ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 1 (2014)

УДК 512.5

О МНОГООБРАЗИИ $_3\mathbf{N}$ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА И ЕГО ПОДМНОГООБРАЗИЯХ

Т. В. Скорая, Ю. Ю. Фролова (г. Ульяновск)

Аннотация

Статья представляет собой обзор свойств многообразия левонильпотентных ступени не выше трех алгебр Лейбница и его подмногообразий. Характеристика основного поля на протяжении всей работы предполагается равной нулю. Алгеброй Лейбница над некоторым полем называется линейная алгебра над этим полем, удовлетворяющая так называемому тождеству Лейбница $(xy)z \equiv (xz)y + x(yz)$, которое превращает правое умножение на элемент алгебры в дифференцирование этой алгебры. Поскольку тождество Лейбница по модулю антикоммутативности эквивалентно тождеству Якоби, то, очевидно, что алгебры Лейбница являются обобщением понятия алгебр Ли.

Многообразие $_3\mathbf{N}$ определяется тождеством $x(y(zt)) \equiv 0$ и обладает рядом экстремальных свойств (свойства, которыми обладает любое его собственное подмногообразие, в то время как само многообразие ими не обладает). В силу нулевой характеристики основного поля любое тождественное соотношение эквивалентно системе полилинейных тождеств, что позволяет, использовать хорошо развитую теорию представлений симметрической группы. Кроме использования классических результатов структурной теории колец и линейных алгебр, теории представлений, а также структурной теории многообразий ассоциативных алгебр, использование оригинальных комбинаторных и асимптотических рассуждений с применением тождеств, диаграмм Юнга позволили получить следующие результаты: многообразие $_3\mathbf{N}$ имеет почти экспоненциальный рост, почти полиномиальный рост кодлины, почти конечные кратности. Кроме того, данное многообразие является многообразием почти ассоциативного типа, то есть кохарактер любого его собственного подмногообразия лежит в крюке.

В данной работе рассматриваются также свойства подмногообразий многообразия $_3\mathbf{N}$: проводится описание полного списка подмногообразий почти полиномиального роста; доказывается целочисленность экспоненты любого собственного подмногообразия многообразия $_3\mathbf{N}$.

Ключевые слова: многообразия линейных алгебр, числовые характеристики многообразий, рост многообразия, кратности многообразия, кодлина многообразия, многообразие почти полиномиального роста, многообразие почти полиномиального типа, экспонента многообразия, алгебры Лейбница.

ABOUT VARIETY ${}_3$N OF LEIBNIZ ALGEBRAS AND ITS SUBVARIETIES

T. V. Skoraya, Yu. Yu. Frolova

Abstract

Article represents the review of properties of variety left nilpotent of the class not more than 3 Leibniz algebras and its subvarieties. The characteristic of basic field will be equal to zero. A Leibniz algebra is an algebra with multiplication satisfying the Leibniz identity $(xy)z = (xz)y + x(yz)$. In other words, the operator of right multiplication is a derivation of the algebra. Since Leibniz identity equivalent to the Jacobi identity, in case multiplication in Leibniz algebra is anti-commutative, it is obvious that the Leibniz algebras are generalizations of concept of Lie algebtras.

The variety ${}_3\mathbf{N}$ is defined by identity $x(y(zt)) \equiv 0$ possesses some extreme properties (properties, which any its own subvariety possesses, while the variety doesn't possess them). As the basic field has zero characteristic zero, then any identity is equivalent to the system of multilinear identities, that allows to use well-developed theory of representations of the symmetric group. In addition to using the classical results of the structural theory of rings and linear algebras, representation theory, as well as the structural theory of varieties of associative algebras, and the use of original asymptotic and combinatorial arguments with application identities and Young diagrams allowed to receive the following results: the variety ${}_3\mathbf{N}$ has almost exponential growth, almost polynomial growth of colength, almost finite multiplicity. Moreover, this variety has almost associative type, that is his own cocharacter any subvarieties lies in the hook.

In this work are considered also subvarieties of variety ${}_3\mathbf{N}$: held description of the complete list of varieties with almost polynomial growth; proved integrality of exponents any proper subvariety of variety ${}_3\mathbf{N}$.

Keywords: varieties of linear algebras, numerical characteristics of varieties, growth of variety, multiplicity of variety, colength of variety, variety with almost polynomial growth, variety with almost associative type, exponent of variety, Leibniz algebras.

1. Введение

Характеристика основного поля Φ на протяжении всей работы предполагается равной нулю. Работа связана с исследованием линейных алгебр и их многообразий. Все неопределяемые понятия и обозначения можно найти в монографии [1]. Так как выполнение тождества ассоциативности не предполагается, то договоримся опускать скобки в элементах алгебры, если они расставлены левонормированным способом, то есть $abc = ((ab)c)$. Кроме того, оператор правого умножения, например, на элемент y будем обозначать через Y. Тогда элемент $xy...y$ степени s по переменной y можно записать в виде xY^s. Элементы, содержащие кососимметрический набор из n переменных, будем записывать без знака суммирования, помечая переменные этого набора чертой или волной сверху. Например, стандартный полином в наших обозначениях будет выглядеть следующим образом:

$$St_n(x_1, ..., x_n) = \Sigma_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)} = \overline{x}_1\overline{x}_2...\overline{x}_n,$$

где S_n — симметрическая группа, а $(-1)^\sigma$ равно плюс или минус единице в зависимости от четности перестановки σ. Переменные, входящие в разные кососимметрические наборы, будем называть альтернированными и для их обозначения использовать разные символы:

$$\sum_{q\in S_n, p\in S_m}(-1)^p(-1)^q x_{q(1)}x_{q(2)}\dots x_{q(n)}y_{p(1)}y_{p(2)}\dots y_{p(m)} = \overline{x}_1\overline{x}_2\dots\overline{x}_n\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2\dots\widetilde{y}_m.$$

Векторное пространство с заданной на нем билинейной операцией называется алгеброй Лейбница, если в ней выполняется следующее тождественное соотношение

$$(xy)z \equiv (xz)y + x(yz). \tag{1}$$

Таким образом, в алгебре Лейбница оператор умножения справа на фиксированный элемент алгебры является дифференцированием этой алгебры. Вероятно, впервые этот класс алгебр был введен в работе [2]. Понятно, что любая алгебра Ли является алгеброй Лейбница, так как по модулю тождества антикоммутативности тождество (1) эквивалентно тождеству Якоби. Отметим, что тождества

$$x(yy) \equiv 0. \tag{2}$$

и $x(yz) \equiv -x(zy)$ являются следствиями тождества (1). Поэтому аналогично случаю алгебр Ли любой элемент алгебры Лейбница равен линейной комбинации левонормированных элементов.

