

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 534.2

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-164-180

Рассеяние плоской звуковой волны жидким телом сложной формы¹

Д. В. Горбачев, Д. Р. Лепетков, С. А. Скобельцын

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dv@mail@mail.ru

Лепетков Даниил Русланович — аспирант, Тульский государственный университет; Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: Lepetkov@ya.ru

Скобельцын Сергей Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет; Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: skbl@rambler.ru

Аннотация

Рассматривается задача рассеяния плоской гармонической звуковой волны на препятствии в виде жидкого тела с неканонической формой и кусочно-гладкой поверхностью, которая аппроксимируется полигональной сеткой. Модель процесса строится на базе уравнений гидродинамики идеальной жидкости. Для решения задачи сравниваются два численно-аналитических подхода, основанных на методе конечных элементов (МКЭ) и методе граничных элементов (МГЭ). В первом подходе препятствие заключается в сферу, область внутри которой с учетом поверхности препятствия разбивается на пространственные (3D) конечные элементы. В этой области задача решается МКЭ, что дает значения потенциала на сфере, которые используются для нахождения коэффициентов сферического разложения потенциала рассеянной волны. Во втором подходе при помощи пространственной функции Грина для уравнения Гельмгольца задача сводится к системе интегральных уравнений по поверхности препятствия. Также применяется метод Бертона и Миллера для исключения неединственности решения и регуляризация сингулярных интегралов на основе тождеств для статической функции Грина. В МГЭ достаточно использовать разбиение поверхности на граничные (2D) элементы. Приводятся основные соотношения для применения численных методов и результаты решения задачи рассеяния звука на примере жидкого тела, имеющего форму объединения двух шаров одинакового радиуса. Установлено, что для достижения приемлемой точности расчета рассеянного поля метод МГЭ требует существенно меньших вычислительных затрат по сравнению с МКЭ.

Ключевые слова: рассеяние звука, жидкое тело, акустический потенциал, метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных элементов (МГЭ), функция Грина.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:

Горбачев, Д. В., Лепетков, Д. Р., Скобельцын, С. А. Рассеяние плоской звуковой волны жидким телом сложной формы // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 164–180.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024 тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 534.2

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-164-180

Scattering of a plane sound wave by a liquid body of complex shape

D. V. Gorbachev, D. R. Lepetkov, S. A. Skobel'tsyn

Gorbachev Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Lepetkov Daniil Ruslanovich — postgraduate student, Tula State University; Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: Lepetckov@ya.ru

Skobel'tsyn Sergey Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University; Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: skbl@rambler.ru

Abstract

The problem of scattering of a plane harmonic sound wave by an obstacle in the form of a liquid body with a non-canonical shape and a piecewise-smooth surface, approximated by a polygonal mesh, is considered. The process model is based on the equations of hydrodynamics for an ideal fluid. Two numerical-analytical approaches to solving the problem are compared: the finite element method (FEM) and the boundary element method (BEM). In the first approach, the obstacle is enclosed within a sphere, and the domain inside, taking into account the surface of the obstacle, is divided into spatial (3D) finite elements. In this domain, the problem is solved using FEM, which provides the potential values on the sphere. These values are then used to determine the coefficients of the spherical expansion of the scattered wave potential. In the second approach, using the spatial Green's function for the Helmholtz equation, the problem is reduced to a system of integral equations over the surface of the obstacle. The Burton-Miller method is also applied to eliminate the non-uniqueness of the solution, and singular integrals are regularized using identities for the static Green's function. In the BEM, it is sufficient to divide the surface into boundary (2D) elements. The main equations for applying the numerical methods and the results of solving the sound scattering problem for a liquid body in the form of two spheres of equal radius are presented. It is established that to achieve acceptable accuracy in calculating the scattered field, the BEM requires significantly fewer computational resources compared to the FEM.

Keywords: sound scattering, liquid body, acoustic potential, finite element method (FEM), boundary element method (BEM), Green's function.

Bibliography: 29 titles.

For citation:

Gorbachev, D. V., Lepetkov, D. R., Skobel'tsyn, S. A. 2025, "Scattering of a plane sound wave by a liquid body of complex shape", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 164–180.

Введение

Решение задачи рассеяния звука объектами сложной формы представляет интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения. В теоретическом аспекте важно получить

решения новых задач с оценкой влияния параметров среды, падающей волны, формы препятствия, а также используемых методов и алгоритмов на точность решения. В практическом аспекте необходимо создать основу для разработки инженерных технологий, применяемых в задачах обнаружения, идентификации, диагностики и дефектоскопии.

Прямые и обратные задачи дифракции звука на акустических объектах в жидкой среде исследовались, например, в работах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. В последние годы значительное внимание уделяется случаям, когда акустические препятствия обладают неоднородной структурой. Подобные задачи рассматриваются в работах [1, 4, 5, 6, 9]. Статьи [3, 5, 8, 10] посвящены решению обратных задач, основная сложность которых заключается в определении геометрических и материальных параметров рассеивающих акустических областей.

В сборнике [9] представлены работы, посвященные решению различных задач рассеяния ультразвука на биологических тканях, которые в механическом смысле моделируются как акустические среды, характеризующиеся плотностью и скоростью звука.

В данной работе рассматривается задача рассеяния плоской гармонической звуковой волны жидким телом сложной неканонической формы (раздел 1). Модель процесса формируется на основе уравнений гидродинамики идеальной жидкости (см. раздел 1). Проводится сравнение двух численно-аналитических методов решения, основанных на методе конечных элементов (МКЭ) и методе граничных элементов (МГЭ). Описание и ключевые соотношения для применения численных методов в случае МКЭ даны в разделе 2, а для МГЭ — в разделе 3. Также в разделах 1 и 3 приведено известное аналитическое решение задачи рассеяния для шара, полученное разными способами, которое использовалось для теоретического и численного обоснования методов. В разделе 4 приведены результаты решения задачи рассеяния, полученные обоими методами, и их сравнение на примере жидкого тела, состоящего из объединения двух сфер одинакового радиуса (см. рис. 1).

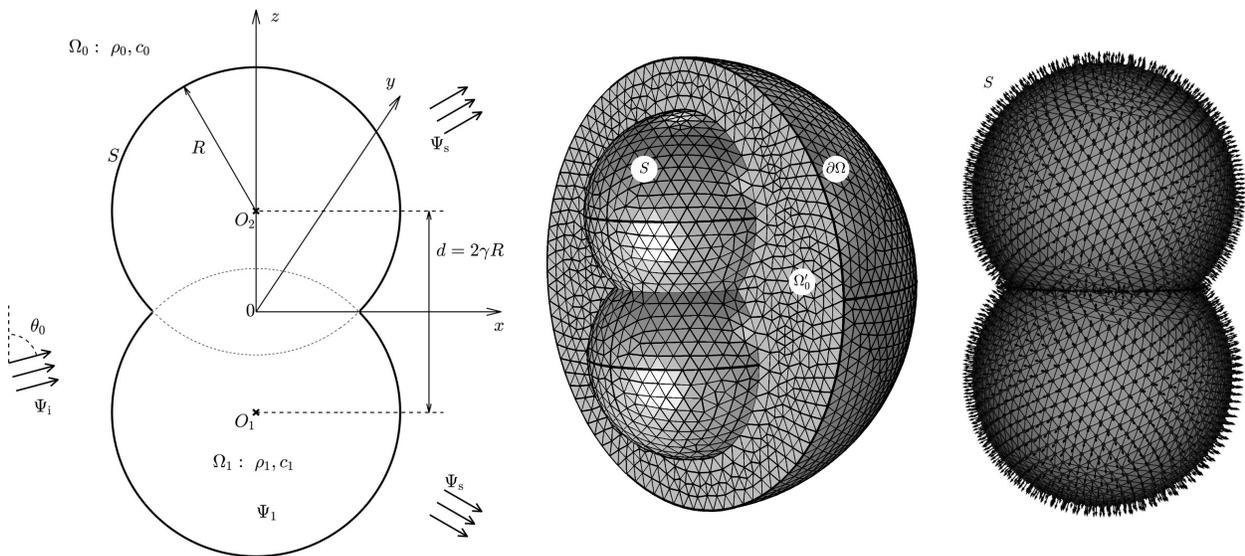


Рис. 1: Пример геометрии из объединения двух сфер. Слева математическая сцена, посередине ее аппроксимация для МКЭ, а справа — для МГЭ

