ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-181-189

Об определении вектора Умова – Пойнтинга при распространении акустических волн в гипопругой среде¹

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич, Д. В. Праведников

Соколова Марина Юрьевна — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Христич Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Праведников Даниил Вячеславович — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: zumastral@mail.ru

Аннотация

Для гипопругих сред с начальными напряжениями распространение акустических волн рассматривается с точки зрения наложения малых возмущений на конечные деформации. Начальное состояние среды характеризуется однородными полями конечных деформаций и напряжений, распространение волны описывается малыми возмущениями поля перемещений. В статье получены линеаризованная в окрестности начального состояния формулировка теоремы об изменении кинетической энергии среды и, как ее следствие, формулировка акустической теоремы Пойнтинга для гипопругой среды. Выписано выражение для вектора Умова–Пойнтинга для гипопругой среды через обобщенный тензор истинных напряжений.

Для плоских монохроматических волн определено изменение тензора напряжений, связанное с прохождением волны в среде с начальными напряжениями, получено выражение для вектора Умова – Пойнтинга через второй тензор Кристоффеля и начальные напряжения, действующие в среде. Получено выражение для вектора лучевой скорости, учитывающее действующие в среде начальные напряжения. Показано, что при действии начальных напряжений вектор Умова – Пойнтинга отклоняется от вектора лучевой скорости. Этот результат не позволяет использовать вектор лучевой скорости для определения направления потоков энергии при распространении акустических волн в гипопругих средах с начальными напряжениями.

Ключевые слова: гипопругая среда, начальные напряжения, акустические волны, анизотропные материалы, «снос» энергии, акустическая теорема Пойнтинга, вектор Умова – Пойнтинга, вектор лучевой скорости.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Соколова, М. Ю., Христич, Д. В., Праведников, Д. В. Об определении вектора Умова – Пойнтинга при распространении акустических волн в гипопругой среде // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 181–189.

¹Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-181-189

On the determination of the Umov – Poynting vector in the propagation of acoustic waves in a hypoelastic medium

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, D. V. Pravednikov

Sokolova Marina Yurievna — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Khristich Dmitrii Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Pravednikov Daniil Vyacheslavovich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: zumastral@mail.ru

Abstract

For hypoelastic media with initial stresses, the propagation of acoustic waves is considered from the point of view of superposition of small perturbations on finite strains. The initial state of the medium is characterized by homogeneous fields of finite strains and stresses, wave propagation is described by small perturbations of the displacement field. In the article, the formulation of the theorem on the change in the kinetic energy of the medium, linearized in the vicinity of the initial state, and, as a consequence, the formulation of the acoustic Poynting theorem for a hypoelastic medium are obtained. An expression for the Umov – Poynting vector for a hypoelastic medium is written in terms of a generalized true stress tensor.

For plane monochromatic waves, the change in the stress tensor associated with the passage of a wave in a medium with initial stresses is determined, and an expression for the Umov–Poynting vector is obtained through the second Christoffel tensor and the initial stresses acting in the medium. An expression for the radial velocity vector that takes into account the initial stresses acting in the medium is obtained. It is shown that under the action of initial stresses, the Umov – Poynting vector deviates from the radial velocity vector. This result does not allow to use the radial velocity vector to determine the direction of energy flows during the propagation of acoustic waves in hypoelastic media with initial stresses.

Keywords: hypoelastic medium, initial stresses, acoustic waves, anisotropic materials, energy “drift”, acoustic Poynting theorem, Umov – Poynting vector, radial velocity vector.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Sokolova, M. Yu., Khristich, D. V., Pravednikov, D. V. 2025, “On the determination of the Umov – Poynting vector in the propagation of acoustic waves in a hypoelastic medium”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 181–189.

Введение

Модели гипоупругих материалов часто используются для анализа поведения различных сред, таких как композиты, полимеры, грунты, биологические ткани, особенно в тех случаях, когда они работают в области больших деформаций. Для определения свойств и структуры

таких материалов, проведения неразрушающего контроля в изделиях из них применяются методы акустоупругости, связанные с распространением звуковых волн.