Напомним, что многообразие линейных алгебр определяется как совокупность всех алгебр, в которых выполняется некоторый фиксированный набор тождественных соотношений. Пусть $\mathbf{V}$ некоторое многообразие алгебр Лейбница. Обозначим через $F = F(X, \mathbf{V})$ относительно свободную алгебру многообразия $\mathbf{V}$ со счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, ...\}$. Через $P_n = P_n(\mathbf{V})$ обозначим совокупность всех полилинейных элементов от $x_1, ..., x_n$ в пространстве F. Асимптотическое поведение последовательности размерностей $c_n = c_n(\mathbf{V})$ пространств $P_n = P_n(\mathbf{V})$ определяет рост многообразия. Различают полиномиальный рост многообразия, когда существуют неотрицательные числа C, m, что для любого n выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < Cn^m$. В случае существования таких чисел $C_1 > 0, C_2 > 0, d_1 > 1, d_2 > 1$, что для всех чисел n выполняются неравенства $C_1d_1^n < c_n(\mathbf{V}) < C_2d_2^n$, говорят, что рост многообразия является экспоненциальным. Если кроме этого существует число $EXP(\mathbf{V}) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}$, то его называют экспонентой многообразия $\mathbf{V}$.

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие, порожденное алгеброй A. В этом случае будем писать просто $c_n(A)$ и $EXP(A)$ вместо $EXP(\mathbf{V})$. Говорят, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет почти полиномиальный рост, если рост самого многообразия не является полиномиальным, а любое собственное подмногообразие многообразия $\mathbf{V}$ имеет полиномиальный рост.

В случае поля нулевой характеристики вся информация о многообразии содержится в его полилинейной компоненте. Поэтому изучение пространства $P_n(\mathbf{V})$ и его числовых характеристик является обоснованным. На пространстве $P_n(\mathbf{V})$ естественным образом вводится действие перестановок, что позволяет рассматривать его как ΦS_n-модуль, где S_n — симметрическая группа. Так как поле Φ имеет нулевую характеристику, то пространство $P_n(\mathbf{V})$, раскладывается в прямую сумму неприводимых подмодулей. Обозначим через χ_λ характер неприводимого подмодуля, соответствующего разбиению λ числа n. Тогда характер модуля $P_n(\mathbf{V})$ выражается формулой

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda \tag{3}$$

где m_λ – кратности неприводимых подмодулей в указанной сумме.

Важной числовой характеристикой многообразия $\mathbf{V}$ линейных алгебр является кодлина $l_n(\mathbf{V})$, которая определяется как число слагаемых в разложении характера в сумму неприводимых:

$$l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda. \tag{4}$$

Будем говорить, что кодлина многообразия $\mathbf{V}$ конечна, если существует такая константа C, не зависящая от n, что для любого n выполнено неравенство $l_n(\mathbf{V}) \leqslant C$.

Поскольку мы рассматриваем случай нулевой характеристики основного поля, то всякое тождество эквивалентно системе полилинейных тождеств, которая получается при помощи стандартного метода линеаризации [3].

2. Подмногообразия многообразия ${}_3\mathbf{N}$ алгебр Лейбница и их рост

В работе [4] исследовано многообразие ${}_3\mathbf{N}$ левонильпотентных ступени не выше трех алгебр Лейбница, которое определяется тождеством

$$x(y(zt)) \equiv 0. \tag{5}$$

В частности приведены два примера подмногообразий многообразия ${}_3\mathbf{N}$, имеющих почти полиномиальный рост. Напомним некоторые другие необходимые нам свойства этих многообразий, а также определения порождающих их алгебр.

Первое многообразие было подробно исследовано в работе [5]. Рассмотрим G — алгебру Грассмана с порождающим множеством $E = \{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$. Соответствующую алгебру Ли относительно операции коммутирования $[g_1, g_2] = g_1g_2 - g_2g_1$ обозначим $G^{(-)}$. Векторное пространство G с нулевым умножением будет рассматриваться как абелева алгебра Ли, которую обозначим через G^0. Зададим действие элементов $G^{(-)}$ на G^0 следующим образом:

$$g_i^0 g_j = (g_i g_j)^0, \quad g_j g_i^0 = 0,$$

где $g_i^0, (g_ig_j)^0$ из G^0 и g_j из $G^{(-)}$. Такое действие задает представление $G^{(-)}$ на G^0. Определим $\widetilde{G}$ как прямую сумму векторных пространств $G^{(-)}$ и G^0 ($\widetilde{G} = G^{(-)} \oplus G^0$) с умножением $(g_1 + g_1^0)(g_2 + g_2^0) = [g_1, g_2] + g_1^0 g_2$. Нетрудно проверить, что полученная алгебра будет алгеброй Лейбница. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{V}}_2$ многообразие алгебр Лейбница, порожденное алгеброй $\widetilde{G}$. Как показано в работе [5] в многообразии $\widetilde{\mathbf{V}}_2$ выполняется тождество (5), размерность пространства $P_n(\widetilde{\mathbf{V}}_2)$ равна $n2^{n-2}$. Кроме того, многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_2$ имеет почти полиномиальный рост и является наименьшим многообразием алгебр Лейбница, в котором не выполняется ни одно стандартное тождество.