1. Основные сведения о задаче

Обозначения. Пусть в неограниченной области идеальной жидкости $\Omega_0 = \mathbb{R}^3$ с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 находится препятствие (или включение) — область Ω_1 другой идеальной жидкости с параметрами ρ_1 и c_1 .

Считается, что область Ω_1 имеет достаточно общую форму. Пусть $S = \partial\Omega_1$ — граница Ω_1 , $n = n_x$ — внешняя нормаль к S в точке $x \in S$. Поверхность S предполагается кусочно-гладкой класса C^2 в точках гладкости.

Пусть $x \cdot y$ — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^3$, $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$, $\hat{x} = x/|x|$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_{x,x'}^2 = \partial_x \partial_{x'}$.

Предполагается, что в области Ω_0 распространяется плоская (падающая или первичная) гармоническая звуковая волна с потенциалом скорости Ψ_i . Волну Ψ_i будем характеризовать единичным направлением d и волновым числом $k_0 = \omega/c_0$, где ω — круговая частота волны.

В результате рассеяния волны Ψ_i препятствием Ω_1 образуются два вторичных звуковых поля — рассеянная волна в Ω_0 и поле звуковых колебаний в Ω_1 (см. [11]). Потенциал скорости рассеянной волны будем обозначать Ψ_s и пусть $\Psi_0 = \Psi_i + \Psi_s$ — суммарный потенциал в Ω_0 . Потенциал скорости звуковых колебаний в препятствии Ω_1 обозначим Ψ_1 .

Основная задача. Найти потенциал рассеянной волны Ψ_s .

Акустические уравнения. Для решения данной проблемы представим потенциал скорости в падающей плоской звуковой волне в виде

$$\Psi_i = \exp [i(k_0 d \cdot x - \omega t)], \quad (1)$$

где t — время. Без ограничения общности амплитуда падающей волны полагается равной единице.

В связи с вынужденным характером колебательных процессов и тем, что рассматривается установившийся режим колебаний, все величины, изменяющиеся со временем, будут зависеть от t аналогично функции Ψ_i . Поэтому любую функцию $\Phi(x, t)$ можно представить в виде $\Phi(x)e^{-i\omega t}$. В дальнейшем множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Потенциалы скоростей для рассеянного и возбужденного внутри объема Ω_1 полей звуковых колебаний удовлетворяют уравнениям Гельмгольца [12]

$$\Delta \Psi_s + k_0^2 \Psi_s = 0, \quad x \in \Omega_0, \quad (2)$$

$$\Delta \Psi_1 + k_1^2 \Psi_1 = 0, \quad x \in \Omega_1, \quad (3)$$

где $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа, $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число для Ω_1 .

Акустическое давление и скорость частиц акустической среды в Ω_0 и Ω_1 определяются соответственно выражениями

$$p_0 = i\rho_0\omega\Psi_0, \quad u_0 = \nabla\Psi_0, \quad (4)$$

$$p_1 = i\rho_1\omega\Psi_1, \quad u_1 = \nabla\Psi_1. \quad (5)$$

На поверхности S должны выполняться условия равенства нормальных скоростей и акустических давлений в средах Ω_0 и Ω_1 :

$$u_{1n} = u_{0n}, \quad p_1 = p_0, \quad x \in S. \quad (6)$$

где величины слева записаны для Ω_1 , а справа — для Ω_0 , $u_{jn} = u_j \cdot n$, $j = 0, 1$.

Кроме того, потенциал скорости рассеянной волны должен удовлетворять условиям излучения на бесконечности [11]

$$\Psi_s = O(|x|^{-1}), \quad \partial_{|x|}\Psi_s - ik_0\Psi_s = O(|x|^{-2}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (7)$$

а потенциал скорости в препятствии должен быть ограничен:

$$\Psi_1 = O(1), \quad x \in \Omega_1. \quad (8)$$

Таким образом, для нахождения Ψ_s нужно решить уравнения (2), (3) с учетом (1), (4), (5) и условий (6), (7), (8).

Случай шара. При тестировании методов применяется известное аналитическое решение задачи рассеяния для сферической формы Ω_1 радиуса R с центром в начале координат. Данное решение можно найти в работе [13]. Приведем его.

Решаем уравнение (2) методом разделения переменных в сферической системе координат $x = r(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$, $\hat{x} = \hat{x}(\varphi, \theta)$ с учетом условий излучения на бесконечности (7). Тогда потенциал скорости рассеянной волны представляется в виде сферического разложения

$$\Psi_s = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} h_l(k_0 r) Y_{lm}(\hat{x}), \quad (9)$$

где h_l — сферические функции Ханкеля первого рода, $Y_{lm}(\varphi, \theta) = P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ — ненормированные сферические гармоники, P_l^m — присоединенные функции Лежандра, $P_l^0 = P_l$ — многочлены Лежандра, A_{lm} — неизвестные коэффициенты потенциала Ψ_s . Соответственно, в силу (8) решение уравнения (3) имеет вид

$$\Psi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} j_l(k_1 r) Y_{lm}(\hat{x}), \quad (10)$$

где j_l — сферические функции Бесселя.

Разложим по сферическим гармоникам также падающую волну (1). Пусть направляющий вектор d имеет сферические координаты $(\varphi, \theta) = (0, \theta_0)$. Тогда согласно [11]

$$\Psi_i = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \gamma_{lm} j_l(k_0 r) Y_{lm}(\hat{x}), \quad \gamma_{lm} = \frac{i^l (2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta_0). \quad (11)$$

Далее штрих для функций обозначает дифференцирование по аргументу. Для выражений, входящих в граничные условия (6), имеем следующие разложения:

$$\begin{aligned} u_{0r} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l k_0 (\gamma_{lm} j_l'(k_0 r) + A_{lm} h_l'(k_0 r)) Y_{lm}(\hat{x}), \\ p_0 &= i\rho_0 \omega \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (\gamma_{lm} j_l(k_0 r) + A_{lm} h_l(k_0 r)) Y_{lm}(\hat{x}), \\ u_{1r} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l k_1 B_{lm} j_l'(k_1 r) Y_{lm}(\hat{x}), \\ p_1 &= i\rho_1 \omega \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} j_l(k_1 r) Y_{lm}(\hat{x}). \end{aligned}$$

Подставляя данные разложения в равенства (6), учитывая, что $|x| = R$ на S , из ортогональности сферических гармоник получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} k_1 B_{lm} j_l'(k_1 R) &= k_0 (\gamma_{lm} j_l'(k_0 R) + A_{lm} h_l'(k_0 R)), \\ \rho_1 B_{lm} j_l(k_1 R) &= \rho_0 (\gamma_{lm} j_l(k_0 R) + A_{lm} h_l(k_0 R)). \end{aligned}$$

Решая эту систему приходим к следующему утверждению.

