ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 1 (2014)

УДК 519.6

АСИМПТОТИКА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧИСЕЛ БЕЛЛА

В. Е. Фирстов (г. Саратов)

Аннотация

Числа Белла $B(s)$, как известно, определяют количество разбиений s-элементного множества на классы и с увеличением s имеют экспоненциальный рост. Поэтому становится актуальным исследование асимптотики $s >> 1$ последовательности $\{B(s)\}$ чисел Белла $B(s)$, например, в связи с решением следующей комбинаторной задачи. Пусть имеется дискретное пространство элементарных событий, содержащее s точек с заданным законом распределения вероятностей $p_1; \ldots ; p_s$, $p_1 + \ldots + p_s = 1$. На конфигурациях разбиений следует определить такое разбиение, при котором достигается минимум информационной энтропии по К. Шеннону. С этой задачей сталкиваются при оптимизации блочного управления сложными кибернетическими системами самого разного назначения.

В представленной работе установлены некоторые асимптотические свойства последовательности чисел Белла $\{B(s)\}$. Основной результат работы представляет соотношение: $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{B(s)B(s+2)}{B^2(s+1)} = 1$, где $B(s)$; $B(s+1)$; $B(s+2)$ — числа Белла с номерами s; $s+1$; $s+2$. Этот результат показывает, что асимптотически последовательность чисел Белла ведет себя как геометрическая прогрессия со знаменателем $x* = B(s+1)/B(s)$. В рамках аддитивного представления чисел Белла с помощью чисел Стирлинга установлена асимптотика $B(s)\ St(s; n*)\ (n^*)^s/(n^*)!$, где $n* = [x*]$. Таким образом, установлен новый класс последовательностей, топология которых характеризуется асимптотикой в виде геометрической прогрессии. Этот фактор используется для оптимизации управления системными объектами.

Ключевые слова: числа Белла, производящая функция, метод перевала, числа Стирлинга, асимптотика последовательности

THE ASYMPTOTIC OF THE BELL‘S NUMBERS SEQUENCE

V. E. Firstov (Saratov)

Abstract

Bell‘s numbers $B(s)$ defines the amount partitions of s-element set and with growth s they have an exponentiale growth. That‘s why the asymptotic‘s investigation $s >> 1$ of sequence $\{B(s)\}$ of Bell‘s numbers $B(s)$ becomes actual, for example, if do the following combinatorial sum. Let‘s take a discrete space of elementary event containing s points with given law of probability distribution $p_1; \ldots ; p_s$, $p_1 + \ldots + p_s = 1$. On configurations of partitions one should define such a partition at which minimum of informational Shanon‘s entropy is gained. One can face with this problem when the optimization of block-control of difficult cybernetic systems is present.

In this work some asymptotic properties of sequence of Bell‘s numbers are considered. The main result of work represents the correlation:

$\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{B(s)B(s+2)}{B^2(s+1)} = 1$, where $B(s)$; $B(s+1)$; $B(s+2)$ — Bell‘s numbers with numerals s; $s+1$; $s+2$. This result shows that asymptotical sequence of Bell‘s numbers behaved themselves geometrical progression with denominator $x* = B(s+1)/B(s)$. In the frames of additive presentation of Bell‘s numbers with the help of Stirling‘s numders the asymptotics is set up

$B(s)$ $St(s; n*)$ $(n^*)^s/(n^*)!$, where $n* = [x*]$. Thus, a new class of sequences is up, the topology of which is characterized by the asymptotics in the form of the geometrical progression. Thus, a new class of sequences is established, the topology of wich is characterized by asymptotics in the form of geometrical progression.

Keywords: Bell‘s numbers, course of value function, saddle-point method, Stirlig‘s numbers, asymptotic sequence.

1. НАВОДЯЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Как известно [1], числа Белла определяют количество разбиений конечного множества на классы, которое выражается посредством рекуррентного соотношения:

$$B(s+1) = \sum_{i=0}^{s} C_s^i B(i), \qquad B(0) = 1, \tag{1}$$

где s — мощность разбиваемого множества. При увеличении s числа Белла растут очень быстро, что иллюстрируется данными табл. 1.