Второе многообразие было определено в работе [6]. Пусть $T = \Phi[t]$ — кольцо многочленов, а H — алгебра Гейзенберга с базисом a, b, c и умножением $ab = -ba = c$. Алгебра H является алгеброй Ли. Превратим T в правый модуль алгебры H. Базисные элементы действуют справа на полином f из T следующим образом: $f \cdot c = f, f \cdot a = f', f \cdot b = tf, a \cdot f = b \cdot f = c \cdot f = 0$, где f' — производная полинома f по переменной t. Необходимая алгебра Лейбница является прямой суммой векторных пространств T и H, а умножение задается правилом:

$$(f + x)(g + y) = f \cdot y + xy,$$

где f, g из T, а x, y из H. Обозначим эту алгебру символом $\widetilde{H}$, а порождаемое ей многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_3$.

Приведенные далее результаты частично приведены в работе [7].

Лемма 1. *Если $\widetilde{\mathbf{V}}_2 \not\subset \boldsymbol{V} \subset_3 \boldsymbol{N}$, то в многообразии $\boldsymbol{V}$ тождество*

$$x_0^2 \overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_{m-1} \equiv 0$$

имеет следствие вида

$$x_0 \overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_{m+2} \equiv 0.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение многочлен $f(X_1, X_2, ..., X_{m-1})$ и множество $I_f = \{a \in A | af \equiv 0\}$. Множество I_f является по Хиггинсу (см. [8]) правым идеалом алгебры A. В нашем случае I_f будет также левым идеалом. Действительно, возьмем $a \in I_f$ и $b \in A$. Так как I_f — правый идеал, то имеет место тождество $baf(X_1, X_2, ..., X_{m-1}) \equiv 0$. В силу тождества $x_0^2 \overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_{m-1} \equiv 0$ получаем, что для всех $x_i \in A$ выполняется тождество $-abf(X_1, X_2, ..., X_{m-1}) \equiv$

0. Таким образом по определению I_f получаем, что $ba \in I_f$, то есть I_f является двусторонним идеалом алгебры A.

Из тождества $x_0^2\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{m-1} \equiv 0$ следует, что $x_0^2 \in I_f$ для любого $x_0 \in A$. Поэтому тождество $x_0^2 \equiv 0$ выполняется в фактор алгебре A/I_f. Вследствие этого данная факторалгебра является алгеброй Ли, поэтому тождество $y_1(y_2(y_3y_4)) \equiv 0$ имеет в ${}_3\mathbf{N}$ следствие вида $((y_1y_2)y_3)y_4 \equiv 0$. Следовательно, алгебра A/I_f нильпотентна ступени не выше трех. Таким образом, элемент $y_1y_2y_3y_4$ принадлежит идеалу алгебры A и по определению идеала выполняется следующее тождество

$$y_1y_2y_3y_4\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{m-1} \equiv 0.$$

"Вовлечем в кососимметризацию" элементы $y_2 = x_m, y_3 = x_{m+1}, y_4 = x_{m+2}$ и переобозначим $y_1 = x_0$, получим:

$$x_0\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{m+2} \equiv 0.$$

Лемма доказана. □

Предложение 1. *Если $\widetilde{\boldsymbol{V}}_2 \not\subset \boldsymbol{V} \subset_3 \boldsymbol{N}$, то в многообразии $\boldsymbol{V}$ выполняется тождество $x_0(x_1\widetilde{y}_1)(x_2\widetilde{y}_2)...(x_M\widetilde{y}_M) \equiv 0$.*

Доказательство. Из условия $\widetilde{\mathbf{V}}_2 \not\subset \mathbf{V}$ согласно работе [5] получаем, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполняется стандартное тождество $\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_k \equiv 0$ некоторой степени m. Заменим x_m на x_0^2, получим: $\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{m-1}\overline{x}_0^2 \equiv 0$. Все слагаемые данного тождества, не содержащие пару x_0^2 на первом месте, обращаются в ноль в силу тождества $x(yy) \equiv 0$. Таким образом, получаем следствие:

$$x_0^2\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{m-1} \equiv 0.$$

Согласно Лемме 2.1 данное тождество имеет следствие вида:

$$x_0\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{m+2} \equiv 0.$$

Докажем, что для $M \geqslant m+2$ элемент:

$$w = x_0x_{11}...x_{1i}\widetilde{y}_1x_{21}...x_{2j}\widetilde{y}_2...\widetilde{y}_{M-1}x_{M,1}...x_{M,l}\widetilde{y}_M,$$

тождественно равен нулю. Предположим обратное: Пусть $w \neq 0$. Дополнительно будем считать, что любой элемент меньшей степени, содержащий M кососимметрических переменных равен нулю. Кроме того, любой элемент, меньший лексикографически по длине промежутков между y_i, также равен нулю. Рассмотрим фрагмент $x_{11}x_{12}...x_{1i}$, не являющийся элементом алгебры A. Обозначим $x_0x_{11}x_{12}...x_{1i} = x_0'$, тогда w будет иметь вид:

$$w = x_0\widetilde{y}_1x_{21}...x_{2j}\widetilde{y}_2...\widetilde{y}_{M-1}x_{M,1}...x_{M,l}\widetilde{y}_Mx_{M+1,1}...x_{M+1,n}.$$

Таким образом мы получили уменьшение степени элемента w, что противоречит условию ее минимальности. Следовательно, элемент w не содержит фрагмент вида $x_0x_{11}x_{12}...x_{1i}$. Длина фрагментов $x_{l1}x_{l2}...x_{li}$ $(l = \overline{2, M-1})$не может быть больше 1, так как в противном случае такой фрагмент в силу лексикографической упорядоченности и тождества (5) обнуляет элемент. Следовательно элемент w имеет следующий вид:

$$w = x_0\widetilde{y}_1x_1\widetilde{y}_2x_2...x_{M-1}\widetilde{y}_M.$$

Согласно тождеству (1) в элементе w мы можем менять местами элементы x_i и y_j, но при этом возникает пара, которую мы можем перенести влево. Переменные кососимметрического набора, расположенные рядом друг с друг также можно собрать в пары в силу того же тождества (1). Таким образом, элемент w имеет ненулевое следствие w', где

$$w' \equiv x_0(\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2)...(\widetilde{y}_{r-1}\widetilde{y}_r)(x_1\widetilde{y}_{r+1})...(x_{M-r}\widetilde{y}_M).$$