Предложение 1 ([13]). *Для случая жидкого шара Ω_1 радиуса R с центром в нуле имеем следующие коэффициенты в рядах (9), (10):*

$$\begin{aligned} A_{lm} &= \gamma_{lm} \frac{k_0 \rho_1 j_l'(k_0 R) j_l(k_1 R) - k_1 \rho_0 j_l(k_0 R) j_l'(k_1 R)}{k_1 \rho_0 h_l(k_0 R) j_l'(k_1 R) - k_0 \rho_1 h_l'(k_0 R) j_l(k_1 R)}, \\ B_{lm} &= \gamma_{lm} \frac{h_l(k_0 R) j_l'(k_0 R) - h_l'(k_0 R) j_l(k_0 R)}{k_1 \rho_0 h_l(k_0 R) j_l'(k_1 R) - k_0 \rho_1 h_l'(k_0 R) j_l(k_1 R)}. \end{aligned}$$

2. Комбинированный метод конечных элементов

Сформулированную в разделе 1 задачу рассеяния звука можно решить численно-аналитическим методом с использованием метода конечных элементов [16] на основе подхода, предложенного в работах [14, 15].

В соответствии с этим подходом в жидкости, прилегающей к препятствию Ω_1 , выделяется сферическая поверхность S_0 радиуса R_0 такого, чтобы внутри этой поверхности оказалось Ω_1 и некоторая область содержащей среды Ω'_0 , такая что $S_0 = \partial\Omega'_0$ (см. рис. 1 посередине). При этом минимальное расстояние от S до S_0 должно иметь порядок характерного размера Ω_1 . Тогда область $\Omega = \Omega'_0 \cup \Omega_1$ можно рассматривать как некоторое неоднородное сферическое препятствие для падающей волны Ψ_1 .

Решение уравнений движения во всей области такого неоднородного препятствия будем выполнять с помощью МКЭ. Для этого к уравнениям (2), (3) надо добавить уравнение, описывающие колебания жидкости в Ω'_0 . Введем новую неизвестную переменную Ψ — потенциал скорости в Ω'_0 . Поскольку в Ω'_0 находится та же жидкость, что и во всей области Ω_0 , то потенциал Ψ должен удовлетворять волновому уравнению вида (2):

$$\Delta\Psi + k_0^2\Psi = 0, \quad x \in \Omega'_0. \quad (12)$$

При этом акустическое давление и скорость частиц акустической среды в Ω'_0 будут определяться соотношениями

$$p = i\rho_0\omega\Psi, \quad u = \nabla\Psi.$$

Немного изменится вид граничных условий (6) на поверхности S . В них надо заменить u_{0n} и p_0 на $n \cdot \nabla\Psi$ и $i\rho_0\omega\Psi$ соответственно.

Далее будем использовать сферическую систему координат с началом в центре Ω . На сферической внешней поверхности S_0 области Ω надо ввести условия согласования параметров движения жидкости в Ω'_0 и во внешней среде Ω_0 :

$$\partial_r\Psi = \partial_r\Psi_0, \quad \Psi = \Psi_0, \quad r = R_0. \quad (13)$$

Здесь первое условие выражает требование равенства нормальных скоростей в частицах, расположенных по обе стороны S_0 , а второе — требование равенства давлений.

Разобьем все подобласти шара Ω на конечные элементы в форме тетраэдров. Иллюстрация этой процедуры представлена на рис. 1 посередине, где для наглядности показана только половина слоя Ω'_0 .

Неизвестные функции в Ω представляются в виде линейных комбинаций координатных функций узлов. Тогда для потенциалов Ψ , Ψ_1 можно записать

$$\Psi(x) \approx \sum_{k=1}^K \psi_k f_k(x), \quad x \in \Omega'_0, \quad (14)$$

$$\Psi_1(x) \approx \sum_{k=1}^K \psi_{1k} f_k(x), \quad x \in \Omega_1,$$

где ψ_k — узловые значения потенциала Ψ в области Ω'_0 , ψ_{1k} — узловые значения потенциала Ψ_1 в области Ω_1 , f_k — координатные функции конечно-элементной модели, K — общее количество узлов. Для удобства считаем, что индексы $k = 1, 2, \dots, K$ соответствуют узлам всей сетки конечных элементов области Ω , причем индексы $1, 2, \dots, K_0$ при $K_0 < K$ нумеруют узлы, отвечающие поверхности S_0 . Полагаем $\psi_k \equiv 0$ и $\psi_{1k} \equiv 0$ для не относящихся к Ω'_0 и Ω_1 узлов соответственно.

Вне области Ω'_0 потенциал скорости Ψ_s рассеянной волны будем искать в виде разложения по сферическим гармоникам (9). Для потенциала скорости Ψ_i возьмем разложение (11).

Подставляя (9), (11), (14) во второе граничное условие (13) и используя ортогональность сферических гармоник, находим выражения коэффициентов A_{lm} через узловые значения ψ_k на поверхности $r = R_0$:

$$A_{lm} = -\gamma_{lm} \frac{j_l(k_0 r)}{h_l(k_0 r)} + \frac{1}{h_l(k_0 r) N_{lm}} \sum_{j=1}^{K_0} \psi_j \langle f_j, Y_{lm} \rangle, \quad (15)$$

где

$$\langle f_j, Y_{lm} \rangle = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f_j(r, \theta, \varphi) \overline{Y_{lm}(\theta, \varphi)} \sin \theta \, d\varphi \, d\theta, \quad N_{lm} = \langle Y_{lm}, Y_{lm} \rangle = \frac{4\pi(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}.$$

Теперь подставим выражение (15) для A_{lm} в первое граничное условие (13). В результате граничные условия (6) и первое из (13) будут содержать в качестве неизвестных только узловые значения функций Ψ и Ψ_1 из ограниченной области Ω .

Далее решаем краевую задачу для уравнений (3), (12) с указанными граничными условиями при помощи стандартной технологии МКЭ [16] для конечной области Ω . В результате решения находим узловые значения неизвестных функций ψ_k , $k = 1, 2, \dots, K$. Подставляя функции ψ_j , $j = 1, 2, \dots, K_0$, в (15), вычисляем коэффициенты A_{lm} потенциала скорости в рассеянном поле (9), что решает основную задачу.

3. Метод граничных элементов

Основные уравнения. Методу граничных элементов, в том числе в контексте акустических проблем, посвящено большое число работ, см., например, [17, 18, 19, 20, 21]. Воспользуемся данными источниками, цитируя только отдельные места.