Особенности распространения акустических волн в изотропных гипопругих материалах рассматривались в работах [1, 2, 3, 4, 5]. В работах [6, 7, 8, 9, 10] предложена приближенная теория распространения акустических волн в анизотропных гипопругих средах с начальными напряжениями. В работах [5, 6, 7] получены линеаризованные в окрестности начального состояния динамические уравнения распространения акустических волн, а в статьях [8, 9] получены динамические уравнения, записанные относительно поля скоростей, и представление для акустического тензора среды с начальными напряжениями. На основе этих уравнений на примере анизотропного материала с симметрией свойств, присущей кристаллам кубической сингонии, в работах [8, 9] проанализировано влияние начальных напряжений на фазовые скорости распространения волн, а также на ориентацию векторов поляризации, векторов лучевых скоростей и векторов рефракции (при отражении от жесткой стенки) относительно вектора волновой нормали. В работе [10] рассмотрено распространение акустических волн в трансверсально-изотропных средах и средах с симметрией свойств, присущей кристаллам гексагональной сингонии.

Известным является факт, что в волновых процессах не происходит перенос массы, они сопровождаются переносом энергии. В линейной теории распространения упругих волн полагают, что направление переноса энергии определяется лучевым вектором [11, 12, 13]. В случае изотропных материалов лучевой вектор совпадает с направлением распространения волны, а в анизотропных материалах происходит так называемый «снос» энергии. При этом оказывается, что направления лучевого вектора и вектора волновой нормали не совпадают. В связи с этим представляет интерес определение направления потоков энергии, переносимой волной, в средах с начальными напряжениями. В настоящей статье для плоских монохроматических волн, распространяющихся в гипопругой среде с начальными напряжениями, будут получены выражения для составляющих вектора Умова–Пойнтинга, характеризующего по величине и направлению перенос энергии.

1. Акустическая теорема Пойнтинга для гипопругой среды с начальными напряжениями

Будем считать, что среда, в которой распространяются акустические волны, является гипопругой. Определяющие соотношения для гипопругой среды устанавливают связь между объективной производной обобщенного тензора истинных напряжений $\Sigma = J\mathbf{S}$ и тензором деформации скорости $\mathbf{W}$:

$$\Sigma^\Delta = \mathbf{N} \cdot \mathbf{W}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{N}$ — тензор четвертого ранга, определяемый свойствами среды, $\mathbf{S}$ — тензор истинных напряжений Коши, $J = \det \Phi$ — определитель аффинора деформаций Φ , характеризующий относительное изменение объема: $J = \frac{dV}{dV_0}$, двумя точками обозначено двойное скалярное произведение.

В качестве объективной производной в (1.1) используем полярную производную [14]:

$$\Sigma^\Delta = \dot{\Sigma} + \Omega \cdot \Sigma - \Sigma \cdot \Omega, \quad \Omega = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}, \quad (1.2)$$

где Ω — тензор спина, $\mathbf{R}$ — тензор поворота, входящий в полярное разложение аффинора деформаций.

Полярная производная Σ^Δ (1.2) определяет скорость изменения тензора Σ относительно полярного базиса, вращающегося со скоростью Ω относительно неподвижного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Полная производная тензора Σ определяет скорость его изменения относительно неподвижного базиса.

Рассмотрим три конфигурации среды: отсчетную, соответствующую моменту времени $t = t_0$, начальную ($t = t_1$) и конечную ($t > t_1$) [15]. Считаем, что в отсчетной конфигурации материал находится в естественном состоянии, т.е. в нем отсутствуют напряжения и деформации. В результате движения среда переходит в начальное состояние, которое характеризуется полем перемещений $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}_0, t_1)$ и аффинором деформаций $\Phi_1 = \mathbf{E} + \nabla_0 \mathbf{u}_1$, где $\nabla_0(\cdot) = \mathbf{e}_i \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_0^i}$ — набла-оператор отсчетного состояния, $\mathbf{E}$ — единичный тензор, $\mathbf{x}_0 = x_0^i \mathbf{e}_i$ — радиус-вектор точки в отсчетном состоянии.

