

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-190-203

Дифракция цилиндрической звуковой волны на многослойном сфероиде

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Толоконников Сергей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: tols@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача о дифракции гармонической цилиндрической звуковой волны на многослойном сфероиде, состоящем из абсолютно жесткого сфероид и окружающих его однородных сфероидальных слоев идеальной сжимаемой жидкости. Предполагается, что сфероид находится в безграничной идеальной жидкости. Цилиндрическая волна излучается бесконечно длинным линейным источником, параллельным оси вращения сфероид.

Задача решается в вытянутой сфероидальной системе координат. Получено аналитическое решение задачи. Рассмотрен частный случай двухслойного сфероид.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, цилиндрическая волна, многослойный сфероид, идеальная жидкость.

Библиография: 47 названий.

Для цитирования:

Толоконников, Л. А., Толоконников, С. Л. Дифракция цилиндрической звуковой волны на многослойном сфероиде // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 190–203.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-190-203

Diffraction of a cylindrical sound wave on a multilayered spheroid

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Tolokonnikov Sergei Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: tols@mail.ru

Abstract

The article considers the problem of diffraction of a harmonic cylindrical sound wave on a multilayered spheroid is considered. The multilayered spheroid consist from an absolutely rigid spheroid and surroundштт homogeneous spheroidal layers of an ideal compressible liquid. It is assumed that the spheroid is in an infinite ideal liquid. A cylindrical wave is emitted by an infinitely long linear source parallel to the axis of rotation of the spheroid.

The problem is solved in an elongated spheroidal coordinate system. An analytical solution of the problem has been obtained. A special case of a two-layer spheroid is considered.

Keywords: diffraction, sound waves, cylindrical wave, multilayered spheroid, ideal fluid.

Bibliography: 47 titles.

For citation:

Tolokonnikov, L. A., Tolokonnikov, S. L. 2025, "Diffraction of a cylindrical sound wave on a multilayered spheroid" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 190–203.

1. Введение

Сфероидальной гнометрией охватывается большое разнообразие форм. Многие реальные объекты хорошо аппроксимируются телами, имеющими форму сфероида. В предельных случаях сфероид превращается в сферу, диск, сигарообразное тело. Изучению проблемы дифракции звуковых волн на сфероидах посвящено большое количество работ.

Дифракция плоских звуковых волны на идеальных (абсолютно жестких и акустически мягких) сфероидах рассматривалась в работах [1 – 8]. Низкочастотные аппроксимации решений таких дифракционных задач построены в [9 – 13], а высокочастотные — в [14 – 17].

Задачи дифракции цилиндрических и сферических звуковых волн на идеальных сфероидах рассмотрены в [18 – 21].

Дифракции звука на сфероидальных телах со смешанными граничными условиями изучалась в [22 – 24]. В [22, 23] падающая волна полагалась плоской, а в [24] — цилиндрической и сферической.

В [25 – 28] получены решения задач о рассеянии плоских звуковых волн на проницаемых (жидких) сфероидах.

Дифракция плоских звуковых волн на однородных упругих сфероидах исследовалась в [29 – 37], а сферических и цилиндрических — в [38, 39].

В [40] получено решение задачи о рассеянии плоской волны на твердом вытянутом сфероиде, окруженном конфокальной оболочкой из акустического материала. Задача о рассеянии сферической волны на многослойном проницаемом сфероиде с жестким включением решена в [41]. На основе полученного решения рассмотрен случай одного сфероидального жидкого слоя, окружающего жесткий сфероид [42].

В настоящей работе рассматривается дифракция цилиндрических звуковых волн на многослойном проницаемом сфероиде с абсолютно жестким сфероидальным включением.

2. Постановка задачи

Рассмотрим многослойный сфероид, состоящий из абсолютно жесткого сфероида и N окружающих его однородных сфероидальных слоев идеальной сжимаемой жидкости или подобным жидкости материалов, в которых не распространяются сдвиговые волны. Каждый j – й слой ($j = 1, 2, \dots, N$) характеризуется плотностью ρ_j и скоростью распространения звука c_j . На многослойный сфероид, находящийся в безграничной однородной идеальной жидкости с плотностью ρ и скоростью звука c , падает гармоническая цилиндрическая волна, излучаемая

бесконечно длинным линейным источником с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота; t — время (в дальнейшем временной множитель будем опускать). Ось источника параллельна оси вращения сфероида. Определим акустическое поле, рассеянное сфероидом.

3. Аналитическое решение задачи

Для решения задачи введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z с началом в центре сфероида, ось z которой является осью вращения сфероида. Для определенности будем считать сфероидальное тело вытянутым.

Свяжем с координатами x, y, z вытянутые сфероидальные координаты ξ, η, φ [43]

$$x = h [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \cos \varphi, \quad y = h [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \sin \varphi, \quad z = h\xi\eta$$

$$(1 \leq \xi < \infty, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

где h — половина межфокусного расстояния сфероида.

Фокусы сфероидальной системы координат, жесткого сфероида и каждого сфероидального слоя полагаются общими.

В системе координат ξ, η, φ поверхности j -го жидкого слоя ($\xi_{j-1} \leq \xi \leq \xi_j$) определяются уравнениями $\xi = \xi_{j-1}$ и $\xi = \xi_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$), а уравнение поверхности абсолютно жесткого сфероида записывается в виде $\xi = \xi_0$.