Из результатов раздела 1 следует, что потенциал $\Psi_0 = \Psi_i + \Psi_s$ удовлетворяет внешней краевой задаче для уравнения Гельмгольца, а потенциал Ψ_1 — внутренней краевой задаче. Поэтому для $x \in \Omega_0$ имеем интегральные уравнения

$$C(x)\Psi_0(x) = \int_S [\partial_{n'} G_{k_0}(x', x)\Psi_0(x') - G_{k_0}(x', x)\partial_{n'}\Psi_0(x')] \, dx' + \Psi_1(x), \quad (16)$$

$$(C(x) - 1)\Psi_1(x) = \int_S [\partial_{n'} G_{k_1}(x', x)\Psi_1(x') - G_{k_1}(x', x)\partial_{n'}\Psi_1(x')] \, dx', \quad (17)$$

где $dx' = dS(x')$, $n' = n_{x'}$, $G_k(x, y) = (4\pi r)^{-1} e^{ikr}$, $r = |x - y|$, — функция Грина для уравнения Гельмгольца в \mathbb{R}^3 , удовлетворяющая условию Зоммерфельда для уходящих волн (7), функция $C(x) = 0$ внутри Ω_1 , $C(x) = 1$ снаружи Ω_1 и $C(x)$ на поверхности $x \in S$ — положительный кусочно-постоянный геометрический коэффициент, зависящий от скачка нормали, в частности, $C(x) = 1/2$ в точках гладкости S .

При $x \in S$ уравнения (16), (17) переходят в граничные интегральные уравнения метода граничных элементов. Для нахождения неизвестных граничных значений потенциалов в них присоединяем граничные условия (6)

$$\partial_n \Psi_0(x) = \partial_n \Psi_1(x), \quad \rho_0 \Psi_0(x) = \rho_1 \Psi_1(x), \quad x \in S. \quad (18)$$

Как показано в работе [17], решение граничного уравнения (16) неединственно для волновых чисел k_0 , для которых $-k_0^2$ — собственное значение оператора Лапласа Δ во внутренней

задаче. Чтобы избежать этого, воспользуемся идеей Бертона и Миллера [17] и запишем комбинированное уравнение. Оно получается, если тождество (16) при $x \in S$ продифференцировать по нормали n_x , умножить результат на комплексный параметр α и прибавить его к исходному уравнению. Тогда с учетом кусочного постоянства $C(x)$ находим

$$C(x)\partial_n\Psi_0(x) = \int_S [\partial_{n',n}^2 G_{k_0}(x',x)\Psi_0(x') - \partial_n G_{k_0}(x',x)\partial_{n'}\Psi_0(x')] dx' + \partial_n\Psi_i(x)$$

и комбинированное уравнение Бертона–Миллера

$$C(x)T_\alpha(\Psi_0(x)) = \int_S [T_\alpha(\partial_{n'}G_{k_0}(x',x))\Psi_0(x') - T_\alpha(G_{k_0}(x',x))\partial_{n'}\Psi_0(x')] dx' + T_\alpha(\Psi_i(x)),$$

где оператор $T_\alpha(f) = f + \alpha\partial_n f$ берется по x . Обычно полагают $\alpha = i/k_0$, что обосновано модельным случаем шара [22]. К уравнению (17) метод Бертона–Миллера мы не применяем.

При вычислении поверхностных интегралов с функцией Грина и ее производными нужно учитывать их сингулярность. При $r \rightarrow 0$ имеем $G_k = O(r^{-1})$ и в точках гладкости поверхности $\partial_{n'}G_k = O(r^{-1})$, $\partial_n G_k = O(r^{-1})$, $\partial_{n,n'}^2 G_k = O(r^{-2})$. Поэтому в первых трех случаях интеграл будет слабо сингулярным, а в четвертом — гиперсингулярным. Слабо сингулярный интеграл сходится в смысле Коши, а для гиперсингулярного интеграла нужно применить регуляризацию. Заметим, что регуляризация, если она доступна, также полезна в слабо сингулярном случае для увеличения точности численного интегрирования. Для интегралов с производными функции Грина в уравнениях выше регуляризация делается на основе следующих тождеств для статической функции Грина [23]:

$$\begin{aligned} \int_S \partial_{n'}G_0(x',x) dx' &= -C(x), & \int_S \partial_{n,n'}^2 G_0(x',x) dx' &= 0, \\ \int_S \partial_{n,n'}^2 G_0(x',x)(x' - x) dx' &= \int_S \partial_n G_0(x',x)n' dx' - C(x)n. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_S \partial_{n'}G_k(x',x)\Psi(x') dx' = \int_S [\partial_{n'}G_k(x',x)\Psi(x') - \partial_{n'}G_0(x',x)\Psi(x)] dx' - C(x)\Psi(x), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \int_S \partial_{n,n'}^2 G_k(x',x)\Psi(x') dx' &= \int_S [\partial_{n,n'}^2 G_k(x',x)\Psi(x') - \partial_{n,n'}^2 G_0(x',x)L_\Psi(x',x)] dx' \\ &+ \int_S \partial_n G_0(x',x)\nabla_S\Psi(x) \cdot n' dx', \quad (20) \end{aligned}$$

$$L_\Psi(x',x) = \Psi(x) + \nabla_S\Psi(x) \cdot (x' - x)_n,$$

где $(x)_n = x - (x \cdot n)n$ — проекция вектора на касательную плоскость, $\nabla_S\Psi = (\nabla\Psi)_n$ — поверхностный градиент. Теперь интегралы справа в (19), (20) не более чем слабо сингулярные. Для функции Грина G_k в общем случае формул, аналогичных (19) и (20), нет, поэтому вычисление интегралов с ней представляет определенную проблему (см., например, [24]).

Сведем задачу к системе из двух граничных интегральных уравнений, положив на основе граничных условий (18)

$$\Psi_1 = \rho_{01}\Psi_0, \quad \partial_n\Psi_1 = \partial_n\Psi_0, \quad \rho_{01} = \frac{\rho_0}{\rho_1}.$$

В итоге получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для неизвестных граничных значений Ψ_0 , $\partial_n \Psi_0$ при $x \in S$

$$C(x)T_\alpha(\Psi_0(x)) = \int_S [T_\alpha(\partial_{n'} G_{k_0}(x', x))\Psi_0(x') - T_\alpha(G_{k_0}(x', x))\partial_{n'} \Psi_0(x')] dx' + T_\alpha(\Psi_i(x)), \quad (21)$$

$$(C(x) - 1)\rho_{01}\Psi_0(x) = \int_S [\partial_{n'} G_{k_1}(x', x)\rho_{01}\Psi_0(x') - G_{k_1}(x', x)\partial_{n'} \Psi_0(x')] dx', \quad (22)$$

где для сингулярных интегралов с производными функции Грина применяется регуляризация на основе тождеств (19), (20).

По поводу доказательства гладкости (как минимум $C^{1,\beta}$) и единственности решения задачи (21), (22) см. [25].

Потенциал рассеянной волны во внешности Ω_1 вычисляется на основе (16):

$$\Psi_s(x) = \int_S [\partial_{n'} G_{k_0}(x', x)\Psi_0(x') - G_{k_0}(x', x)\partial_{n'} \Psi_0(x')] dx', \quad x \in \Omega_0 \setminus (\Omega_1 \cup S). \quad (23)$$

Здесь в дальней зоне интегралы регулярные.

Решение задачи (21), (22) для шара. Найдем аналитическое решение задачи рассеяния на основе предложения 2 для шара, чтобы сравнить его с решением из предложения 1 и использовать в тестировании МГЭ.