Напряжения характеризуются тензором истинных напряжений Коши $\mathbf{S}_1$, поля деформаций и напряжений в начальном состоянии однородны. Положение частиц среды определяется вектором $\mathbf{x}_1(\mathbf{x}_0, t_1) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_0, t_1)$.

В момент времени $t = t_1$ возникает возмущение поля перемещений, определяемое вектором $\mathbf{u}_{12}$ и связанное с прохождением акустической волны. В конечной конфигурации поле перемещений определяется выражением

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_0, t_1) + \mathbf{u}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau), \quad (1.3)$$

где $\tau = t - t_1$, а поле напряжений характеризуется тензором

$$\mathbf{S}_2(\mathbf{x}_2, t) = \mathbf{S}_1(\mathbf{x}_1, t_1) + \mathbf{S}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau), \quad (1.4)$$

где $\mathbf{S}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau)$ — изменение поля напряжений, вызванное возмущением перемещений $\mathbf{u}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau)$.

Напряжения (1.4) удовлетворяют уравнениям движения, Эйлерова форма которых имеет вид

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{S}_2 = \rho_2 \ddot{\mathbf{u}}_2, \quad \nabla_2(\cdot) = \mathbf{e}_i \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2^i}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_{12}. \quad (1.5)$$

При рассмотрении акустических волн принято считать, что перемещения $\mathbf{u}_{12}$ и их градиенты малы [15, 16]. В рамках этого предположения в работе [8] получены линейризованные в окрестности начального состояния уравнения распространения малых возмущений поля перемещений в виде:

$$\nabla_1 \cdot (J_1 \mathbf{S}_{12}) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_{12}. \quad (1.6)$$

Перейдем в уравнениях (1.6) к обобщенному тензору напряжений, который входит в определяющие соотношения (1.1). Обозначим изменение обобщенного тензора напряжений, вызванное возмущением перемещений $\mathbf{u}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau)$, через

$$\Sigma_{12}(\mathbf{x}_1, \tau) = \Sigma_2(\mathbf{x}_2, t) - \Sigma_1(\mathbf{x}_1, t_1), \quad (1.7)$$

где $\Sigma_1 = J_1 \mathbf{S}_1$, $\Sigma_2 = J_2 \mathbf{S}_2$. В этом случае уравнения (1.6) приводятся к виду:

$$\nabla_1 \cdot \Sigma_{12} - \Sigma_1 \cdot \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{u}_{12} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_{12}. \quad (1.8)$$

В работе [8] также получена связь между возмущениями тензоров истинных и обобщенных напряжений, линейризованная в окрестности начального состояния:

$$J_1 \mathbf{S}_{12} = \Sigma_{12} - (\nabla_1 \cdot \mathbf{u}_{12}) \Sigma_1. \quad (1.9)$$

Для определения энергии, переносимой волной, запишем для произвольного объема V среды теорему об изменении кинетической энергии [14] в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV = \int_V \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} d\Sigma - \int_V \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{v} \nabla dV, \quad (1.10)$$

где $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{F}$ — плотность массовых сил, $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к замкнутой поверхности Σ , ограничивающей объем V .

В соответствии с (1.10) скорость изменения кинетической энергии среды, заключенной в объеме V , равна мощности внешних массовых и поверхностных сил и мощности напряжений. Известно, что скорость изменения кинетической энергии может быть записана в виде $\frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV = \int_V \frac{\rho}{2} \frac{dv^2}{dt} dV$ [14]. В дальнейшем считаем, что внешние массовые силы отсутствуют ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$). Запишем теорему (1.10) в окрестности начального состояния, учитывая малость градиентов перемещений $\mathbf{u}_{12}$ и представляя напряжения в виде (1.4). Получим

$$\int_{V_1} \frac{\rho_1}{2} \frac{dv^2}{dt} dV = - \int_{V_1} (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_{12}) \cdot \mathbf{v} \nabla_1 dV + \int_{\Sigma_1} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_{12}) \cdot \mathbf{v} d\Sigma. \quad (1.11)$$