Пусть на первых r местах стоят кососимметрические переменные. Предположим, что при $r \geqslant m+2$ тождество w' равно нулю. Если же $r < m+2$, то рассмотрим два случая:

1) Пусть $r = 2k$, то есть

$$w' \equiv x_0(\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2)...(\widetilde{y}_{2k-1}\widetilde{y}_{2k})(x_1\widetilde{y}_{2k+1})...(x_{M-2k}\widetilde{y}_M).$$

"Вовлечем в кососимметризацию" переменную x_1, получим следствие $w'' \equiv 0$, где

$$w'' \equiv (4k+2)w' + (M-2k)v,$$

где v — слагаемые, содержащие переменную x_1 правее скобки $(\widetilde{y}_{2k+1}\widetilde{y}_{2k+2})$. Эти слагаемые равны нулю по предположению индукции по r. Следовательно, $w' \equiv 0$, вопреки предположению.

2)Пусть $r = 2k+1$, то есть

$$w' \equiv x_0\widetilde{y}_1(\widetilde{y}_2\widetilde{y}_3)...(\widetilde{y}_{2k}\widetilde{y}_{2k+1})(x_1\widetilde{y}_{2k+2})...(x_{M-2k-1}\widetilde{y}_M).$$

"Вовлечем в кососимметризацию" переменную x_1, получим следствие $w'' \equiv 0$, где

$$w'' \equiv x_0x_1\widetilde{y}_1(\widetilde{y}_2\widetilde{y}_3)...(\widetilde{y}_{2k}\widetilde{y}_{2k+1})(x_1\widetilde{y}_{2k+2})...(x_{M-2k-1}\widetilde{y}_M) + (4k+3)w' + (M-2k-1)v',$$

где v' — слагаемые, содержащие переменную x_1 правее скобки $(\widetilde{y}_{2k+2}\widetilde{y}_{2k+3})$. Эти слагаемые равны нулю по предположению индукции по r. Рассмотрим слагаемое $x_0x_1\widetilde{y}_1(\widetilde{y}_2\widetilde{y}_3)...(\widetilde{y}_{2k}\widetilde{y}_{2k+1})(x_1\widetilde{y}_{2k+2})...(x_{M-2k-1}\widetilde{y}_M)$. Обозначим $x_0x_1 = x_0'$. Полученное слагаемое равно нулю вследствие минимальности степени тождества w. Следовательно, $w' \equiv 0$, вопреки предположению.

Таким образом, мы получаем, что если в многообразии $\mathbf{V}$ имеет место тождество $w \equiv 0$, где $w \equiv x_0\widetilde{y}_1x_1\widetilde{y}_2x_2...x_{M-1}\widetilde{y}_M$, то в этом многообразии выполняется тождество

$$x_0(x_1\widetilde{y}_1)...(x_M\widetilde{y}_M) \equiv 0. \qquad (6)$$

Предложение доказано. □

Предложение 2. *Если $\widetilde{\boldsymbol{V}}_3 \not\subset \boldsymbol{V} \subset_3 \boldsymbol{N}$, то в многообразии $\boldsymbol{V}$ выполняется тождество $x_0(x_1y)(x_2y)...(x_My) \equiv 0$.*

Доказательство. В многообразии $\mathbf{V}$ выполнено некоторое тождество $v \equiv 0$ степени k, которое не выполняется в алгебре H, то есть при подстановке в тождество некоторых элементов из алгебры H получают ненулевой элемент. Алгебра $\widetilde{H}$ удовлетворяет тождеству $x_1x_2x_3 \equiv 0$, следовательно алгебра $\widetilde{H}$ нильпотентна ступени нильпотентности не больше 2.

Пусть $degv \leqslant 2$. Тогда тождество v может иметь вид: а) $v = x_1x_2 + x_2x_1$; б) $v = x_1x_2 - x_2x_1$; в) $v = x_1x_2$. Все три подслучая влекут за собой автоматическое выполнение тождества $x_0(x_1y)(x_2y)...(x_My) \equiv 0$. Если же степень тождества v больше двух и оно содержит только элементы алгебры $\widetilde{H}$, то тождество v содержит тройку на первом месте $x_1x_2x_3$ которая обращает тождество v в ноль. Кольцо многочленов является идеалом с нулевым умножением алгебры $\widetilde{H}$. Для того, чтобы проверить, выполняется ли тождество $v \equiv 0$ в алгебре $\widetilde{H}$, необходимо в левую тождества часть подставить один элемент идеала $\Phi[t]$, вместо остальных переменных — базисные элементы a, b, c. Те переменные, вместо которых подставлен элемент a, заменим на x, вместо которых b, — на y. Переменные, вместо которых был подставлен элемент c, заменим на коммутатор yx, так как $c = ba$. И последнее, вместо переменной, заменяемой на элемент из идеала $\Phi[t]$, подставим тройное произведение $x_{01}x_{02}x_{03}$. Обозначим полученный элемент v'. Тождество $v' \equiv 0$ по прежнему не выполняется в многообразии $\widetilde{\mathbf{V}}_3$: заменим переменную x на элемент a, переменную y на элемент b (в этом случае пара yx переходит в элемент c), x_{01} на элемент из идеала $\Phi[t]$ — многочлен $f(t)$, x_{02} и x_{03} — на элемент c. Мы получим тот же результат, что и при подстановке базисных элементов a, b, c и элемента из идеала $\Phi[t]$ в элемент v. Проанализируем вид элемента v'. В силу тождества (5) все слагаемые тождества v', содержащие тройное произведение не на первом месте тождественны нулю. В силу того же тождества пару yx можно произвольно перемещать, если она стоит не на первом месте. Поэтому элемент v' можно представить в виде:

$$v' \equiv (x_{01}x_{02}x_{03})(yx)^i xxxyxyyyxyxyxxyy...$$

Согласно тождеству (1) в элементе v' можно менять местами элементы xy, но при этом возникает пара yx, которую мы можем перенести в лево. Таким образом, элемент v' можно представить в виде:

$$v' \equiv \sum_{i=0}^{\min(s,t)} \alpha_i(x_{01}x_{02}x_{03})(yx)^i x^{s-i}y^{t-i}, \qquad (7)$$