Пусть для удобства Ω_1 — единичный шар с центром в нуле. Тогда S — единичная сфера с центром в нуле и $C(x) = 1/2$ на ней. Напомним, что d — направляющий вектор, $|d| = 1$. Далее положим $r = |x|$. Запишем сферическое разложение падающего потенциала Ψ_i в эквивалентном (11) виде

$$\Psi_i(x) = e^{ik_0 d \cdot x} = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l j_l(k_0 r) P_l(d \cdot \hat{x}), \quad \gamma_l = (2l + 1) i^l.$$

Тогда решение задачи (21), (22) ищем в виде разложений

$$\Psi_0 = \sum_{l=0}^{\infty} U_l P_l(d \cdot \hat{x}), \quad \partial_n \Psi_0 = \sum_{l=0}^{\infty} V_l P_l(d \cdot \hat{x}),$$

где

$$U_l = \gamma_l j_l(k_0) + A_l h_l(k_0), \quad \Psi_s = \sum_{l=0}^{\infty} A_l h_l(k_0) P_l(d \cdot \hat{x}).$$

Наша цель — найти коэффициенты A_l потенциала Ψ_s .

Воспользуемся следующим сферическим разложением Джексона для функции Грина [26]:

$$G_k(x', x) = ik \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l + 1}{4\pi} j_l(kr_<) h_l(kr_>) P_l(\hat{x}' \cdot \hat{x}),$$

где $r_< = \min(r, r')$, $r_> = \max(r, r')$, $r' = |x'|$.

Производные по нормали функции Грина на сфере берем в смысле главного значения (как среднее при $r \rightarrow 1$ изнутри $r < r' < 1$ и снаружи $1 < r' < r$). Тогда

$$\partial_{n'} G_k(x', x) = \partial_n G_k(x', x) = \frac{ik^2}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l + 1}{4\pi} [j_l(k) h_l'(k) + j_l'(k) h_l(k)] P_l(\hat{x}' \cdot \hat{x})$$

$$\partial_{n,n'}^2 G_k(x', x) = ik^3 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l + 1}{4\pi} j_l'(k) h_l'(k) P_l(\hat{x}' \cdot \hat{x})$$

Здесь и далее ряды считаем формальными, чтобы не испытывать проблем со сходимостью. При выводе аналитического решения можно не использовать регуляризацию, так как она основана на добавлении и вычитании одинаковых, но по-разному вычисляемых слагаемых.

Учтем соотношение ортогональности для многочленов Лежандра

$$\frac{2l+1}{4\pi} \int_{|x|=1} P_l(d \cdot x') P_{l'}(x \cdot x') dx' = P_l(d \cdot x) \delta_{ll'}, \quad |x| = 1.$$

Тогда, опуская несложные выкладки, для (21), (22) получаем следующую систему уравнений для нахождения коэффициентов U_l , V_l :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (U_l + \alpha V_l) &= \left(\frac{ik_0^2}{2} [j_l(k_0)h_l'(k_0) + j_l'(k_0)h_l(k_0)] + \alpha ik_0^3 j_l'(k_0)h_l'(k_0) \right) U_l \\ &\quad - \left(ik_0 j_l(k_0)h_l(k_0) + \alpha \frac{ik_0^2}{2} [j_l(k_0)h_l'(k_0) + j_l'(k_0)h_l(k_0)] \right) V_l + \gamma_l (j_l(k_0) + \alpha k_0 j_l'(k_0)), \\ -\frac{1}{2} \rho_{01} U_l &= \frac{ik_1^2}{2} [j_l(k_1)h_l'(k_1) + j_l'(k_1)h_l(k_1)] \rho_{01} U_l - ik_1 j_l(k_1)h_l(k_1) V_l. \end{aligned}$$

Соберем слагаемые при одинаковых коэффициентах и упростим, воспользовавшись вронскианом для функций Бесселя

$$j_l(k)h_l'(k) - j_l'(k)h_l(k) = \frac{i}{k^2}. \quad (24)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{ik_0^2}{2} [j_l(k_0)h_l'(k_0) + j_l'(k_0)h_l(k_0)] - \alpha ik_0^3 j_l'(k_0)h_l'(k_0) \\ = -ik_0^2 j_l(k_0)h_l'(k_0) - \alpha ik_0^3 j_l'(k_0)h_l'(k_0) = -ik_0^2 h_l'(k_0)(j_l(k_0) + \alpha k_0 j_l'(k_0)), \\ \alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{ik_0^2}{2} [j_l(k_0)h_l'(k_0) + j_l'(k_0)h_l(k_0)] \right) + ik_0 j_l(k_0)h_l(k_0) \\ = \alpha ik_0^2 j_l'(k_0)h_l(k_0) + ik_0 j_l(k_0)h_l(k_0) = ik_0 h_l(k_0)(j_l(k_0) + \alpha k_0 j_l'(k_0)), \\ \frac{1}{2} + \frac{ik_1^2}{2} [j_l(k_1)h_l'(k_1) + j_l'(k_1)h_l(k_1)] = ik_1^2 j_l'(k_1)h_l(k_1). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (j_l(k_0) + \alpha k_0 j_l'(k_0))[-ik_0^2 h_l'(k_0)U_l + ik_0 h_l(k_0)V_l] &= (j_l(k_0) + \alpha k_0 j_l'(k_0))\gamma_l, \\ ik_1 h_l(k_1)[-k_1 j_l'(k_1)\rho_{01}U_l + j_l(k_1)V_l] &= 0. \end{aligned}$$

Суть метода Бертона–Миллера для уравнения (16) в данном случае состоит в том, что при $\text{Im } \alpha \neq 0$ множитель $j_l(k_0) + \alpha k_0 j_l'(k_0) \neq 0$. Причем выбор $\alpha = i/k_0$ можно считать оптимальным [22]. Если взять $\alpha = 0$, что отвечает граничному уравнению в стандартной постановке, то при $j_l(k_0) = 0$ (тогда $-k_0^2$ собственное значение Δ) получим неоднозначность. Кроме того, $h_l(k_1) \neq 0$, что иллюстрирует, почему метод Бертона–Миллера не применялся к уравнению (17). В итоге после сокращений получаем

$$\begin{aligned} -ik_0^2 h_l'(k_0)U_l + ik_0 h_l(k_0)V_l &= \gamma_l, \\ -k_1 j_l'(k_1)\rho_{01}U_l + j_l(k_1)\rho_{01}V_l &= 0. \end{aligned}$$

Подставим сюда $U_l = \gamma_l j_l(k_0) + A_l h_l(k_0)$. После несложных вычислений с учетом вронкиана (24) находим

$$\begin{aligned} -k_0 h'_l(k_0) h_l(k_0) A_l + h_l(k_0) V_l &= \gamma_l k_0 j'_l(k_0) h_l(k_0), \\ -k_1 j'_l(k_1) h_l(k_0) \rho_0 A_l + j_l(k_1) \rho_1 V_l &= \gamma_l k_1 j'_l(k_1) j_l(k_0) \rho_0 \end{aligned}$$

и коэффициенты

$$A_l = -\gamma_l \frac{k_0 j'_l(k_0) j_l(k_1) \rho_1 - k_1 j'_l(k_1) j_l(k_0) \rho_0}{k_0 h'_l(k_0) j_l(k_1) \rho_1 - k_1 j'_l(k_1) h_l(k_0) \rho_0},$$

что согласуется с предложением 1 для $R = 1$ и направления $d(0, \theta_0)$, если учесть формулу сложения для сферических гармоник.