Применяя теорему Остроградского в правой части (1.11), получим

$$\begin{aligned} & - \int_{V_1} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{v} \nabla_1 dV + \int_{\Sigma_1} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{v} d\Sigma = \\ & = - \int_{V_1} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{v} \nabla_1 dV + \int_{V_1} \nabla_1 \cdot (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{v}) dV = \int_{V_1} \mathbf{v} \cdot (\nabla_1 \cdot \mathbf{S}_1) dV = 0 \end{aligned}$$

в силу однородности поля начальных напряжений. Тогда линеаризованная форма теоремы об изменении кинетической энергии в окрестности начального состояния имеет вид

$$\int_{V_1} \frac{\rho_1}{2} \frac{dv^2}{dt} dV + \int_{V_1} \mathbf{S}_{12} \cdot \mathbf{v} \nabla_1 dV = - \int_{\Sigma_1} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{U} d\Sigma, \quad (1.12)$$

где $\mathbf{U} = -\mathbf{S}_{12} \cdot \mathbf{v}$ — вектор Умова – Пойнтинга — вектор, поток которого через поверхность Σ_1 равен скорости изменения кинетической энергии среды в объеме V_1 за вычетом мощности напряжений.

В линейной теории упругости вектор Умова – Пойнтинга используется для определения направления переноса энергии при распространении акустических волн и по величине равен механической (сумме кинетической и потенциальной) энергии, переносимой через единицу площади поверхности в единицу времени [11, 12].

Подставим в уравнения (1.12) представление для напряжений (1.9) и после преобразований получим

$$\int_{V_1} \rho_1 \left(\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{\Sigma}_{12} \cdot \mathbf{v} \nabla_1 - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{v} \cdot \mathbf{\Sigma}_1 \cdot \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{u}_{12} \right) dV = - \int_{\Sigma_1} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{U} d\Sigma. \quad (1.13)$$

В уравнении (1.13) напряжения $\mathbf{\Sigma}_{12}$ определяются в соответствии с соотношениями (1.1). Если напряжения $\mathbf{\Sigma}_{12}$ имеют потенциал, то второе слагаемое в интеграле по объему можно рассматривать как потенциальную энергию деформаций, возникающих при прохождении волны. Третье слагаемое можно трактовать как наведенную мощность массовых сил $\mathbf{\Sigma}_1 \cdot \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{u}_{12}$, возникающую при действии начальных напряжений. Теорема об изменении кинетической энергии, записанная в форме (1.12) или (1.13), представляет собой обобщение акустической теоремы Пойнтинга [12] на случай распространения упругих волн в среде с начальными напряжениями.

В соответствии с определением вектор Умова – Пойнтинга задается выражением

$$\mathbf{U} = -J_1^{-1} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{\Sigma}_{12} - (\nabla_1 \cdot \mathbf{u}_{12}) \mathbf{\Sigma}_1). \quad (1.14)$$

Выражение (1.14) показывает, что действие в среде начальных напряжений приводит к изменению вектора Умова – Пойнтинга как по величине, так и по направлению.

2. Определение потоков энергии при распространении монохроматических волн

Установим связь между вектором Умова – Пойнтинга и основными характеристиками монохроматических волн. Для этого умножим (1.12) на малый интервал времени Δt и обозначим через $\Delta\xi = \left(\frac{\rho_1}{2} \frac{dv^2}{dt} + \mathbf{S}_{12} \cdot \mathbf{v} \nabla_1 \right) \Delta t$ величину изменения кинетической энергии за вычетом работы напряжений в единице объема среды за малый промежуток времени. Если напряжения $\mathbf{S}_{12}$ имеют потенциал, то величина $\Delta\xi$ представляет собой изменение объемной плотности механической энергии. Тогда соотношения (1.12) могут быть записаны в виде

$$\int_{V_1} \Delta\xi dV = - \int_{\Sigma_1} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{U} \Delta t d\Sigma. \quad (2.1)$$

В качестве V_1 выберем малый объем, ограниченный поверхностями фронта волны площадью $\Delta\Sigma_1$ в моменты времени t_1 и $t_1 + \Delta t$, и боковой поверхностью, нормаль к которой в каждой точке перпендикулярна вектору Умова – Пойнтинга. Нормаль к фронту волны $\mathbf{n}$ (волновой вектор) определяет направление распространения волны. Скорость распространения волны определяется фазовой скоростью c . За время Δt фронт волны смещается на величину $c\Delta t$. На площадке $\Delta\Sigma_1$ внешняя нормаль $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$. Количество энергии, переносимой волной через площадку $\Delta\Sigma_1$ за время Δt ввиду малости рассматриваемого объема определяется выражением $\Delta\xi c \Delta t \Delta\Sigma_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{U} \Delta t \Delta\Sigma_1$ или $\Delta\xi c = \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}$.