В вытянутой сфероидальной системе координат поверхность $\xi = \xi_* = \text{const}$ является вытянутым эллипсоидом вращения с большой осью, равной $2h\xi_*$, и малой осью, равной $2h(\xi_*^2 - 1)^{1/2}$.

Ведem дополнительную цилиндрическую систему координат r, φ, z , связанную с рассеивателем. Линейный источник параллелен оси z и в системе координат r, φ, z имеет цилиндрические координаты (r_0, φ_0) .

Потенциал скоростей падающей волны имеет вид

$$\Psi_0 = AH_0(kR), \quad R = [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/2}$$

где A — амплитуда падающей волны; $H_0(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка; $k = \omega/c$ — волновое число жидкости, окружающей многослойный сфероид; R — расстояние от источника до произвольной точки внешнего пространства.

Цилиндрическая волна может быть представлена разложением [44]

$$\Psi_0 = A \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos m(\varphi - \varphi_0) \begin{cases} J_m(kr)H_m(kr_0), & r < r_0 \\ J_m(kr_0)H_m(kr), & r > r_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $J_m(x)$ и $H_m(x)$ — цилиндрические функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка m , δ_{0m} — символ Кронекера.

Движение идеальной жидкости в установившемся режиме колебаний описывается уравнением Гельмгольца [45].

Во внешней области потенциал скорости полного акустического поля Ψ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad (2)$$

где $\Psi = \Psi_0 + \Psi_s$; Ψ_s — потенциал скорости рассеянной волны.

Потенциал скорости акустического поля в j -ом слое $\Psi^{(j)}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Psi^{(j)} + k_j^2 \Psi^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

где $k_j = \omega/c_j$ — волновое число в j -ом слое.

При этом скорость частиц жидкости и акустическое давление во внешней среде и в слоях определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \text{grad}\Psi, \quad p = i\rho\omega\Psi,$$

$$\mathbf{v}^{(j)} = \text{grad}\Psi^{(j)}, \quad p^{(j)} = i\rho\omega\Psi^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

В вытянутой сфероидальной системе координат оператор Лапласа Δ имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{H_\xi H_\eta H_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{H_\eta H_\varphi}{H_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{H_\xi H_\varphi}{H_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{H_\xi H_\eta}{H_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right],$$

где $H_\xi = h \left(\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1} \right)^{1/2}$, $H_\eta = h \left(\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2} \right)^{1/2}$, $H_\varphi = h [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]$ — коэффициенты Ламе системы координат ξ, η, φ .

Потенциал Ψ_s должен удовлетворять граничным условиям на внешней поверхности $\xi = \xi_N$, которые заключаются в равенстве акустических давлений и нормальных скоростей частиц во внешней среде и в N -ом слое

$$p|_{\xi=\xi_N} = p^{(N)}|_{\xi=\xi_N}, \quad v_n|_{\xi=\xi_N} = v_n^{(N)}|_{\xi=\xi_N}.$$

Учитывая, что нормальные скорости определяются через потенциалы выражениями

$$v_n = \frac{1}{H_\xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad v_n^{(j)} = \frac{1}{H_\xi} \frac{\partial \Psi^{(j)}}{\partial \xi},$$

граничные условия на поверхности $\xi = \xi_N$ запишем в виде

$$\rho(\Psi_0 + \Psi_s)|_{\xi=\xi_N} = \rho_N \Psi^{(N)}|_{\xi=\xi_N}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\Psi_0 + \Psi_s) \Big|_{\xi=\xi_N} = \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi^{(N)} \Big|_{\xi=\xi_N}. \quad (5)$$

Потенциал Ψ_s должен удовлетворять условиям излучения на бесконечности [45].

Граничные условия на границах раздела слоев $\xi = \xi_j$ ($j = 1, 2, \dots, N-1$) заключаются в непрерывности акустических давлений и нормальных скоростей частиц жидкостей

$$\rho_{j+1} \Psi^{(j+1)}|_{\xi=\xi_j} = \rho_j \Psi^{(j)}|_{\xi=\xi_j}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Psi^{(j+1)} \Big|_{\xi=\xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi^{(j)} \Big|_{\xi=\xi_j}. \quad (7)$$

Граничное условие на поверхности жесткого сфероида состоит в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости

$$\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} = 0. \quad (8)$$

Акустические поля во внешней области и в каждом слое симметричны относительно плоскости, проходящей через линейный источник и ось z . Поэтому потенциал скорости рассеянной волны Ψ_s , являющийся решением уравнения (2), при учете условий излучения на бесконечности будем искать в виде

$$\Psi_s = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} S_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(3)}(q, \xi) \cos m(\varphi - \varphi_0), \quad (9)$$

а потенциалы скорости в j -ом слое — в виде

$$\Psi^{(j)} = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[B_{mn}^{(j)} R_{mn}^{(1)}(q_j, \xi) + C_{mn}^{(j)} R_{mn}^{(3)}(q_j, \xi) \right] S_{mn}(q_j, \eta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Здесь $S_{mn}(q, \eta)$ — вытянутая угловая сфероидальная функция первого рода порядка m степени n ; $R_{mn}^{(i)}(q, \xi)$ — вытянутая радиальная сфероидальная i -го рода ($i = 1, 3$); $q = kh$ — волновой размер сфероида.