Таблица 1

Числа Белла $B(s)$ при значениях s от 0 до 20

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$B(s)$	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	678570	4212597

s	13	14	15	16	17
$B(s)$	27644437	190899322	1382958545	10480142147	82864869804

s	18	19	20
$B(s)$	682076806159	5832742205057	51724158235335372

Анализ табл. 1 обнаруживает интересный факт, связанный с поведением функции $\hat{B}(s) = B(s)B(s+2)/B^2(s+1)$ в табл. 2.

Таблица 2

Поведение функции $\hat{B}(s)$ с ростом s

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{B}(s)$	1.2	1.156	1.126	1.107	1.093	1.082	1.074	1.067	1.061

s	9	10	11	12	13	14	...	20	21	...
$\hat{B}(s)$	2	1.25	1.057	1.053	1.049	1.046	...	1.034	1.032	...

s	...	30	...	38	...	68	...	98	...	198
$\hat{B}(s)$	...	1.023	...	1.019	...	1.011	...	1.0078	...	1.0040

Данные табл. 2 показывают, что с ростом m функция $\hat{B}(s) \to 1$. Цель работы — показать, что на самом деле имеет место

Теорема 1. *Имеет место соотношение:*

$$\lim_{s\to\infty} \hat{B}(s) = 1. \tag{2}$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Доказательство (2) использует экспоненциальное представление производящей функции (в смысле [2]) для чисел Белла $B(s)$ в комплексной плоскости вида [1]:

$$\exp(e^z - 1) = \sum_{s=0}^{\infty} B(s)\frac{z^s}{s!},$$

которое, после обращения с помощью формулы Коши, дает равенство:

$$\frac{2\pi i B(s)}{s!} = \int_L \exp(e^z - 1) z^{-(s+1)}\, dz, \tag{3}$$

Для реализации интересующей асимптотической оценки к интегралу (3) применяется метод перевала и, как легко видеть, точками перевала являются корни уравнения:

$$ze^z = s + 1. \tag{4}$$

Известно [4], что для уравнения (4) всегда можно найти такой контур L, на котором содержится единственный положительный корень, определяемый методом итераций, и, таким образом, после шести итераций для $B(s)$ получается следующее асимптотическое представление:

$$\frac{\ln B(s)}{s} = \ln s - \ln\ln s - 1 + \frac{\ln\ln s}{\ln s} + \frac{1}{\ln s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln\ln s}{\ln s}\right)^2 + O\left(\frac{\ln\ln s}{(\ln s)^2}\right), \quad s \to \infty. \tag{5}$$

Исследуя последовательность итераций в (5), обнаруживаем интересное свойство данного представления.

На I итерации получается

$$B_I(s) \sim s^s, \quad \hat{B}_I(s) = B_I(s)B_I(s+2)/B_I^2(s+1) = \lim_{s\to\infty}[s^s(s+2)^{s+2}/(s+1)^{2(s+1)}] = 1;$$

на II итерации:

$$B_{II}(s) \sim B_I(s)/(\ln s)s, \quad \hat{B}_{II}(s) = \lim_{s\to\infty}[\hat{B}_I(s)\ln^{2(s+1)}(s+1)/(\ln^s s \ln^{(s+2)}(s+2))] = 1;$$

на III итерации:

$$B_{III}(s) \sim B_{II}(s)/\ln e \implies \hat{B}_{III}(s) = 1, \qquad \ldots;$$

на VI итерации:

$$B_{VI}(s) \sim B_V(s)\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\ln s}{\ln s}\right)^2,$$

$$\hat{B}_{VI}(s) = \lim_{s\to\infty}\left[\hat{B}_V(s)\frac{\ln\ln s}{\ln s}\frac{1}{\ln\ln(s+2)}\ln(s+2)\Big/\left(\frac{\ln\ln(s+1)}{\ln(s+1)}\right)^2\right] = 1,$$

т. е. на всех шести итерациях условие (2) выполняется. Окончательное доказательство теоремы получается из следующих соображений. Согласно [4], асимптотическое представление (5) продолжает ряд:

$$\frac{\ln B(s)}{s} = \ln s - \ln\ln s + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}(\ln\ln s)^{l+1}(\ln s)^{-k-l-1}, \tag{6}$$