Известно, что фазовую скорость можно определить как произведение лучевой (групповой) скорости и вектора волновой нормали: $c = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}$, где $\mathbf{w} = \frac{d\omega}{dk}$ — лучевая скорость, ω — частота, $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ — волновой вектор, k — волновое число [11, 12, 13]. Тогда

$$c = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{\Delta\xi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}, \quad (2.2)$$

что означает равенство проекций вектора лучевой скорости и вектора Умова – Пойнтинга, деленного на величину $\Delta\xi$, на направление вектора волновой нормали.

Для плоской монохроматической волны возмущение поля перемещений определяется функцией

$$\mathbf{u}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau) = A \mathbf{p} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega \tau)}, \quad (2.3)$$

где A — амплитуда, $\mathbf{p}$ — вектор поляризации единичной длины ($\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 1$).

Определим вектор Умова – Пойнтинга в соответствии с выражением (1.14). В соответствии с определяющими соотношениями (1.1) и определением полярной производной (1.2) полная производная от обобщенного тензора истинных напряжений записывается в виде:

$$\dot{\Sigma} = \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{W}} - \Omega \cdot \Sigma + \Sigma \cdot \Omega, \quad (2.4)$$

тогда напряжения Σ_{12} можно определить, интегрируя (2.4) в предположении малости перемещений $\mathbf{u}_{12}$ и их градиентов [8]. В результате получаем

$$\Sigma_{12} = \mathbf{N} \cdot \epsilon_{12} - \Omega_{12} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_1 \cdot \Omega_{12}, \quad (2.5)$$

где введены обозначения

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2}(\nabla_1 \mathbf{u}_{12} + \mathbf{u}_{12} \nabla_1), \quad \Omega_{12} = \frac{1}{2}(\nabla_1 \mathbf{u}_{12} - \mathbf{u}_{12} \nabla_1).$$

После вычисления градиента перемещений (2.3) получим

$$\nabla_1 \mathbf{u}_{12} = iA\omega e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega \tau)} \mathbf{m} \mathbf{p}, \quad \epsilon_{12} = iA\omega e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega \tau)} \frac{1}{2}(\mathbf{m} \mathbf{p} + \mathbf{p} \mathbf{m}), \quad \Omega_{12} = iA\omega e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega \tau)} \frac{1}{2}(\mathbf{m} \mathbf{p} - \mathbf{p} \mathbf{m}),$$

где $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{n}}{c}$ – вектор рефракции [11]. Тогда напряжения (2.5) принимают вид

$$\boldsymbol{\Sigma}_{12} = iA\omega e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1 - \omega\tau)} \left[\mathbf{m} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{p} - \frac{1}{2}(\mathbf{m}\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot (\mathbf{m}\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{m}) \right]. \quad (2.6)$$

Вектор скорости частиц среды определяется по перемещениям (2.3) $\mathbf{v} = -iA\omega\mathbf{p}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1 - \omega\tau)}$ и является комплексным вектором. Введем сопряженный комплексный вектор $\mathbf{v}^* = iA\omega\mathbf{p}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1 - \omega\tau)}$, так что скалярное произведение $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^* = v^2$. Вектор $\mathbf{v}^*$ удобно использовать при записи акустической теоремы Пойнтинга в комплексной форме [12] и определении вектора Умова – Пойнтинга вместо вектора $\mathbf{v}$. Непосредственное вычисление вектора Умова – Пойнтинга по формуле (1.14) с учетом (2.6) в случае плоской монохроматической волны приводит к следующему представлению:

$$\mathbf{U} = J_1^{-1}A^2\omega^2 \left[\mathbf{P} \cdot \mathbf{m} - \frac{3}{2}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1 + \frac{1}{2}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1 + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{p}\mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{p}\mathbf{m}) \right], \quad (2.7)$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{p}$ – второй тензор Кристоффеля [11, 12, 13] для гипотупругого материала.