Коэффициенты A_{mn} , $B_{mn}^{(j)}$, $C_{mn}^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) подлежат определению из граничных условий (4 – 8).

Прежде всего получим интегральные соотношения между цилиндрическими и сфероидальными функциями, которые будут использованы при удовлетворении граничных условий (4) и (5).

Воспользуемся соотношением [43]

$$J_m \left[q(\xi^2 - 1)^{1/2} (1 - \eta^2)^{1/2} \right] = 2 \sum_{n=m}^{\infty} i^{n-m} N_{mn}^{-1} S_{mn}(q, 0) S_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(1)}(q, \xi), \quad (11)$$

где $N_{mn}(q)$ — норма угловой сфероидальной функции;

$$S_{mn}(q, 0) = \frac{(-1)^{\frac{n-m}{2}} (n+m)!}{2^n \left(\frac{n-m}{2} \right)! \left(\frac{n+m}{2} \right)!} \text{ при } (n-m) - \text{четное,}$$

$$S_{mn}(q, 0) = 0 \text{ при } (n-m) - \text{нечетное.}$$

Умножим левую и правую части (11) на $S_{mn}(q, \eta)$ и проинтегрируем по η в пределах от -1 до 1. Учитывая условие ортогональности угловых сфероидальных функций [43]

$$\int_{-1}^1 S_{mn}(q, \eta) S_{mk}(q, \eta) d\eta = \delta_{mk} N_{mn}, \quad (12)$$

получаем следующее выражение:

$$\int_{-1}^1 J_m \left[q(\xi^2 - 1)^{1/2} (1 - \eta^2)^{1/2} \right] S_{mn}(q, \eta) d\eta = 2i^{n-m} S_{mn}(q, 0) R_{mn}^{(1)}(q, \xi). \quad (13)$$

Дифференцируя (12) по ξ , получаем

$$\int_{-1}^1 \frac{q\xi(1-\eta^2)^{1/2}}{(\xi^2-1)^{1/2}} J'_m \left[q(\xi^2 - 1)^{1/2} (1 - \eta^2)^{1/2} \right] S_{mn}(q, \eta) d\eta = 2i^{n-m} S_{mn}(q, 0) R_{mn}^{(1)'}(q, \xi). \quad (14)$$

Подставим разложения (1), (9) и (10) при $j = N$ в граничные условия (4) и (5), заменив в (1) цилиндрическую координату r ее выражением в сфероидальных координатах

$$r = h[(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2}.$$

Учитывая ортогональность тригонометрических функций $\cos m(\varphi - \varphi_0)$, получаем для каждого значения m следующие соотношения:

$$\rho \sum_{n=m}^{\infty} A_{mn} S_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(3)}(q, \xi_N) - \rho_N \sum_{n=m}^{\infty} \left[B_{mn}^{(N)} R_{mn}^{(1)}(q_N, \xi_N) + C_{mn}^{(N)} R_{mn}^{(3)}(q_N, \xi_N) \right] S_{mn}(q_N, \eta) =$$

$$= -A\rho(2 - \delta_{0m})J_m \left[q(\xi_N^2 - 1)^{1/2}(1 - \eta^2)^{1/2} \right] H_m(kr_0), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=m}^{\infty} A_{mn} S_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_N) - \sum_{n=m}^{\infty} \left[B_{mn}^{(N)} R_{mn}^{(1)'}(q_N, \xi_N) + C_{mn}^{(N)} R_{mn}^{(3)'}(q_N, \xi_N) \right] S_{mn}(q_N, \eta) = \\ & = -A \frac{q\xi_N(1 - \eta^2)^{1/2}}{(\xi_N^2 - 1)^{1/2}} (2 - \delta_{0m}) J_m' \left[q(\xi_N^2 - 1)^{1/2}(1 - \eta^2)^{1/2} \right] H_m(kr_0). \end{aligned} \quad (16)$$

Умножим левую и правую части уравнений (15) и (16) на $S_{mk}(q, \eta)$ и проинтегрируем по η в пределах от -1 до 1. Учитывая (12 – 14), получаем

$$\begin{aligned} & \rho A_{mn} N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)}(q, \xi_N) - \rho_N \sum_{k=m}^{\infty} \left[B_{mk}^{(N)} R_{mk}^{(1)}(q_N, \xi_N) + C_{mk}^{(N)} R_{mk}^{(3)}(q_N, \xi_N) \right] < S_{mk}^{(N)}, S_{mn} > = \\ & = -2A\rho(2 - \delta_{0m}) H_m(kr_0) i^{n-m} S_{mn}(q, 0) R_{mn}^{(1)}(q, \xi_N), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & A_{mn} N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_N) - \sum_{k=m}^{\infty} \left[B_{mk}^{(N)} R_{mk}^{(1)'}(q_N, \xi_N) + C_{mk}^{(N)} R_{mk}^{(3)'}(q_N, \xi_N) \right] < S_{mk}^{(N)}, S_{mn} > = \\ & = -2A(2 - \delta_{0m}) H_m(kr_0) i^{n-m} S_{mn}(q, 0) R_{mn}^{(1)'}(q, \xi_N), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{где } < S_{mk}^{(N)}, S_{mn} > = \int_{-1}^1 S_{mk}(q_N, \eta) S_{mn}(q, \eta) d\eta.$$