где c_{kl} — постоянные коэффициенты двойного ряда, который абсолютно сходится для всех достаточно больших значений s.Фактически, надо показать, что всякий член двойного ряда (6) обладает свойством (2). Имеем:

$$\lim_{s\to\infty}\left[\frac{(\ln\ln s)^{l+1}}{(\ln s)^{k+l+1}}\left(\frac{(\ln(s+1))^{k+l+1}}{(\ln\ln(s+1))^{l+1}}\right)^2\frac{(\ln\ln(s+2))^{l+1}}{(\ln(s+2))^{k+l+1}}\right] =$$

$$= \lim_{s\to\infty}\left[\left(\frac{(\ln\ln s)(\ln\ln(s+2))}{(\ln\ln(s+1))^2}\right)^{l+1}\left(\frac{(\ln(s+1))^2}{\ln\ln(s+2))}\right)^{k+l+1}\right] = 1.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.

$$\lim_{s\to\infty}(B(s)B(s+2\lambda)/B^2(s+\lambda)) = 1, \quad \lambda \in N. \tag{7}$$

В связи с доказательством теоремы отметим следующее. В выражениях (5), (6) члены рядов имеют вид $\ln g(s)$, где функция $g(s)$ обладает свойством $\lim\limits_{s\to\infty} g(s)g(s+2)/g^2(s+1) = 1$, которое транслируется на последующие члены ряда с помощью логарифма, так как в промежутке $(0;\infty)$ логарифмическая функция представляет единственное решение уравнения Коши $w(uv) = w(u) + w(v)$ [5].

3. НАИБОЛЬШЕЕ ЧИСЛО СТИРЛИНГА В АДДИТИВНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ БЕЛЛА

Посредством чисел Стирлинга 2-го рода $St(s;n)$ [2] числа Белла $B(m)$ определяются суммой:

$$B(s) = \sum_{n=0}^{s} St(s;n), \qquad St(0;0) = St(s;s) = 1. \tag{8}$$

В представлении (8) выделим наибольшее слагаемое и установим его единственность. Из формулы для чисел Стирлинга $St(s;n)$ [2]:

$$St(s;n) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i (n-i)^s$$

при $s \gg 1$ имеет место асимптотика:

$$St(s;n) \sim \frac{n^s}{n!}. \tag{9}$$

С учетом (9) для $x \in (0;s)$ рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^s}{x!} = \dfrac{x^s}{\Gamma(x+1)}$, и найдем ее экстремум. Мы имеем:

$$f'(x) = \frac{x^{s-1}}{\Gamma(x+1)}[s - x\varphi(x+1)], \tag{10}$$

где перед квадратной скобкой стоит положительный множитель; $\varphi(x+1)$ — логарифмическая производная гамма-функции $\Gamma(x+1)$. Учитывая свойства $\varphi(x+1)$ [3], для $x \geqslant 0.5$ имеет место неравенство $0 < x\varphi(x+1) < s\varphi(s+1)$, в котором при $s \gg 1$ значения $\varphi(s+1) > 1$ Поэтому, в силу монотонного возрастания $\varphi(x+1)$, на интервале $(0;s)$ найдется единственная точка $x = x^*$, в которой производная $f'(x^*) = 0$ и при переходе x^* меняет знак с «+» на «-», т. е. $\max f(x) = f(x^*)$. Как следует из (10), конкретное значение x^* определяется решением уравнения:

$$x\varphi(x+1) = s. \tag{11}$$

Для решения уравнения (11) в случае $s \gg 1$ используем асимптотическое равенство $\varphi(x+1) = \ln(x+1) - O(1/(2(x+1)))$ [3] так, что уравнение (11) преобразуется к виду:

$$x \ln x = s. \tag{12}$$

Полагая в (12) $x = e^y$, получаем уравнение $ye^y = s$, которое имеет вид (4) так, что искомый корень x^* выражается посредством двойного ряда, аналогичного (6). Поэтому при $s \gg 1$, в силу (8), также должно быть $x^* \gg 1$ так, что отношение $x^*/[x^*]$ как угодно близко к 1 и в дальнейшем $[x^*] = n^*$ выражает номер наибольшего числа $St(s;n^*)$ в аддитивном представлении (8).

