптотике числа представлений пары целых чисел квадратичной и линейной формами с конгруэнциальным условием // Математические заметки. – 2022. – Т. 111, № 5. – С. 726–737.
31. Пачев У. М., Кодзоков А. Х., Исакова М. М., Нирова М. С. Об асимптотиках представлений пары целых чисел суммой квадратов и линейной формой с конгруэнтным условием специального вида // Чебышевский сборник. – 2025. – Т. 26, вып. 1.
32. Гришмановская К. И., Малышев А. В., Пачев У. М., Фидарова А. М. Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ в случае $5 \leq p \leq 6$ // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1977. – Т. 67. – С. 95–107.
33. Карпов А. Н. О представлении чисел целыми изотропными квадратичными формами // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1986. – Т. 151. – С. 66–67.

REFERENCES

1. Venkov, B.A., 1929, “On the arithmetic of quaternions. Fifth communication”, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Fiziko-Matematicheskikh Nauk*, no. 7, pp. 607-622 [in Russian].
2. Venkov, B.A., 1929, “On the arithmetic of quaternions. Fourth communication”, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Fiziko-Matematicheskikh Nauk*, no. 6, pp. 535-562 [in Russian].

3. Venkov, B.A., 1929, "On the arithmetic of quaternions. Third communication", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Fiziko-Matematicheskikh Nauk*, no. 5, pp. 489-504 [in Russian].
4. Venkov, B.A., 1928, "On the number of classes of binary quadratic forms with negative determinants. Part two", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Fiziko-Matematicheskikh Nauk*, no. 5, pp. 455-480 [in Russian].
5. Venkov, B.A., 1928, "On the number of classes of binary quadratic forms with negative determinants. Part one", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Fiziko-Matematicheskikh Nauk*, no. 4, pp. 375-392 [in Russian].
6. Venkov, B., 1922, "On the arithmetic of quaternions. (Second communication)", *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Seriya VI*, vol. 16, pp. 221-246 [in Russian].
7. Venkov, B., 1922, "On the arithmetic of quaternions. (First communication)", *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Seriya VI*, vol. 16, pp. 205-220 [in Russian].
8. Pachev, U.M., Kodzokov, A.Kh., Ezova, A.G., Tokbaeva, A.A., Guchaeva, Z.Kh., 2024, "On a method for solving linear equations over a Euclidean ring", *Vestnik KRAUNTS. Fiziko-Matematicheskie Nauki*, vol. 46, no. 1, pp. 9-21 [in Russian].
9. Pachev, U.M., Dokhov, R.A., Kodzokov, A.Kh., Nirova, M.S., 2023, "On some arithmetic applications to the theory of symmetric groups", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 252-263 [in Russian].
10. Pachev, U.M., Khalilova, L.A., 2022, "On the asymptotics of the number of representations of a pair of integers by quadratic and linear forms with a congruence condition", *Matematicheskie Zametki*, vol. 111, no. 5, pp. 726-737 [in Russian].
11. Dokhov, R.A., Pachev, U.M., 2021, "On the number of primitive non-associated matrices of the third order with a given determinant", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 129-137 [in Russian].
12. Pachev, U.M., Isakova, M.M., 2020, "On the number of cyclic subgroups of prime order in the group of diagonal matrices over a cyclotomic field", *Matematicheskie Zametki*, vol. 107, no. 3, pp. 479-480 [in Russian].
13. Pachev, U.M., Shakova, T.A., 2019, "On the units of a quaternion order of an indefinite anisotropic ternary quadratic form", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 270-280 [in Russian].
14. Pachev, U.M., Dokhov, R.A., 2019, "On special functions in the problem of the weighted number of integer points on multidimensional hyperboloids of a special form", *Matematicheskie Zametki*, vol. 105, no. 2, pp. 278-293 [in Russian].
15. Pachev, U.M., 2018, "On the algebra and arithmetic of binomial and Gaussian coefficients", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 257-269 [in Russian].
16. Pachev, U.M., Isakova, M.M., 2018, "On cyclic subgroups of the general linear group of degree three over a field of zero characteristic", *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, vol. 20, no. 2, pp. 62-68 [in Russian].
17. Pachev, U.M., 2016, "Ergodic properties of flows of integer points on some hyperboloids in connection with hypotheses for Dirichlet L-functions", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, no. 1, pp. 171-186 [in Russian].