В линейной теории распространения упругих волн [11, 12, 13] поток энергии считают направленным вдоль вектора лучевой скорости $\mathbf{w}$. В работе [9] получено выражение для этого вектора для гипотупругой среды с начальными напряжениями:

$$\mathbf{w} = \mathbf{c} + (\mathbf{E} - \mathbf{nn}) \cdot \mathbf{s}, \quad \mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{\rho_0} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{m})),$$

что после преобразований приводит к представлению вектора лучевой скорости в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{s} + \frac{c^2}{2\rho_0} \left(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{m} - \frac{1}{c^2} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{m})\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{m} \right) \mathbf{m}. \quad (2.8)$$

Пусть начальное состояние среды совпадает с отсчетным, а начальные напряжения отсутствуют: $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \mathbf{0}$. В этом случае векторы (2.7), (2.8) имеют вид:

$$\mathbf{U}|_{\boldsymbol{\Sigma}_1=0} = A^2\omega^2\mathbf{P} \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{w}|_{\boldsymbol{\Sigma}_1=0} = \mathbf{s}|_{\boldsymbol{\Sigma}_1=0} = \frac{1}{\rho_0}\mathbf{P} \cdot \mathbf{m}.$$

Из полученных выражений следует, что при отсутствии начальных напряжений, как и в линейной теории распространения упругих волн, вектор Умова – Пойнтинга и вектор лучевой скорости коллинеарны. При действии в среде начальных напряжений векторы (2.7) и (2.8) оказываются неколлинеарны, однако, легко проверить, что равенство (2.2) остается справедливым: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = \rho_1 A^2 \omega^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = c\rho_1 A^2 \omega^2$. Таким образом, при распространении монохроматических волн в гипотупругой среде с начальными напряжениями поток энергии, переносимой волной, определяется вектором Умова – Пойнтинга, но не вектором групповой скорости.

Заключение

На основании линеаризованной в окрестности начального состояния теоремы об изменении кинетической энергии получено выражение для вектора Умова – Пойнтинга (1.14), записанное через обобщенный тензор истинных напряжений. Для плоской монохроматической волны показано, что этот вектор зависит от начальных напряжений, действующих в среде. Сравнение выражений (2.7) и (2.8) показывает, что действие начальных напряжений приводит к тому, что векторы лучевой скорости и Умова – Пойнтинга перестают быть коллинеарными. В изотропной среде, когда вектор $\mathbf{P} \cdot \mathbf{m}$ направлен вдоль вектора волновой нормали, оказывается, что наличие начальных напряжений приводит к «сносу» энергетических потоков

так же, как и в анизотропных материалах. Таким образом, изотропные среды приобретают анизотропию акустических свойств. Полученный результат является особенно важным для определения энергетических коэффициентов отражения и преломления акустических волн на границе раздела анизотропных и изотропных сред.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rushchitsky J. J. Nonlinear plane waves in hypoelastic materials // Nonlinear elastic waves in materials. Foundations of Engineering Mechanics. Springer, Cham, 2014.
2. Rushchitsky J. J. On the types and number of plane waves in hypoelastic materials // International Applied Mechanics. 2005. V. 41. No. 11. P. 1288-1298.
3. Demidov V. N. Acoustic properties of isotropic hypoelastic materials with residual technological stresses // Key Engineering Materials. 2016. V. 712. P. 384-389.
4. Демидов В. Н. О расщеплении волн сдвига в изотропных гипопругих материалах // Физическая мезомеханика. 2000. Т. 3. № 2. С. 15-36.
5. Соколова М. Ю., Христинич Д. В. Акустические волны в гипопругих телах. I. Изотропные материалы // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. В. 2. С. 318-333.
6. Соколова М. Ю., Христинич Д. В. Акустические волны в гипопругих телах. II. Анизотропные материалы // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. В. 2. С. 334-349.
7. Маркин А. А., Соколова М. Ю. Динамические уравнения распространения акустических волн в предварительно деформированных материалах // Известия РАН. Механика твердого тела. 2024. № 2. С. 166-182.
8. Соколова М. Ю., Маркин А. А. Влияние начальных напряжений на распространение звуковых волн в гипопругих анизотропных материалах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 113-124.
9. Соколова М. Ю., Христинич Д. В., Праведников Д. В. Влияние начальных напряжений на основные характеристики упругих волн в анизотропных средах // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. В. 5. С. 292-306.
10. Соколова М. Ю., Христинич Д. В., Бурцев А. Ю. Упругие волны в твердых кристаллических породах // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. 2024. Вып. 4. С. 548-564.
11. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1965. 383 с.
12. Auld B. A. Acoustic Fields and Waves in Solids. Volume 1. John Wiley & Sons, Inc., 1973. 430 p.
13. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 640 с.
14. Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
15. Haupt P., Pao Y.-H., Hutter K. Theory of incremental motion in a body with initial elasto-plastic deformation // Journal of Elasticity. 1992. V. 28. P. 93-221.

16. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 512 с.

REFERENCES

1. Rushchitsky J. J. 2014, “Nonlinear plane waves in hypoelastic materials”, *Nonlinear elastic waves in materials. Foundations of Engineering Mechanics*. Springer, Cham.
2. Rushchitsky J. J. 2005, “On the types and number of plane waves in hypoelastic materials”, *International Applied Mechanics*, vol. 41, no. 11, p. 1288-1298.
3. Demidov V. N. 2016, “Acoustic properties of isotropic hypoelastic materials with residual technological stresses”, *Key Engineering Materials*, vol. 712, p. 384-389.
4. Demidov V. N. 2000, “On the splitting of shear waves in isotropic hypoelastic materials”, *Physical Mesomechanics*, vol. 3, no. 2, p. 15-36 [in Russian].
5. Sokolova, M. Yu. & Khristich, D. V. 2024, “Acoustic waves in hypoelastic solids. I. Isotropic materials”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 2, p. 318-333 [in Russian].
6. Sokolova, M. Yu. & Khristich, D. V. 2024, “Acoustic waves in hypoelastic solids. II. Anisotropic materials”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 2, p. 334-349 [in Russian].
7. Markin, A. A. & Sokolova, M. Yu. 2024, “Dynamic equations for the propagation of acoustic waves in pre-deformed materials”, *Mechanics of Solids*, vol. 59, no. 2, p. 679-688.
8. Sokolova, M. Yu. & Markin, A. A. 2024 “The influence of initial stresses on the propagation of sound waves in hypoelastic anisotropic materials”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]*, vol. 91, p. 113-124 [in Russian].
9. Sokolova, M. Yu., Khristich, D. V. & Pravednikov, D. V. 2024 “The effect of initial stresses on the main characteristics of elastic waves in anisotropic media”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, p. 2–16 [in Russian].
10. Sokolova, M. Yu., Khristich, D. V. & Burtsev, A. Yu. 2024 “Elastic waves in solid crystalline rocks”, *Izvestia Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o Zemle [Proceedings of Tula State University. Earth Sciences]*, no. 4, p. 548-564 [in Russian].
11. Fedorov, F. I. 2012, “Theory of Elastic Waves in Crystals”, *Springer*.
12. Auld, B. A. 1973, “Acoustic Fields and Waves in Solids. Volume 1”, *John Wiley & Sons, Inc.*
13. Sirotnin, Yu. I. & Shaskol'skaya, M. P. 1982, “Fundamentals of Crystal Physics”, *Mir Publishers, Moscow*.
14. Markin, A. A. & Sokolova, M. Yu. 2015, “Thermomechanics of elastoplastic deformation”, *Cambridge International Science Publishing, Cambridge*.
15. Haupt, P., Pao, Y-H. & Hutter, K. 1992, “Theory of incremental motion in a body with initial elasto-plastic deformation”, *Journal of Elasticity*, vol. 28, p. 93-221.
16. Lurie, A. I. 2012, “Non-linear theory of elasticity”, *North Holland*.

Получено: 25.11.2024

Принято в печать: 10.03.2025