Теперь подставим разложения (10) в граничные условия (6) и (7) на поверхности $\xi = \xi_j$ ($j = 1, 2, \dots, N - 1$). Получаем для каждого значения m следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \rho_{j+1} \sum_{n=m}^{\infty} \left[B_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(1)}(q_{j+1}, \xi_j) + C_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(3)}(q_{j+1}, \xi_j) \right] S_{mn}(q_{j+1}, \eta) = \\ & = \rho_j \sum_{n=m}^{\infty} \left[B_{mn}^{(j)} R_{mn}^{(1)}(q_j, \xi_j) + C_{mn}^{(j)} R_{mn}^{(3)}(q_j, \xi_j) \right] S_{mn}(q_j, \eta), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=m}^{\infty} \left[B_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(1)'}(q_{j+1}, \xi_j) + C_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(3)'}(q_{j+1}, \xi_j) \right] S_{mn}(q_{j+1}, \eta) = \\ & = \sum_{n=m}^{\infty} \left[B_{mn}^{(j)} R_{mn}^{(1)'}(q_j, \xi_j) + C_{mn}^{(j)} R_{mn}^{(3)'}(q_j, \xi_j) \right] S_{mn}(q_j, \eta), \end{aligned} \quad (20)$$

Умножим левую и правую части уравнений (19) и (20) на $S_{mk}(q_{j+1}, \eta)$ и проинтегрируем по η в пределах от -1 до 1. Получаем

$$\begin{aligned} & \rho_{j+1} N_{mn}(q_{j+1}) \left[B_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(1)}(q_{j+1}, \xi_j) + C_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(3)}(q_{j+1}, \xi_j) \right] - \\ & - \rho_j \sum_{k=m}^{\infty} \left[B_{mk}^{(j)} R_{mk}^{(1)}(q_j, \xi_j) + C_{mk}^{(j)} R_{mk}^{(3)}(q_j, \xi_j) \right] < S_{mk}^{(j)}, S_{mn}^{(j+1)} > = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & N_{mn}(q_{j+1}) \left[B_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(1)'}(q_{j+1}, \xi_j) + C_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(3)'}(q_{j+1}, \xi_j) \right] - \\ & - \sum_{k=m}^{\infty} \left[B_{mk}^{(j)} R_{mk}^{(1)'}(q_j, \xi_j) + C_{mk}^{(j)} R_{mk}^{(3)'}(q_j, \xi_j) \right] < S_{mk}^{(j)}, S_{mn}^{(j+1)} > = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{где } < S_{mk}^{(j)}, S_{mn}^{(j+1)} > = \int_{-1}^1 S_{mk}(q_j, \eta) S_{mn}(q_{j+1}, \eta) d\eta.$$

Коэффициенты A_{mn} , $B_{mn}^{(1)}$, $C_{mn}^{(1)}$ определяются из системы уравнений (17) и (18), записанных для $N = 1$, и (23).

Из уравнения (23) выразим $C_{mn}^{(1)}$ через $B_{mn}^{(1)}$. Получаем

$$C_{mn}^{(1)} = -\frac{R_{mn}^{(1)'}(q_1, \xi_0)}{R_{mn}^{(3)'}(q_1, \xi_0)} B_{mn}^{(1)}. \quad (25)$$

Подставим (25) в (17) и (18), записанных для $N = 1$. Будем иметь

$$\begin{aligned} & A_{mn} N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)}(q, \xi_1) - \\ & - \frac{\rho_1}{\rho} \sum_{k=m}^{\infty} \left[R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) \right]^{-1} \left[R_{mk}^{(1)}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) - R_{mk}^{(3)}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(1)'}(q_1, \xi_0) \right] B_{mk}^{(1)} < S_{mk}^{(1)}, S_{mn} > = \\ & = -2A(2 - \delta_{0m}) H_m(kr_0) i^{n-m} S_{mn}(q, 0) R_{mn}^{(1)}(q, \xi_1), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & A_{mn} N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_1) - \\ & - \sum_{k=m}^{\infty} \left[R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) \right]^{-1} \left[R_{mk}^{(1)'}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) - R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(1)'}(q_1, \xi_0) \right] B_{mk}^{(1)} < S_{mk}^{(1)}, S_{mn} > = \\ & = -2A(2 - \delta_{0m}) H_m(kr_0) i^{n-m} S_{mn}(q, 0) R_{mn}^{(1)'}(q, \xi_1). \end{aligned} \quad (27)$$