18. Pachev, U.M., Dokhov, R.A., 2016, "On the number of integer points with divisibility condition of first coordinates on hyperboloids of special form", *Matematicheskie Zametki*, vol. 100, no. 6, pp. 881-886 [in Russian].
19. Dokhov, R.A., Pachev, U.M., 2015, "On the weighted number of integer points on some multidimensional hyperboloids", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, no. 3, pp. 219-245 [in Russian].
20. Pachev, U.M., 2015, "On the number of primitive non-associated matrices of second order with determinant n , divisible by a given matrix", *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, vol. 17, no. 2, pp. 62-67 [in Russian].
21. Pachev, U.M., 2013, "On the distribution of reduced indefinite binary quadratic forms with divisibility condition of first coefficients by residue classes", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 14, no. 2, pp. 139-150 [in Russian].
22. Pachev, U.M., 2010, "Review of research on the discrete ergodic method in number theory", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 11, no. 1, pp. 217-233 [in Russian].
23. Pachev, U.M., 2007, "On the asymptotics of the number of reduced integer binary quadratic forms with divisibility condition of first coefficients", *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, vol. 48, no. 2, pp. 376-388 [in Russian].
24. Pachev, U.M., 2006, "Representation of integers by isotropic ternary quadratic forms", *Izvestiya RAN. Seriya Matematicheskaya*, vol. 70, no. 3, pp. 167-184 [in Russian].
25. Pachev, U.M., 1994, "On the number of classes of the Gaussian genus whose arithmetic minimum is divisible by the square of a given odd number", *Matematicheskie Zametki*, vol. 55, no. 2, pp. 118-127 [in Russian].
26. Zhemukhova, M.Z., Pachev, U.M., 2011, "Cyclic subgroups of the general linear group of degree two over a field of zero characteristic", *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, vol. 13, no. 3, pp. 17-21 [in Russian].
27. Malyshev, A.V., Pachev, U.M., 1979, "On the representation of integers by positive ternary quadratic forms (new version of the discrete ergodic method)", *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, vol. 82, pp. 33-87 [in Russian].
28. Malyshev, A.V., Pachev, U.M., 1980, "On the arithmetic of second-order matrices", *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, vol. 93, pp. 41-86 [in Russian].
29. Pachev, U.M., Podsypanin, E.V., 2019, "Alexander Vasilievich Malyshev and his research in number theory", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 27-42 [in Russian].
30. Pachev, U.M., Khalilova, L.A., 2022, "On the asymptotics of the number of representations of a pair of integers by quadratic and linear forms with a congruence condition", *Matematicheskie Zametki*, vol. 111, no. 5, pp. 726-737 [in Russian].
31. Pachev, U.M., Kodzokov, A.Kh., Isakova, M.M., Nirova, M.S., 2025, "On asymptotics of representations of a pair of integers by sum of squares and linear form with congruence condition of special form", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 26, no. 1 [in Russian].
32. Grishmanovskaya, K.I., Malyshev, A.V., Pachev, U.M., Fidarova, A.M., 1977, "Proof of Minkowski's conjecture on the critical determinant of the domain $|x|^p + |y|^p < 1$ in the case $5 \leq p \leq 6$ ", *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, vol. 67, pp. 95-107 [in Russian].

33. Карпов, А.Н., 1986, "On the representation of numbers by integer isotropic quadratic forms", *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, vol. 151, pp. 66-67 [in Russian].

Получено: 12.11.2024

Принято в печать: 10.03.2025