Замечание 1. *Поскольку определение* (1) *для* $B(s)$ *и уравнение* (12) *в рассматриваемой асимптотике* $s \gg 1$ *представляют взаимно однозначные соответствия, то всякому такому* s *отвечает единственное значение* x*, для которого справедливо равенство* $B(s+1) = xB(s)$*. С другой стороны,* x *является единственным корнем уравнения* (12)*, и, таким образом, получается замечательное соотношение:*

$$x = x^* = B(s+1)/B(s). \tag{13}$$

4. АСИМПТОТИКА НАИБОЛЬШЕГО ЧИСЛА СТИРЛИНГА $St(s; n^*)$

Номера n чисел $St(s;n)$ в представлении (8) удовлетворяют неравенству [4]:

$$|n - n^*| < \sqrt{s}. \tag{14}$$

Используя уравнение (12), неравенство (14) преобразуется к виду:

$$x^* - \sqrt{x^* \ln x^*} < n < x^* + \sqrt{x^* \ln x^*},$$

что равносильно:

$$1 - \sqrt{\frac{\ln x^*}{x^*}} < \frac{n}{x^*} < 1 + \sqrt{\frac{\ln x^*}{x^*}}. \tag{15}$$

При неограниченном возрастании x^* радикалы в (15) становятся как угодно малыми и тогда, по принципу сжатой переменной, отношение $n/x^* \to 1$, т. е. $n \to n^*$. Таким образом, при $s \gg 1$ имеет место асимптотика

$$B(s) \sim St(s;n^*) \sim \frac{(n^*)^s}{(n^*)!}, \tag{16}$$

Насколько эффективна асимптотика, установленная в рамках (12)–(16), можно судить по табл. 3, которые показывают хорошее совпадение точных и асимптотических данных для n^*. Что касается $B(s)$, то при $s > 20$, соотношение (16) дает совпадение только по порядку величины. Причина в том, что величина n^* в табл. 3 вычислена с помощью уравнения (12), однако, в реальности, вклад дает интервал номеров в левой части неравенства (14). При его учете получается картина, представленная в табл. 4, откуда видно, что для $s \geqslant 10$ величина отношения $\sum St(\Delta s)/B(s)$ близка к 1, т. е. в рассмотренной области s сумма $\sum St(\Delta s)$близка к $B(s)$. При этом, с ростом s отношение $\Delta s/s$ медленно уменьшается, что указывает на медленную сходимость ряда (6), но асимптотика (16) улучшается. Как следует из неравенства (14), $0 < \Delta s/s < 2/\sqrt{s}$, что при $s \to \infty$ дает $\Delta s/s \to 0$ и тогда $\int\limits_0^\infty \delta(x-n^*) f(x)\,dx = f(n^*)$, где $\delta(x-n^*)$ — дельта-функция Дирака.

Таблица 3

Сравнение точных и асимптотических значений n^* и $B(s)$

	s	10	20	50	100
n^*	Точно	5	8	17	28
	Асимпт.	5	9	17	29
$B(s)$	Точно	115975	$5.17 \cdot 10^{13}$	$1.86 \cdot 10^{47}$	$4.76 \cdot 10^{115}$
	Асимпт.	88270	$3.37 \cdot 10^{13}$	$9.36 \cdot 10^{46}$	$1.97 \cdot 10^{115}$

	s	150	180	$200^{*)}$
n^*	Точно	39	46	50
	Асимпт.	40	46	50
$B(s)$	Точно	$6.82 \cdot 10^{192}$	$1.0565 \cdot 10^{242}$	$6.25 \cdot 10^{275}$
	Асимпт.	$2.5 \cdot 10^{192}$	$0.36 \cdot 10^{242}$	$2.05 \cdot 10^{275}$

$^{*)}$При $s > 200$ требуется оптимизация мощности процессора.

Таблица 4

Сравнение значений $B(s)$ и $\sum St(\Delta s)$

s	10	20	50	100
Δs	5	6	10	14
$\sum St(\Delta s)$	114667	$50.45 \cdot 10^{14}$	$184.3 \cdot 10^{45}$	$474.1 \cdot 10^{113}$
$B(s)$	115975	$51.72 \cdot 10^{14}$	$185.7 \cdot 10^{45}$	$475.7 \cdot 10^{113}$
$\sum St(\Delta s)/B(s)$	0.9887	0.9754	0.9925	0.9966
$\Delta s/s$	0.5	0.3	0.2	0.14

s	150	180	200
Δs	17	17	18
$\sum St(\Delta s)$	$680.7 \cdot 10^{190}$	$1.052 \cdot 10^{242}$	$622.8 \cdot 10^{273}$
$B(s)$	$682.1 \cdot 10^{190}$	$1.056 \cdot 10^{242}$	$624.7 \cdot 10^{273}$
$\sum St(\Delta s)/B(s)$	0.9979	0.9962	0.997
$\Delta s/s$	0.113	0.094	0.09