Численный метод решения задачи (21), (22). Мы отталкиваемся от случая, когда поверхность S аппроксимирована равномерным треугольным мешем — полигональной сеткой, состоящей из вершин $\{x_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^3$ с нормальными $\{n_i\}_{i=1}^N$ и треугольных граней приблизительно одинакового малого размера (см. рис. 1 справа). Функции на меше интерполируются кусочно-линейными функциями с точками интерполяции в вершинах меша. Для приближенного вычисления интегралов по поверхности применяется следующая (масс-)формула:

$$\int_S f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i), \quad (25)$$

где w_i — площади ячеек Вороного S_i (граничных элементов) с центрами в вершинах x_i , на которые разбивается меш [27]. Так как интеграл от функции по треугольнику равен среднему от значений функции в вершинах треугольника, то для равномерного меша формула (25) имеет первый порядок точности.

В данной ситуации для решения задачи (21), (22) удобно использовать метод коллокаций [20]. Напомним, что

$$\begin{aligned} \Psi_i(x) &= e^{ik_0 d \cdot x}, \quad G_k(x', x) = (4\pi)^{-1} e^{k' r t}, \\ k' &= ik, \quad y = x' - x, \quad r = |y|, \quad t = r^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \partial_n \Psi_i &= ik_0 e^{ik_0 d \cdot x} d \cdot n, \quad \partial_{n'} r = ty \cdot n', \quad \partial_n r = -ty \cdot n, \\ \partial_{n'} G_k &= G_k(k' - t) \partial_{n'} r, \quad \partial_n G_k = G_k(k' - t) \partial_n r, \\ \partial_{n, n'}^2 G_k &= k'^2 G_k \partial_{n'} r \partial_n r - G_k(k' - t) t (n' \cdot n + 3 \partial_{n'} r \partial_n r). \end{aligned}$$

Здесь полагаем $t = 0$ для $r = 0$, так как слабо сингулярные интегралы с функцией Грина в окрестности особой точки стремятся к нулю при стягивании окрестности в точку. Однако для увеличения точности необходимо учесть приближенную формулу

$$I_i = \int_{S_i} G_k(x', x_i) dx_i \approx \sqrt{\frac{w_i}{4\pi}}$$

вместо $I_i = 0$. Эта формула выводится с учетом малости S_i путем сравнения I_i с интегралом по кругу площади w_i с центром в вершине x_i и лежащего в плоскости с нормалью n_i .

Сопоставим (x, n, x', n') с (x_i, n_i, x_j, n_j) и положим $f^{(i)} = f(x_i)$, $f^{(i, j)} = f(x_i, x_j)$. Тогда дискретная версия задачи (21), (22) с учетом регуляризации (19), (20) и формулы интегрирования (25) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} 2C^{(i)} \Psi_0^{(i)} + C^{(i)} \alpha \partial_{n_i} \Psi_0^{(i)} &= \sum_{j=1}^N w_j [\partial_{n_j} G_{k_0}^{(j, i)} \Psi_0^{(j)} - \partial_{n_j} G_0^{(j, i)} \Psi_0^{(i)} - T_\alpha(G_{k_0}^{(j, i)}) \partial_{n_j} \Psi_0^{(j)}] + T_\alpha(\Psi_i^{(i)}) \\ &+ \alpha \sum_{j=1}^N w_j [\partial_{n_i, n_j}^2 G_{k_0}^{(j, i)} \Psi_0^{(j)} - \partial_{n_i, n_j}^2 G_0^{(j, i)} L_{\Psi_0}^{(j, i)} + \partial_{n_i} G_0^{(j, i)} \nabla_S \Psi_0^{(i)} \cdot n_j], \quad (26) \end{aligned}$$

$$(2C^{(i)} - 1)\rho_{01}\Psi_0^{(i)} = \sum_{j=1}^N w_j [\rho_{01}(\partial_{n_j} G_{k_1}^{(j,i)} \Psi_0^{(j)} - \partial_{n_j} G_0^{(j,i)} \Psi_0^{(i)}) - G_{k_1}^{(j,i)} \partial_{n_j} \Psi_0^{(j)}], \quad (27)$$

где

$$T_\alpha(G_{k_0}^{(j,i)}) = G_{k_0}^{(j,i)} + \alpha \partial_{n_i} G_{k_0}^{(j,i)}, \quad T_\alpha(\Psi_i^{(i)}) = \Psi_i^{(i)} + \alpha \partial_{n_i} \Psi_i^{(i)},$$

$$L_{\Psi_0}^{(j,i)} = \Psi_0^{(i)} + \nabla_S \Psi_0^{(i)} \cdot (x_j - x_i)_{n_i}.$$

Для оценки поверхностного градиента используется тот факт, что приближенно $L_{\Psi_0}^{(i',i)} \approx \Psi_0^{(i')}$, если вершина $x_{i'}$ близка к x_i . Отсюда получаем линейную систему

$$(x_{i'} - x_i)_{n_i} \cdot \nabla_S \Psi_0^{(i)} = \Psi_0^{(i')} - \Psi_0^{(i)}, \quad i' \in R_i.$$

где R_i — множество индексов соседних с x_i вершин. Система записывается в виде $Ug = f$, где $g = \nabla_S \Psi_0^{(i)}$ — неизвестный вектор. Она переопределенная, поэтому $g = U^+ f$, где U^+ — псевдообратная матрица. Эта матрица быстро рассчитывается в каждой вершине, так как у вершин равномерного меша обычно около 6 соседей.

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Неизвестные значения $\Psi_0^{(i)}$, $\partial_{n_i} \Psi_0^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$, находятся из системы линейных уравнений размера $2N$, получаемой из уравнений (26), (27).*

Обоснование сходимости метода коллокаций можно провести по аналогии с [28]. Ключевую роль здесь играет единственность и липшицева $C^{1,\beta}$ -гладкость решения, а также оценки интегралов со слабо сингулярным ядром. Данные оценки схожи с оценками из книги [29], которые применялись для доказательства компактности интегральных операторов простого и двойного слоя.

Для приближенного вычисления потенциала рассеянной волны и, как следствие, решения основной задачи используем дискретный вариант (23)

$$\Psi_s(x) \approx \sum_{j=1}^N w_j [\partial_{n_j} G_{k_0}^{(j,i)} \Psi_0^{(j)} - G_{k_0}^{(j,i)} \partial_{n_j} \Psi_0^{(j)}],$$

где x лежит снаружи меша на отдалении.

Отметим, что для увеличения точности интегрирования и одновременного уменьшения размера системы линейных уравнений мы используем подробный меш, мелкие ячейки которого объединяются в более крупные области Вороного, которые выступают в роли граничных элементов. В качестве центров элементов, в которых вычисляются потенциалы, используются вершины упрощенного меша. Этот меш получается либо равномерным сэмплением на основе диска Пуассона, либо адаптивным методом схлопывания ребер по квадратам. Сами элементы строятся алгоритмом построения областей Вороного на графе по реберному геодезическому расстоянию.

4. Результаты и сравнение

С использованием подходов, изложенных в разделах 2 и 3, было проведено решение задачи, геометрия которой представлена на рис. 1.

Для проверки алгоритмов решения задачи рассеяния был проведен ряд численных экспериментов для составного тела Ω_1 в виде объединения двух шаров ($R = 1$, $\gamma = 0.7$) со следующими значениями материальных параметров сред: $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $c_0 = 1485$ м/с. Частота падающей волны задавалась волновым размером $k_0 a = 5$, где a — радиус шара B_a ,

объем которого равен объему тела Ω_1 . Результаты МКЭ и МГЭ оказались практически идентичными.