Из (26) выразим A_{mn} . Получаем

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{\rho_1}{\rho} \left[N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)}(q, \xi_1) \right]^{-1} \times \\ & \times \sum_{k=m}^{\infty} \left[R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) \right]^{-1} \left[R_{mk}^{(1)}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) - R_{mk}^{(3)}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(1)'}(q_1, \xi_0) \right] < S_{mk}^{(1)}, S_{mn} > B_{mk}^{(1)} - \\ & - 2A \frac{(2 - \delta_{0m})}{N_{mn}(q)} H_m(kr_0) i^{n-m} S_{mn}(q, 0) \frac{R_{mn}^{(1)}(q, \xi_1)}{R_{mn}^{(3)}(q, \xi_1)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27), получаем бесконечную систему линейных уравнений для определения коэффициентов B_{mn} для каждого фиксированного значения m ($m = 0, 1, \dots$) при всех значениях n ($n = m + 1, m + 2, \dots$)

$$\sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{mnk} B_{mk} = \beta_{mn},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{mnk} &= \frac{1}{R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0)} \left\{ \frac{\rho_1}{\rho} \frac{R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_1)}{R_{mn}^{(3)}(q, \xi_1)} \left[R_{mk}^{(1)}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) - R_{mk}^{(3)}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(1)'}(q_1, \xi_0) \right] - \right. \\ & \left. - \left[R_{mk}^{(1)'}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) - R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(1)'}(q_1, \xi_0) \right] \right\} < S_{mk}^{(1)}, S_{mn} >; \\ \beta_{mn} &= 2A(2 - \delta_{0m}) H_m(kr_0) i^{n-m} \frac{S_{mn}(q, 0)}{R_{mn}^{(3)}(q, \xi_1)} \left[R_{mn}^{(1)}(q, \xi_1) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_1) - R_{mn}^{(1)'}(q, \xi_1) R_{mn}^{(3)}(q, \xi_1) \right]. \end{aligned}$$

Используя выражение для вронскиана для вытянутых сфероидальных функций [47]

$$R_{mn}^{(1)}(q, \xi) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi) - R_{mn}^{(1)'}(q, \xi) R_{mn}^{(3)}(q, \xi) = \frac{i}{q(\xi^2 - 1)},$$

будем иметь

$$\beta_{mn} = 2A(2 - \delta_{0m})H_m(kr_0)i^{n-m+1} \frac{S_{mn}(q, 0)}{q(\xi_1^2 - 1)R_{mn}^{(3)}(q, \xi_1)}.$$

После вычисления коэффициентов B_{mn} находим по формуле (28) коэффициенты A_{mn} , которые подставляем в разложение (9). В результате определяем акустическое поле, рассеянное двухслойным сфероидом.

5. Заключение

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи дифракции цилиндрической звуковой волны на многослойном проницаемом сфероиде. Полученное решение можно распространить на случай сплюснутого сфероидального тела, если провести формальную замену ξ на $i\xi$ и h на $-ih$, переводящую вытянутую сфероидальную систему координат в сплюснутую.

Из полученного решения задачи дифракции цилиндрической волны можно получить решение задачи для случая, когда падающая волна является плоской и распространяется перпендикулярно оси вращения сфероида. Для этого, считая, что расстояние между источником и рассеивателем достаточно велико ($kr_0 \gg 1$), следует заменить в (17), (18) функцию $H_m(kr_0)$ ее асимптотическим выражением, используя асимптотическую формулу [47]

$$H_m(x) \sim \sqrt{2/(\pi x)} \exp[i(x - m\pi/2 - \pi/4)].$$

В результате получим решение задачи дифракции плоской волны, амплитуда которой равна $\sqrt{2/(\pi kr_0)} \exp[i(kr_0 - \pi/4)]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Spence R.D., Granger S. The scattering sound from a prolate spheroid // *Acoust. Soc. Amer.* 1951. Vol. 23. No. 6. P. 701 – 706.
2. Einspruch N.G., Barlow C.A. Scattering of a compressional wave by a prolate spheroid // *Quart. J. Appl. Math.* 1961. Vol. 19. No. 3. P. 253 – 258.
3. Senior T.B.A. The scattering from acoustically hard and soft prolate spheroids for axial incidence // *Can. J. Phys.* 1966. Vol. 44. No. 3. P. 657 – 667.
4. Клещев А.А., Шейба Л.С. Рассеяние звуковой волны идеальными вытянутыми сфероидом // *Акуст. журн.* 1970. Т. 16. № 2. С. 264 – 268.
5. Андебур В.А., Осташевский А.Л. Рассеяние звука жесткими вытянутыми сфероидом // *Акуст. журн.* 1974. Т. 20. № 2. С. 179 – 183.
6. Varadan V.K., Varadan V.V., Dragonette L.R., Flax L. Computation of rigid body scattering by prolate spheroids using the T-matrix approach. // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1982. Vol. 71. No. 1. P. 22 – 25.
7. Barton J.P., Wolf N.L., Zhang H., Tarawneh C. Near-field calculations for a rigid spheroid with an arbitrary incident acoustic field // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2003. Vol. 113. No. 3. P. 1216 – 1222.
8. Роумелиотис Дж. А., Котсис А. Д., Колезас Дж. Рассеяние звука на непроницаемом сфероиде // *Акуст. журн.* 2007. Т. 53. № 4. С. 500 – 513.