где $s = deg_x v'$ и $t = deg_y v'$. Тождество $v' \equiv 0$ не выполняется в $\widetilde{\mathbf{V}}_3$. Следовательно, хотя бы один из коэффициентов α_i, отличен от нуля. Поэтому представление элемента v' в виде (7) не тривиально.

Выберем i_0 такое, что $\alpha_{i_0} \neq 0$, но для всех $i < i_0$, $\alpha_i = 0$. Линеаризуем элемент v' и рассмотрим компоненту степени i_0 по элементу x_1:

$$v' = \alpha_{(i_0)}(x_{01}x_{02}x_{03})(yx_1)^{i_0}x_2^{s-i_0}y^{t-i_0} + u,$$

где u — слагаемые, содержащие хотя бы одну пару yx_2. Подставим вместо x_1 переменную x и вместо переменной x_2 пару yx. Все слагаемые, содержащие пару yx_2, преобразующуюся в тройку yyx, обращаются в ноль вследствие тождества (1). Таким образом, заведомо ненулевым останется лишь слагаемое $(x_{01}x_{02}x_{03})(yx)^s y^{t-i_0}$, которое мы обозначим через v''. Введем замену $y = y_1 + y_2$, линеаризуем элемент v'' и рассмотрим компоненту степени $t - i_0$ по переменной y_2:

$$v'' = (x_{01}x_{02}x_{03})(y_1x)^s y_2^{t-i_0} + p,$$

где p — слагаемые, содержащие хотя бы одну пару y_2x. Подставим вместо y_1 переменную y и вместо переменной y_2 пару yx. Все слагаемые, содержащие пару (y_2x),преобразующуюся в тройку (yyx), обращаются в ноль вследствие тождества (1). Введем еще одну замену $x_{02} = yx$ и $x_{03} = yx$. Таким образом, заведомо ненулевым останется лишь слагаемое вида:

$$(x_{01}x_{02}x_{03})(yx)^M \equiv 0,$$

где $M = s + t - i_0 + 2$. Заменим теперь x на сумму $\sum_{l=1}^{M} x_l$ и рассмотрим компоненту степени 1 по каждой из переменных x_l при $l = \overline{1, M}$. Таким образом, в многообразии $\mathbf{V}$ выполняется тождество

$$x_0(x_1y)(x_2y)...(x_My) \equiv 0. \tag{8}$$

Предложение доказано. □

Предложение 3. *Если в многообразии $\boldsymbol{V} \subset_3 \boldsymbol{N}$ выполняются тождества (6) и (8), то многообразие $\boldsymbol{V} \subset \widetilde{\boldsymbol{N_c A}}$.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $f = x_0(x_1y_1)(x_2y_2)...(x_{2n-1}y_{2n})$ и порожденный им модуль $\Phi S_n f$, который по теореме Машке раскладывается в прямую сумму неприводимых подмодулей: $K_1 \oplus K_2 \oplus ... \oplus K_s$. Рассмотрим один из подмодулей K_i, соответствующий разбиению $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t)$, где λ_i — длины строк диаграммы Юнга при $i = \overline{1, t}$. При выполнении равенства $t = M^2$ либо строка, либо столбец диаграммы Юнга будет длиннее, чем M. Согласно работе [9], элемент, соответствующий этой диаграмме, является суммой слагаемых, каждое из которых содержит или M симметрических, или M кососимметрических переменных. Тогда согласно критерию полиномиальности роста подмногообразия многообразия ${}_3\mathbf{N}$, доказанному в работе [10], многообразие $\mathbf{V}$ содержится в многообразии $\widetilde{\mathbf{N_c A}}$, то есть многообразие $\mathbf{V}$ имеет полиномиальный рост. Предложение доказано. □

Теорема 1. *Многообразие $_3\boldsymbol{N}$ имеет только два подмногообразия $\widetilde{\boldsymbol{V}}_2$ и $\widetilde{\boldsymbol{V}}_3$ почти полиномиального роста.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть в многообразии $_3\mathbf{N}$ содержится подмногообразие $\mathbf{V}$ почти полиномиального роста, отличное от $\widetilde{\mathbf{V}}_2$ и $\widetilde{\mathbf{V}}_3$. Так как $\widetilde{\mathbf{V}}_2 \not\subset \mathbf{V}$, то по предложению 2.1. в многообразии $\mathbf{V}$ выполняется тождество (6). Так как $\widetilde{\mathbf{V}}_3 \not\subset \mathbf{V}$, то по предложению 2.1. в многообразии $\mathbf{V}$ выполняется тождество (8). Тогда по предложению 2.3 многообразие $\mathbf{V}$ имеет полиномиальный рост (противоречие предположению). Теорема доказана. □

3. Числовые характеристики подмногообразий многообразия $_3\mathbf{N}$

Опишем строение семейства алгебр, порождающих многообразие $_3\mathbf{N}$. Рассмотрим алгебру Гейзенберга H^k с базисом $\{a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k, c\}$ и умножением $a_i b_j = -b_j a_i = \delta_{ij} c$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Произведение остальных базисных элементов алгебры H^k равно нулю. Пусть $T^k = \Phi[t_1, ..., t_k]$ — кольцо многочленов от переменных $t_1, ..., t_k$. Векторное пространство T^k с заданным на нем нулевым умножением является алгеброй Ли. Превратим кольцо T^k в правый модуль алгебры H^k. Для этого зададим действие базисных элементов алгебры H^k на полином $f = f(t_1, ..., t_k)$ из T^k следующим образом: $fa_i = f'_i, fb_i = t_i f, fc = f$, где f'_i — частная производная полинома f по переменной t_i. Определим новую алгебру $\widetilde{H}^k$ как прямую сумму векторных пространств H^k и T^k ($\widetilde{H}^k = H^k \oplus T^k$), в которой умножение задается по следующему правилу: $(x+f)(y+g) = xy + fy$, где x, y из H^k и f, g из T^k. Нетрудно убедиться, что алгебра $\widetilde{H}^k$ является алгеброй Лейбница, в которой выполняется тождество $x(y(zt)) \equiv 0$. Алгебра $\widetilde{H}^k$ является порождающей алгеброй многообразия $_3\mathbf{N}$.