Δs — количество номеров на интервале в левой части неравенства (14);
$\sum St(\Delta s)$ — сумма чисел Стирлинга с номерами из Δs.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты работы устанавливают новый класс последовательностей, топология которых характеризуется асимптотикой в виде геометрической прогрессии. Конкретизируя результаты, отметим следующее:

1. Доказанная теорема и ее следствие (формулы (2) и (7)), по сути, говорят о том, что последовательность чисел Белла $\{B(s)\}$ асимптотически ведет себя как геометрическая прогрессия со знаменателем x^*, согласно соотношению (13).

2. Насколько это выполняется в реальности, можно судить по табл. 5.

Таблица 5

Асимптотическая геометрическая прогрессия в последовательности чисел Белла $\{B(s)\}$ при $s = \overline{190, 200}$, $s_0 = 190$, $x^* = B(191)/B(190) = 48.82$

s	190	191	192	193
r	0	1	2	3
$B(s)$	$6.6 \cdot 10^{258}$	$3.22 \cdot 10^{260}$	$1.58 \cdot 10^{262}$	$7.82 \cdot 10^{263}$
$B(s_0)(x^*)^r$	$6.6 \cdot 10^{258}$	$3.21 \cdot 10^{260}$	$1.57 \cdot 10^{262}$	$7.67 \cdot 10^{263}$
Погрешн.	–	1.003	1.006	1.019

s	195	196	197	200
r	5	6	7	10
$B(s)$	$1.93 \cdot 10^{267}$	$9.63 \cdot 10^{268}$	$4.83 \cdot 10^{270}$	$6.25 \cdot 10^{275}$
$B(s_0)(x^*)^r$	$1.83 \cdot 10^{267}$	$8.92 \cdot 10^{268}$	$4.36 \cdot 10^{270}$	$5.07 \cdot 10^{275}$
Погрешн.	1.055	1.079	1.108	1.232

Как видим, в диапазоне $190 \leqslant s \leqslant 197$ последовательность $\{B(s)\}$ с погрешностью $\leqslant 10\%$ мажорирует геометрическую прогрессию $B(s_0)(x^*)^r$ и с ростом s мажорируемый диапозон $\{B(s)\}$ неограниченно увеличивается.

3. Данный результат с помощью (7) реализует экстраполяцию, так как по данным $B(s)$ и $B(s+\lambda)$,$\lambda \ll s$ можно получить оценку $B(s+2\lambda)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эндрюс Г. Теория разбиений. М. : Наука, 1982. 256 с.
2. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М. : ИЛ, 1963. 288 с.
3. Янке Е. , Эмде Ф. , Лёш Ф. Специальные функции. М. : Наука, 1977. 343 с.
4. Д'Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М. : ИЛ, 1961. 247 с.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 1. М. : Наука, 1966. 607 с.

REFERENCES

1. Andrews G. E. The Theory of Partitions. Encyclopedia of Mathematics and his Applications. Vol. 2 / Editor G.-C. Rota. London; Amsterdam, Don Mills, Ontario; Sydney; Tokio, Addison–Wesley Publishing Company, 1976, 255 pp.
2. Riordan J. An Introduction to Combinatorial Analysis. New York, Wiley&Sons, Inc.; London, Chapman& Hall, Ltd. , 1958, 287 pp.
3. Janke E., Emde F. Lösch F. Taffeln höherer Funktionen. Stuttgart, B. G. Teubner Verlagsgesselschaft, 1960, 342 pp.
4. D'Bruijn N. G. Asymptotic Methods in Analysis. Amsterdam; Groningen, North-Holland Publishing Co.; P. Noordhoff Ltd., 1958, 247 pp.
5. Fikhtengol'ts G. M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniia [A Course of Differential and Integral Calculus]. Vol. 1. Moscow, Nauka, 1966, 607 pp. (in Russian).

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
Поступило 9.02.2014