9. Senior T.B.A. Scalar diffraction by a prolate spheroid at low frequencies // Can. J. Phys. 1960. Vol. 38. No. 12. P. 1632 – 1641.
10. Burke J. E. Low-frequency scattering by soft spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1966. Vol. 39. No. 5. P. 826 – 831.
11. Burke J. E. Long-wavelength scattering by hard spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1966. Vol. 40. No. 2. P. 325 – 330.
12. Asvestas J.S., Kleinman R.E. Low frequency scattering by spheroids and disks. 1. Dirichlet problem for a prolate spheroid // J. Inst. Math. Appl. 1969. Vol. 6. No. 1. P. 42 – 56.
13. Asvestas J.S., Kleinman R.E. Low frequency scattering by spheroids and disks. 2. Neumann problem for a prolate spheroid // J. Inst. Maths. Appl. 1969. Vol. 6. No. 1. P. 57 – 75.
14. Гаткин Н.Г., Парамонова С.Н., Пьянов В.М. Рассеяние звука жесткими вытянутыми сфероидами // Акуст. журн. 1971. Т. 17. № 3. С. 371 — 378.
15. Sammelmann G.S., Trivett D.H., Hackmann R.H. High-frequency scattering from rigid prolate spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. Vol. 83. No. 1. P. 46 – 54.
16. Lauchle G.C. Short-wavelength acoustic diffraction by prolate spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1975. Vol. 58. No. 3. P. 568 – 575.
17. Lauchle G.C. Short-wavelength acoustic backscattering by a prolate spheroid // J. Acoust. Soc. Amer. 1975. Vol. 58. No. 3. P. 576 – 580.
18. Толоконников Л.А. Рассеяние цилиндрических звуковых волн на сфероиде // Прикладная математика. 1975. Вып. 3. С. 3 – 9. Тула: Изд-во Тульск. политехн. ин-та.
19. Клещев А.А. Рассеиватель в поле точечного источника // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 3. С. 455 – 457.
20. Blake W.K., Wilson G.A. Short-wavelength diffracted surface pressures on a rigid prolate spheroid // J. Acoust. Soc. Amer. 1977. Vol. 61. No. 6. P. 1419 – 1426.
21. German A., Lauchle G.C. Axisymmetric scattering of spherical waves by a prolate spheroid // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. Vol. 65. No. 5. P. 1322 – 1327.
22. Клещев А.А. Дифракции звука на телах со смешанными граничными условиями // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 4. С. 632 – 634.
23. Толоконников Л.А. Рассеяние звука на сфероиде со смешанными граничными условиями // Известия Тульского гос. ун-та. Серия Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4. Вып. 1. С. 139 – 142.
24. Толоконников Л.А. Рассеяние цилиндрических и сферических звуковых волн сфероидом со смешанными граничными условиями // Известия Тульского гос. ун-та. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 11. Вып. 5. С. 201 – 207.
25. Yeh C. Scattering of acoustic waves by a penetrable prolate spheroid. I. Liquid prolate spheroid // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. Vol. 42. No. 2. P. 518 – 521.
26. Burke J.E. Scattering by penetrable spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1968. Vol. 43. No. 4. P. 871 – 875.

27. Родионова Г.А., Толоконников Л.А. Рассеяние звука вращающимся сфероидом // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 5. С. 895 – 899.
28. Котсис А. Д., Роумелиотис Дж. А. Рассеяние звука на проницаемом сфероиде // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 2. С. 189 – 204.
29. Flax L., Dragonette L., Varadan V.K., Varadan V.V. Analysis and computation of the acoustic scattering by an elastic prolate spheroid obtained from the T-matrix formulation // J. Acoust. Soc. Amer. 1982. Vol.71. No. 5. P. 1077 – 1082.
30. Клещев А.А. Трехмерные и двумерные (осесимметричные) характеристики упругих сфероидальных рассеивателей // Акуст. журн. 1986. Т.32. № 2. С. 268 – 271.
31. Клещев А.А., Ростовцев Д.М. Рассеяние звука упругой и жидкой эллипсоидальными оболочками вращения // Акуст. журн. 1986. Т.32. № 5. С. 691 – 694.
32. Werby M., Graunard G. Classification of resonances in the scattering from submerged spheroidal shells insonified at arbitrary angles of incidence // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. Vol.82. No. 4. P. 1369 – 1377.
33. Hackman R.H., Sammelmann G.S., Williams K.L., Trivett D.H. A reanalysis of the acoustic scattering from elastic spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. Vol. 83. No. 4. P. 1255 – 1266.
34. Рождественский К.Н., Толоконников Л.А. О рассеянии звуковых волн на упругом сфероиде // Акуст. журн. 1990. Т.36. № 5. С. 927 – 930.
35. Толоконников Л.А., Скобельцын С.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом сфероиде при наклонном падении // Дифф. уравнения и прикл. задачи. 1991. С. 113 – 119. Тула: Изд-во Тульск. политехн. ин-та.
36. Bao X L., Uherall H., Niemiec J. Experimental study of sound scattering by elastic spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1997. Vol. 102. No. 2. P. 933 – 942.
37. Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом сфероиде со сферической полостью, расположенной произвольным образом // Известия Тульского гос. ун-та. Естеств. науки. 2011. Вып. 2. С. 169 – 175.
38. Hackman R.H., Werby M.F. Nearfield effects in acoustic scattering // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. Vol. 75. No. 3. P. 1001 – 1003.
39. Толоконников Л.А. Рассеяние цилиндрических и сферических звуковых волн упругим сфероидом с произвольно расположенной сфероидальной полостью // Вестник ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2011. Т.17. Вып.1. С. 78 – 84.
40. Yeh C. Scattering by liquid-coated prolate spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. Vol. 46. No. 3. P. 797 – 801.
41. Charalambopoulos A., Dassios G., Fotiadis D.I., Massalas C.V.: Scattering of a point generated field by a multilayered spheroid // Acta Mech. 2001. Vol. 150. No. 2. P. 107 – 119.
42. Charalambopoulos A., Fotiadis D.I., Massalas C.V. Scattering of a point generated field by kidney stones // Acta Mech. 2002. Vol. 153. No. 1. P. 63 – 77.
43. К. Фламмер. Таблицы волновых сфероидальных функций. М.: ВЦ АН СССР, 1062. 140 с.
44. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики Т.2. М.: ИЛ, 1960. 886 с.

45. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
46. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962. 708 с.
47. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.

REFERENCES

1. Spence, R. D., Granger, S. 1951, "The scattering sound from a prolate spheroid", *Acoust. Soc. Amer.*, vol. 23, no. 6, pp. 701 – 706.
2. Einspruch, N. G., Barlow, C. A. 1961, "Scattering of a compressional wave by a prolate spheroid", *Quart. J. Appl. Math.*, vol. 19, no. 3, pp. 253 – 258.
3. Senior, T. B. A. 1966, "The scattering from acoustically hard and soft prolate spheroids for axial incidence", *Can. J. Phys.*, vol. 44, no. 3, pp. 657 – 667.
4. Kleshchev, A. A., Sheiba, L. S. 1970, "Scattering of a sound wave by ideal prolate spheroids", *Soviet Phys. Acoust.*, vol. 16, no. 2, pp. 219 – 222.
5. Andebura, V. A., Ostashevskii, A. P. 1974, "Scattering of sound by rigid prolate spheroids", *Akust. Zhurn.*, vol. 20, no. 2, pp. 179 – 183, [in Russian].
6. Varadan, V. K., Varadan, V. V., Dragonette, L. R., Flax L. 1982, "Computation of rigid body scattering by prolate spheroids using the T-matrix approach", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 71, no. 1, pp. 22 – 25.
7. Barton, J. P., Wolf, N. L., Zhang, H., Tarawneh, C. 2003, "Near-field calculations for a rigid spheroid with an arbitrary incident acoustic field", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 113, no. 3, pp. 1216 – 1222.
8. Roumeliotis, J. A., Kotsis, A. D., Kolezas G. 2007, "Acoustic Scattering by an Impenetrable Spheroid", *Akust. Zhurn.*, vol. 53, no. 4, pp. 500 – 513, [in Russian].
9. Senior, T. B. A. 1960, "Scalar diffraction by a prolate spheroid at low frequencies", *Can. J. Phys.*, vol. 38, no. 12, pp. 1632 – 1641.
10. Burke, J. E. 1966, "Low-frequency scattering by soft spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 39, no. 5, pp. 826 – 831.
11. Burke, J. E. 1966, "Long-wavelength scattering by hard spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 40, no. 2, pp. 325 – 330.
12. Asvestas, J. S., Kleinman, R. E. 1969, "Low frequency scattering by spheroids and disks. 1. Dirichlet problem for a prolate spheroid", *J. Inst. Math. Appl.*, vol. 6, no. 1, pp. 42 – 56.
13. Asvestas, J. S., Kleinman, R. E. 1969, "Low frequency scattering by spheroids and disks. 2. Neumann problem for a prolate spheroid", *J. Inst. Maths. Appl.*, vol. 6, no. 1, pp. 57 – 75.
14. Gatkin, N. G., Paramonova, S. N., P'yanov, V. M. 1971, "Scattering of sound by rigid prolate spheroids", *Akust. Zhurn.*, vol. 17, no. 3, pp. 371 – 378, [in Russian].
15. Sammelmann, G. S., Trivett, D. H., Hackmann, R. H. 1988, "High-frequency scattering from rigid prolate spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 83, no. 1, pp. 46 – 54.