Отметим, что, как доказано в работе [4], многообразие левонильпотентных ступени не выше трех алгебр Лейбница $_3\mathbf{N}$ имеет сверх экспоненциальный рост, его кодлина не может быть ограничена полиномиальной функцией от n, а кратности не ограничены в совокупности константой. Более точно, коразмерность многообразия $_3\mathbf{N}$ определяются следующей формулой

$$c_n({}_3\mathbf{N}) = n \cdot \mathrm{inv}(n-1) = n \sum_{\lambda \vdash (n-1)} d_\lambda,$$

где $\mathrm{inv}(m)$ — число инволюций (перестановок порядка два) в симметрической группе S_m, а через d_λ обозначена размерность соответствующего разбиению λ неприводимого модуля. Для многообразия $_3\mathbf{N}$ кратность m_λ в разложении $\chi_n({}_3\mathbf{N}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ равна числу угловых клеток диаграммы Юнга, соответствующей разбиению $\lambda \vdash n$. Таким образом, кратности не ограничены в совокупности, но для любого разбиения $\lambda \vdash n$ выполнено следующее неравенство

$1 \leqslant m_\lambda < \sqrt{2n}$. Поэтому кодлина $l_n({}_3\mathbf{N})$ удовлетворяет следующим неравенствам

$$p(n) \leqslant l_n({}_3\mathbf{N}) < p(n)\sqrt{2n},$$

где $p(n)$ количество различных разбиений числа n. Таким образом, последовательность кодлин многообразия $_3\mathbf{N}$ имеет промежуточный между полиномиальным и экспоненциальным рост.

Рассмотрим стандартный полином от n образующих. Знак каждого его слагаемого зависит от четности перестановки. Тогда во введенных обозначениях имеет место равенство:

$$\overline{x}_{i(1)} \ldots \overline{x}_{i(k)}\overline{x}_{i(k+1)} \ldots \overline{x}_{i(n)} = -\overline{x}_{i(1)} \ldots \overline{x}_{i(k+1)}\overline{x}_{i(k)} \ldots \overline{x}_{i(n)}.$$

Согласно тождеству (1) можно записать: $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \equiv \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2(\overline{x}_3\overline{x}_4)$. Непосредственным образом получаем: $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \equiv \frac{1}{2}\overline{x}_1\overline{x}_2(\overline{x}_3\overline{x}_4)$, и в более общем случае:

$$\overline{x}_1\overline{x}_2 \ldots \overline{x}_{2n+1} \equiv \frac{1}{2^n}\overline{x}_1(\overline{x}_2\overline{x}_3) \ldots (\overline{x}_{2n}\overline{x}_{2n+1}).$$

Другими словами, начиная со второго места, переменные одного кососимметрического набора, стоящие рядом, мы можем объединять в скобки, умножая элемент на $\frac{1}{2}$ для каждой пары.

Пусть

$$St_m = St_m(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(m)},$$

так называемый, стандартный ассоциативный полином от операторов умножения справа. Определим также такую его модификацию

$$\widetilde{St}_{2m} = \sum_{\sigma \in S_{2m}} (-1)^\sigma [X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}] \cdots [X_{\sigma(2m-1)}, X_{\sigma(2m)}],$$

$$\widetilde{St}_{2m+1} = \sum_{\sigma \in S_{2m+1}} (-1)^\sigma [X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}] \cdots [X_{\sigma(2m-1)}, X_{\sigma(2m)}] X_{\sigma(2m+1)},$$

где $[X_i, X_j] = X_iX_j - X_jX_i$ — коммутатор операторов умножения справа X_i, X_j. Отметим такие несложные равенства $\widetilde{St}_{2m} = 2^m St_{2m}$, $\widetilde{St}_{2m+1} = 2^m St_{2m+1}$.

Следующие результаты были представлены в монографии [11]. Приведем более полное их доказательство.

Напомним, что бесконечным крюком $H(p, q)$ называется фигура плоскости, состоящая из p бесконечных строк и q бесконечных столбцов. Тогда разбиение $\lambda \vdash n$ (или соответствующая ему диаграмма Юнга) лежит в крюке $H(p, q)$, если выполнено неравенство $\lambda_{p+1} \leqslant q$.

Пусть задана диаграмма Юнга с n клетками, содержащая k угловых клеток, то есть отвечающая разбиению $\lambda = (n_1^{m_1}, n_2^{m_2}, \ldots, n_k^{m_k})$, где $n_1 > n_2 > \cdots > n_k > 0$ и $n_1m_1 + n_2m_2 + \cdots + n_km_k = n$. Заданной диаграмме отвечают следующие элементы:

$$g_1 = (\overline{x}_1\overline{x}_2 \ldots \overline{x}_{d_k}) St_{d_k}^{n_k-1} St_{d_{k-1}}^{n_{k-1}-n_k} \ldots St_{d_2}^{n_2-n_3} St_{d_1}^{n_1-n_2},$$

$$g_2 = (\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{d_{k-1}})St_{d_k}^{n_k}St_{d_{k-1}}^{n_{k-1}-n_k-1}\ldots St_{d_2}^{n_2-n_3}St_{d_1}^{n_1-n_2},$$

$$\ldots$$

$$g_k = (\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{d_1})St_{d_k}^{n_k}St_{d_{k-1}}^{n_{k-1}-n_k}\ldots St_{d_2}^{n_2-n_3}St_{d_1}^{n_1-n_2-1},$$