На рис. 2 приведены диаграммы рассеяния в дальней зоне по амплитуде. Графики МКЭ и МГЭ сливаются, поэтому оставлен только график МКЭ. Сплошная линия отвечает препятствию Ω_1 , пунктирная линия — шару B_a .

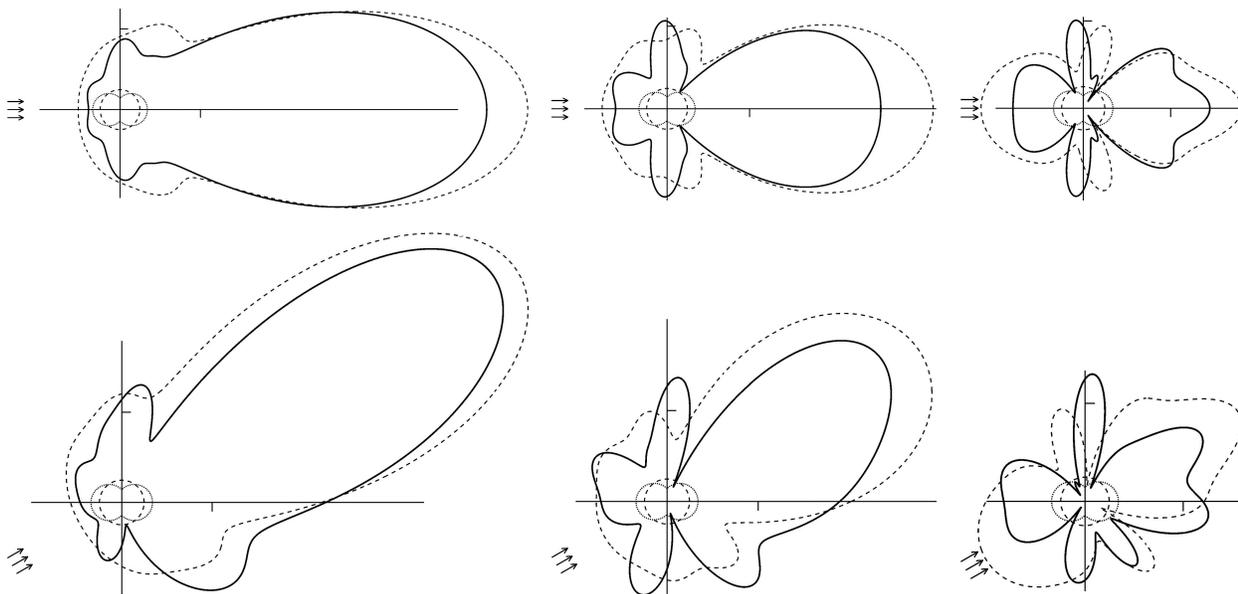


Рис. 2: Верхний ряд построен для $\theta_0 = 0^\circ$ и параметров $(\rho_1/\rho_0, c_1/c_0) = (1, 4), (3, 3), (4, 1)$ соответственно, нижний ряд отвечает $\theta_0 = 30^\circ$ и тем же параметрам

Для МКЭ использовалось 248942 узлов сетки, размер матрицы 248942×248942 , ее плотность 0.00387 (особенность МКЭ), время счета около 700 с. Для МГЭ использовалось 1000 граничных элементов (получаемых из 20000 вершин меша), размерность матрицы 2000×2000 , ее плотность 1.0 (особенность метода коллокаций для МГЭ), время счета около 10 с.

Заключение

В работе решена задача рассеяния плоской гармонической звуковой волны на препятствии в форме жидкого тела с неканонической формой и кусочно-гладкой поверхностью, аппроксимируемой полигональной сеткой. Рассмотрены и сравнены два подхода к численно-аналитическому решению: метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов (МГЭ). Для МКЭ процесс расчета включает разбиение области, содержащей препятствие, на пространственные элементы с последующим вычислением сферического разложения потенциала. Для МГЭ задача сводится к системе интегральных уравнений, решаемой с учетом метода Бертона и Миллера, а также регуляризации сингулярных интегралов.

Проведенный анализ на примере тела в форме объединения двух одинаковых шаров показал, что метод граничных элементов обладает значительными преимуществами по вычислительным затратам при сохранении приемлемой точности расчета рассеянного звукового поля. При этом каждое из рассмотренных решений имеет свои особенности: преимуществом МКЭ является вариативность, позволяющая решать в области Ω'_0 широкий класс задач, включая пространственные эффекты. В свою очередь, МГЭ отличается высокой скоростью, но меньшей универсальностью, поскольку применим только для поверхностных эффектов.

Таким образом, выбор подхода определяется задачей: МГЭ предпочтителен для быстрого и точного расчета рассеянного поля, тогда как МКЭ позволяет решать более универсальные

задачи в сложных областях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frisk G.V., DeSanto J.A. Scattering by spherically symmetric inhomogeneities // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1970. Vol. 47, № 1B. P. 172–180.
2. Überall H., George J., Farhan A.R., Mezzorani G., Nagl A., Sage K.A., Murphy J.D. Dynamics of acoustic resonance scattering from spherical targets: Application to gas bubbles in fluids // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1979. Vol. 66. P. 1161–1172.
3. Буров В.А., Румянцева О.Д. Единственность и устойчивость решения обратной задачи акустического рассеяния // *Акуст. журн.* 2003. Том. 49. № 5. С. 590–603.
4. Martin P.A. Acoustic scattering by inhomogeneous obstacles // *SIAM J. Appl. Math.* 2003. Vol. 64, № 1. P. 297–308.
5. Буров В.А., Попов А.Ю., Сергеев С.Н., Шуруп А.С. Акустическая томография океана при использовании нестандартного представления рефракционных неоднородностей // *Акуст. журн.* 2005. Том. 51. № 5. С. 602–613.
6. Алексеенко Н.В., Буров В.А., Румянцева О.Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния на основе алгоритма Новикова-Хенкина // *Акуст. журн.* 2005. Том. 51. № 4. С. 437–446.
7. Hasheminejad S.M., Sanaei R. Ultrasonic scattering by a fluid cylinder of elliptic cross section, including viscous effects // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2008. Vol. 55, № 2. P. 391–404.
8. Буров В.А., Шмелев А.А. Численное и физическое моделирование процесса томографии на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка // *Акуст. журн.* 2009. Том. 55. № 4–5. С. 466–480.
9. Duck F.A., Baker A.C., Starritt H.C. (ed.) *Ultrasound in medicine*. Boca Raton: CRC Press, 2020.
10. Li P., Zhai J., Zhao Y. Stability for the acoustic inverse source problem in inhomogeneous media // *SIAM J. Appl. Math.* 2020. Vol. 80, № 6. P. 2547–2559.
11. Skudrzyk E. *The foundations of acoustics basic mathematics and basic acoustics*. New York, Wien: Springer-Verlag, 1971.
12. Исакович М.А. *Общая акустика*. М.: Наука, 1973.
13. Anderson V.C. Sound scattering from a fluid sphere // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1950. Vol. 22, № 4. P. 426–431.
14. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // *Известия ТулГУ. Естественные науки.* 2008. Вып. 2. С. 132–145.
15. Скобельцын С.А. Некоторые обратные задачи дифракции звуковых волн на неоднородных анизотропных упругих телах // *Дисс. ... докт. физ.-мат. наук.* Тула, ТулГУ, 2020.
16. Ihlenburg F. *Finite element analysis of acoustic scattering*. New York: Springer, 2013.