16. Lauchle, G. C. 1975, "Short-wavelength acoustic diffraction by prolate spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 58, no. 3, pp. 568 – 575.
17. Lauchle, G. C. 1975, "Short-wavelength acoustic backscattering by a prolate spheroid", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 58, no. 3, pp. 576 – 580.
18. Tolokonnikov, L. A. 1975, "Scattering of cylindrical sound waves on a spheroid", *Applied Mathematics*, no. 3, pp. 3 – 9, Tula Politech. Inst., Tula, [in Russian].
19. Kleshev, A. A. 1973, "Scatterer in the field of a point source", *Akust. Zhurn.*, vol. 19, no. 3, pp. 455 – 457, [in Russian].
20. Blake, W. K., Wilson, G. A. 1977, "Short-wavelength diffracted surface pressures on a rigid prolate spheroid", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 61, no. 6, pp. 1419 – 1426.
21. German A., Lauchle, G. C. 1979, "Axisymmetric scattering of spherical waves by a prolate spheroid", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 65, no. 5, pp. 1322 – 1327.
22. Kleshchev, A. A. 1974, "Diffraction of sound on bodies with mixed boundary conditions", *Akust. Zhurn.*, vol. 20, no. 4, pp. 632 – 634, [in Russian].
23. Tolokonnikov, L. A. 1998, "Sound scattering on a spheroid with mixed boundary conditions", *Izv. Tul. Gos. Univ. Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 4, no. 1, pp. 139 – 142, [in Russian].
24. Tolokonnikov, L. A. 2005, "Scattering of cylindrical and spherical sound waves by a spheroid with mixed boundary conditions", *Izv. Tul. Gos. Univ. Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 11, no. 5, pp. 201 – 207, [in Russian].
25. Yeh, C. 1967, "Scattering of acoustic waves by a penetrable prolate spheroid. I. Liquid prolate spheroid", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 42, no. 2, pp. 518 – 521.
26. Burke, J. E. 1968, "Scattering by penetrable spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 43, no. 4, pp. 871 – 875.
27. Rodionova, G. A., Tolokonnikov, L. A. 1989, "Sound scattering by a rotating spheroid", *Akust. Zhurn.*, vol. 35, no. 5, pp. 895 – 899, [in Russian].
28. Kotsis, A. D., Roumeliotis, J. A. 2008, "Acoustic Scattering by a Penetrable Spheroid", *Akust. Zhurn.*, vol. 54, no. 2, pp. 189 – 204, [in Russian].
29. Flax, L., Dragonette, L., Varadan, V. K., Varadan, V. V. 1982, "Analysis and computation of the acoustic scattering by an elastic prolate spheroid obtained from the T-matrix formulation", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 71, no. 5, pp. 1077 – 1082.
30. Kleshchev, A. A. 1986, "Three dimensional and two-dimensional (axis symmetrical) characteristics of elastic spheroidal scatterers", *Akust. Zhurn.*, vol. 32, no. 2, pp. 268 – 270, [in Russian].
31. Kleshchev, A. A., Rostovtsev, D. M. 1986, "Sound scattering by solid and liquid ellipsoidal shells of revolution", *Akust. Zhurn.*, vol. 32, no. 5, pp. 691 – 694, [in Russian].
32. Werby, M., Graunard, G. 1987, "Classification of resonances in the scattering from submerged spheroidal shells insonified at arbitrary angles of incidence", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 82, no. 4, pp. 1369 – 1377.
33. Hackman, R. H., Sammelmann, G. S., Williams, K. L., Trivett, D. H. 1988, "A reanalysis of the acoustic scattering from elastic spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 83, no. 4, pp. 1255 – 1266.

34. Rozhdestvenskii, K. N., Tolokonnikov, L. A. 1990, "Acoustic scattering by an elastic spheroid", *Soviet Physics. Acoustics*, vol. 36, no. 5, pp. 515 – 516.
35. Tolokonnikov, L. A., Skobel'tsyn, S. A. 1991, "Diffraction of a plane sound wave on an elastic spheroid at an inclined incidence", *Differ. equations and appl. probl.*, pp. 113 – 119, Tula Politech. Inst., Tula, [in Russian].
36. Bao, X. L., Uherall, H., Niemiec, 1997, J. "Experimental study of sound scattering by elastic spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 102, no. 2, pp. 933 – 942.
37. Tolokonnikov, L. A. 2011, "Diffraction of a plane sound wave on an elastic spheroid with an arbitrary located spherical cavity", *Izv. Tul. Gos. Univ. Ser. Estestv. Nauki*, no. 2, pp. 169 – 175, [in Russian].
38. Hackman, R. H., Werby, M. F. 1984, "Nearfield effects in acoustic scattering", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 75, no. 3, pp. 1001 – 1003.
39. Tolokonnikov, L. A. 2011, "Scattering of cylindrical and spherical sound waves by a elastic spheroid with an arbitrary located spheroidal cavity", *Vest. Tul. Gos. Univ. Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 17, no. 1, pp. 78 – 84, [in Russian].
40. Yeh, C. 1969, "Scattering by liquid-coated prolate spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 46, no. 3, pp. 797 – 801.
41. Charalambopoulos, A., Dassios, G., Fotiadis, D. I., Massalas, C. V. 2001, "Scattering of a point generated field by a multilayered spheroid", *Acta Mech.*, vol. 150, no. 2, pp. 107 – 119.
42. Charalambopoulos, A., Fotiadis, D. I., Massalas, C. V. 2002, "Scattering of a point generated field by kidney stones", *Acta Mech.*, vol. 153, no. 1, pp. 63 – 77.
43. Flammer, C. 1957, "Spheroidal Wave Functions", *Stanford University Press, Stanford*, 220 p.
44. Mors, P. M., Feshbach, H. 1953, "Methods of Theoretical Physics", *vol. 2, McGraw-Hill, New York*, 1001 p.
45. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", *Sudostroenie, Leningrad*, 352 p. [in Russian].
46. Kantorovich, L. V., Krilov, V. I. 1962, "Approximate methods of higher analysis", *Fizmatgiz, Moscow*, 708 p., [in Russian].
47. Lebedev, N. N. 1963, "Special Functions and their Applications", *Fizmatgiz, Moscow*, 358 p., [in Russian].

Получено: 14.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025