где $d_j = \sum_{i=1}^{j} m_i$, $j = 1,...,k$. Линеаризация элемента $g_s(\lambda)$, где $s = 1,\ldots,k$, порождает неприводимый модуль $W_s(\lambda) = \Phi S_n(ling_s(\lambda))$, соответствующий зафиксированному разбиению λ.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{M}$ *— собственное подмногообразие многообразия* ${}_3\mathbf{N}$. *Тогда существуют такие натуральные* p, q, *что кратность* m_λ *в разложении* $\chi_n(\mathbf{M}) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda\chi_\lambda$ *равна нулю, если* $\lambda_{p+1} > q$.

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы, докажем несколько лемм.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{M}$ *собственное подмногообразие многообразия* ${}_3\mathbf{N}$. *Тогда существуют такое* n *и разбиение* $\lambda \vdash (n-1)$, *что в многообразии* $\mathbf{M}$ *выполнено тождество* $g_\lambda \equiv 0$.

Доказательство. Сначала докажем, что в многообразии $\mathbf{M}$ выполнено тождество вида

$$\sum_{p\in S_m} \alpha_p x_0 x_{p(1)} x_{p(1)}\ldots x_{p(m)} \equiv 0,$$

где $\alpha_p \in \Phi$, которое не выполнено в ${}_3\mathbf{N}$.

Пусть $h(x_1,...,x_n) \equiv 0$ — тождество, выполняемое в многообразии $\mathbf{M}$, но не выполняемое в многообразии ${}_3\mathbf{N}$. Будем считать, что оно является линейной комбинацией левонормированных произведений, то есть

$$h(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i,$$

где h_i, $i = 1,\ldots,n$ являются ассоциативными полиномами от операторов правого умножения X_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq i$. Сначала предположим, что $n \geqslant 3$. Так как тождество $h(x_1,x_2,..,x_n) \equiv 0$ не выполняется в многообразии ${}_3\mathbf{N}$, значит, существует такая подстановка элементов алгебры $\widetilde{H}^k$ вместо образующих, что значение, которое обозначим $\tilde{h}$, будет ненулевым элементом алгебры $\widetilde{H}^k$. Отметим, что так как степень тождества больше или равна трех, то вместо ровно одной из образующих, например x_s, был подставлен многочлен f из кольца многочленов T_k. Рассмотрим следствие тождества $h(x_1,...,x_n) \equiv 0$, получаемое из него подстановкой вместо x_s произведения y^2. Это следствие будет иметь вид $yyh_s \equiv 0$, так как в силу тождества (2) все остальные слагаемые превращаются в ноль. Пусть $g = h_s$, причем будем считать, что многочлен g записан от операторов Y_i, $i = 1,2,\ldots,m$, где $m = n-1$. Тогда тождество приобретает вид

$$y^2 g(Y_1,\ldots,Y_m) \equiv 0. \tag{9}$$

Пусть A некоторая алгебра Лейбница. Из доказательства леммы 2.1 следует, что

$$I_g = \{a \in A |\, ag(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m) = 0, \, \forall \, z_1, z_2, \ldots, z_m \in A\}.$$

является двусторонним идеалом алгебры A. Рассмотрим фактор алгебру $B = A/I_g$. Из тождества (9) следует, что $y^2 \in I_g$ для любого $y \in A$, то есть в алгебре B выполнено тождество антикоммутативности $x^2 \equiv 0$. Поэтому алгебра B является не только левонильпотентной, но и просто нильпотентной алгеброй Ли, в которой выполнено тождество $z_1 z_2 z_3 z_4 \equiv 0$. Таким образом, для любых элементов из алгебры A произведение $z_1 z_2 z_3 z_4$ принадлежит идеалу I_g, поэтому в алгебре A выполняется следующее тождество, имеющее необходимый вид

$$z_1 z_2 z_3 z_4 g(Y_1, Y_2, ..., Y_m) \equiv 0.$$

Заметим, что данное тождество по-прежнему не выполняется в многообразии $\widetilde{H}^k$. Действительно, если сделать вместо образующих ту же самую подстановку элементов алгебры $\widetilde{H}^k$, вместо z_1 подставить элемент f, а вместо z_2, z_3, z_4 подставить элемент c, то в качестве результата получим тот же ненулевой элемент $\tilde{h}$. Пусть теперь в многообразии $\mathbf{M}$ выполнено тождество степени один или два. Хорошо известно, что в этом случае в многообразии выполнено тождество коммутативности или антикоммутативности, поэтому оно будет не только левонильпотентным, но и просто нильпотентным. Доказательство леммы теперь следует из строения S_{n-1}-модулей $Q_n^{(n)}$. Лемма доказана. □

В пространстве $P_n(\mathbf{M})$ обозначим подпространство порожденное произведениями, у которых на первом левом месте расположена образующая x_n через $Q_n^{(n)}(\mathbf{M})$. Тогда

$$\chi(Q_n^{(n)}(\mathbf{M})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda^{(Q)} \chi_\lambda \tag{10}$$

характер S_{n-1}-модуля $Q_n^{(n)}(\mathbf{M})$, причем, так как $\mathbf{M} \subset {}_3\mathbf{N}$, то $m_\lambda^{(Q)} \leqslant 1$.

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{M}$ — *собственное подмногообразие многообразия* ${}_3\mathbf{N}$. *Тогда характер (10) лежит в некотором крюке, то есть существуют такие натуральные числа* p, q, *что, если* $\lambda_{p+1} > q$, *то* $m_\lambda^{(Q)} = 0$.