17. Burton A.J., Miller G.F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems // *Proc. R. Soc. Lond. A. Math. Phys. Sci.* 1971. Vol. 323, № 1553. P. 201–210.
18. Бреббия К. Теллес Ж., Врочубел Л. Методы граничных элементов / Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
19. Chen K., Cheng J., Harris P.J. A new study of the Burton and Miller method for the solution of a 3D Helmholtz problem // *IMA J. Appl. Math.* 2009. Vol. 74, № 2. P. 163–177.
20. Chen G., Zhou J. Boundary element methods with applications to nonlinear problems / 2nd ed. Springer: Dordrecht, 2010.
21. Simpson R.N., Scott M.A., Taus M., Thomas D.C., Lian H. Acoustic isogeometric boundary element analysis // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2014. Vol. 269. P. 265–290.
22. Amini S. On the choice of the coupling parameter in boundary integral formulations of the exterior acoustic problem // *Appl. Anal.* 1990. Vol. 35. P. 75–92.
23. Liu Y.J., Rudolph T.J. Some identities for fundamental-solutions and their applications to weakly-singular boundary element formulations // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 1991. Vol. 8, № 6. P. 301–311.
24. Wilton D.R., Rao S.M., Glisson A.W., Schaubert D.H., Al-Bundak O.M., Butler C.M. Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains // *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 1984. Vol. 32, no. 3. P. 276–281.
25. Lin T.C. A proof for the Burton and Miller integral equation approach for the Helmholtz equation // *J. Math. Anal. Appl.* 1984. Vol. 103, № 2. P. 565–574.
26. Jackson J.D. Classical electrodynamics / 3rd ed. N.Y.: Wiley City, 1999.
27. Meyer M., Desbrun M., Schröder P., Barr A.H. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds // In: H.-C. Hege, K. Polthier (eds) *Visualization and Mathematics III. Mathematics and Visualization*. Berlin–Heidelberg: Springer, 2003.
28. Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца // *ЖВМ и МФ*. 2016. Том. 56. № 7. С. 1340–1348.
29. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.

REFERENCES

1. Frisk, G.V. & DeSanto, J.A. 1970, “Scattering by spherically symmetric inhomogeneities”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 47, no. 1B, pp. 172–180.
2. Überall, H., George, J., Farhan, A.R., Mezzorani, G., Nagl, A., Sage, K.A. & Murphy, J.D. 1979, “Dynamics of acoustic resonance scattering from spherical targets: Application to gas bubbles in fluids”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 66, pp. 1161–1172.
3. Burov, V.A. & Rumyantseva, O.D. 2003, “Uniqueness and stability of the solution to an inverse acoustic scattering problem”, *Acoust. Phys.*, vol. 49, no. 5, pp. 496–507.

4. Martin, P.A. 2003, “Acoustic scattering by inhomogeneous obstacles”, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 64, no. 1, pp. 297–308.
5. Burov, V.A., Popov, A.Y., Sergeev, S.N. & Shurup, A.S. 2005, “Ocean acoustic tomography with a nonstandard representation of refractive inhomogeneities”, *Acoust. Phys.*, vol. 51, no. 5, pp. 513–523.
6. Alekseenko, N.V., Burov, V.A. & Rumyantseva, O.D. 2005, “Solution of the three-dimensional inverse acoustic scattering problem on the basis of the Novikov–Henkin algorithm”, *Acoust. Phys.*, vol. 51, no. 4, pp. 367–375.
7. Hasheminejad, S.M. & Sanaei, R. 2008, “Ultrasonic scattering by a fluid cylinder of elliptic cross section, including viscous effects”, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.*, vol. 55, no. 2, pp. 391–404.
8. Burov, V.A. & Shmelev, A.A. 2009, “Numerical and physical modeling of the tomography process based on third-order nonlinear acoustic effects”, *Acoust. Phys.*, vol. 55, no. 4, pp. 482–495.
9. Duck, F.A., Baker, A.C. & Starritt, H.C. (eds). 2020, “Ultrasound in medicine”, CRC Press, Boca Raton.
10. Li, P., Zhai, J. & Zhao, Y. 2020, “Stability for the acoustic inverse source problem in inhomogeneous media”, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 80, no. 6, pp. 2547–2559.
11. Skudrzyk, E. 1971, “The foundations of acoustics basic mathematics and basic acoustics”, Springer-Verlag, New York, Wien.
12. Isakovich, M.A. 1973, “General acoustics”, Nauka, Moscow. (In Russ.)
13. Anderson, V.C. 1950, “Sound scattering from a fluid sphere”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 22, no. 4, pp. 426–431.
14. Ivanov, V.I. & Skobel'tsyn, S.A. 2008, “Modeling solutions to acoustics using FEM”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2, pp. 132–145. (In Russ.)
15. Skobel'tsyn, S.A. 2020, “Some inverse problems of diffraction of sound waves on inhomogeneous anisotropic elastic bodies”, Diss. . . . doc. physics and mathematics Sci., Tula State University, Tula. (In Russ.).
16. Ihlenburg, F. 2013, “Finite element analysis of acoustic scattering”, Springer, New York.
17. Burton, A.J. & Miller, G.F. 1971, “The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems”, *Proc. R. Soc. Lond. A. Math. Phys. Sci.*, vol. 323, no. 1553, pp. 201–210.
18. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. & Wrobel, L.C. 1984, “Boundary element techniques, theory and applications in engineering”, Springer, Berlin.
19. Chen, K., Cheng, J. & Harris, P.J. 2009, “A new study of the Burton and Miller method for the solution of a 3D Helmholtz problem”, *IMA J. Appl. Math.*, vol. 74, no. 2, pp. 163–177.
20. Chen, G. & Zhou, J. 2010, “Boundary element methods with applications to nonlinear problems”, 2nd ed., Springer, Dordrecht.
21. Simpson, R.N., Scott, M.A., Taus M., Thomas D.C. & Lian H. 2014, “Acoustic isogeometric boundary element analysis”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 269, pp. 265–290.

22. Amini, S. 1990, "On the choice of the coupling parameter in boundary integral formulations of the exterior acoustic problem", *Appl. Anal.*, vol. 35, pp. 75–92.
23. Liu, Y.J. & Rudolphi, T.J. 1991, "Some identities for fundamental-solutions and their applications to weakly-singular boundary element formulations", *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 8, no. 6, pp. 301–311.
24. Wilton, D.R., Rao, S.M., Glisson, A.W., Schaubert, D.H., Al-Bundak, O.M. & Butler, C.M. 1984, "Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 32, no. 3, pp. 276–281.
25. Lin, T.C. 1984, "A proof for the Burton and Miller integral equation approach for the Helmholtz equation", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 103, no. 2, pp. 565–574.
26. Jackson, J.D. 1999, "Classical electrodynamics", 3rd ed., Wiley City, New York.
27. Meyer, M., Desbrun, M., Schröder, P. & Barr, A.H. 2003, "Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds", In: H.-C. Hege, K. Polthier (eds) *Visualization and Mathematics III. Mathematics and Visualization*, Springer, Berlin–Heidelberg.
28. Khalilov, E.H. 2016, "Justification of the collocation method for the integral equation for a mixed boundary value problem for the Helmholtz equation", *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 56, no. 7, pp. 1310–1318.
29. Colton, D. & Kress, R. 2013, "Integral equation methods in scattering theory", SIAM, Philadelphia.

Получено: 23.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025