Доказательство. Доказательство леммы 3 разобьем на шаги и проведем его аналогично доказательству предложения 8.3 статьи [12]. Сначала докажем, что в многообразии $\mathbf{M}$ выполнено тождество вида $g_\lambda \equiv 0$, в котором диаграмма Юнга соответствующая разбиению $\lambda \vdash (n-1)$ имеет четную длину всех столбцов. Далее покажем, что, если длину одного из самых коротких столбов увеличить на два, то получим тождество, которое является следствием исходного. Используя эту возможность, легко понять, что в многообразии выполнено тождество, соответствующее некоторой прямоугольной диаграмме Юнга. Последний шаг — это доказательство, того, что, "приклеивая" к прямоугольной диаграмме Юнга "ногу" и "руку", получаем диаграммы, которые также соответствуют тождествам многообразия $\mathbf{M}$.

Шаг 1. Получение тождества специального вида.

Покажем, что в многообразии $\mathbf{M}$ выполнено тождество вида $g_\lambda \equiv 0$, в котором диаграмма Юнга, соответствующая разбиению $\lambda \vdash (n-1)$, имеет четную длину всех столбцов, то есть имеет вид

$$\lambda = (\alpha_1^{2n_1}, \alpha_2^{2n_2}, \ldots, \alpha_k^{2n_k}).$$

Действительно, пусть в многообразии $\mathbf{M}$ выполнено тождество вида

$$x_0 St_{\mu_1}^{\nu_1} St_{\mu_2}^{\nu_2} \ldots St_{\mu_m}^{\nu_m} \equiv 0, \tag{11}$$

где $\mu_1 > \mu_2 > ... > \mu_m \in \mathbb{N},\ \nu_i \in \mathbb{N}, i = 1, ..., m$. Доказательство проведем методом математической индукции по количеству k нечетных элементов множества $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{\mu_1}\}$. Если $k = 0$, то получаем требуемое. Предположим, что утверждение верно в случае, когда число нечетных элементов в $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m\}$ меньше k. Докажем, что тогда оно верно и для k. Пусть μ_s — наибольшее из нечетных чисел среди $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m\}$. Тогда это тождество имеет степень $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_s$ по переменной x_s. Поскольку характеристика поля Φ равна нулю, то тождество (11) эквивалентно тождеству

$$x_0 \widetilde{St}_{\mu_1}^{\nu_1} \widetilde{St}_{\mu_2}^{\nu_2} ... \widetilde{St}_{\mu_m}^{\nu_m} \equiv 0. \tag{12}$$

Заменим в тождестве (12) образующую x_s на сумму $u+v$ и возьмем компоненту первой степени по v. После замены $u = x_s, v = x_1x_2$ в полученной сумме слагаемые, содержащие x_1x_2 в произведениях пар образующих становятся равными нулю в силу тождества (5). Пользуясь тем, что в многообразии ${}_3\mathbf{N}$ выполнено тождество $x(yz)t \equiv xt(yz)$, получаем, что левая часть тождества (12) равна

$$\nu_s x_0 \widetilde{St}_{\mu_1}^{\nu_1} \widetilde{St}_{\mu_2}^{\nu_2} ... \widetilde{St}_{\mu_s}^{\nu_s - 1} \widetilde{St}_{\mu_s - 1} \ldots \widetilde{St}_{\mu_m}^{\nu_m} (x_1 x_2).$$

Значит, в многообразии $\mathbf{M}$ выполнено тождество

$$x_0 St_{\mu_1}^{\nu_1} St_{\mu_2}^{\nu_2} ... St_{\mu_s}^{\nu_s - 1} St_{\mu_s - 1} \ldots St_{\mu_m}^{\nu_m} St_2 \equiv 0,$$

которому соответствует диаграмма Юнга, содержащая $k-1$ столбцов нечетной длины, а значит для него выполнено предположение индукции, и доказательство первого шага завершено.

Шаг 2. Увеличение длины одного из самых коротких столбцов диаграммы Юнга на два.

Пусть φ_j — подстановка z_1 вместо x_j и $\varphi_j^{(i)}$— подстановка x_i вместо x_j, при этом остальные буквы неизменны. Рассмотрим j-ю строку диаграммы λ, то есть $j \in \{1, \ldots, \alpha_1\}$. Проведем частичную линеаризацию g_λ по x_j, произведя сначала замену $x_j \to x_j + z_1$, и возьмем однородную компоненту первой степени по z_1. Обозначим результат через $g_\lambda^{(j)}$. Заметим, что $g_\lambda^{(j)}$ зависит от строки j.

Для строк $j = 1, \ldots, \alpha_s$ получим

$$g_\lambda^{(j)} = g_\lambda \sum_{i=1}^{s} \beta_i \frac{\varphi_j(St_{\alpha_i})}{St_{\alpha_i}}.$$

Для строк $j = \alpha_s + 1, \ldots, \alpha_{s-1}$ получим

$$g_\lambda^{(j)} = g_\lambda \sum_{i=1}^{s-1} \beta_i \frac{\varphi_j(St_{\alpha_i})}{St_{\alpha_i}},$$

и так далее. Таким образом, для последних строк $j = \alpha_2 + 1, \ldots, \alpha_1$ получим

$$g_\lambda^{(j)} = g_\lambda \beta_1 \frac{\varphi_j(St_{\alpha_1})}{St_{\alpha_1}}.$$

Заметим, что дроби мы ввели и используем исключительно для упрощения обозначений. Наша цель доказать, что мы можем добавить две клетки в специальное место диаграммы. Заметим, что если $\alpha_{s-1} > \alpha_s$, то это значит, что $\alpha_{s-1} \geqslant \alpha_s + 2$. Вследствие того, что g_λ является тождеством в $\mathbf{M}$, выражение

$$\beta_s g_\lambda [Z_1, Z_2] - \sum_{j=1}^{\alpha_s} g_\lambda^{(j)} [X_j, Z_2] \tag{13}$$

также является тождеством в $\mathbf{M}$. Произведем замену $z_1 = x_{\alpha_s+1}$, $z_2 = x_{\alpha_s+2}$ и $x_{2m+1} = x_{2m+3}$. Заметим, что $\varphi_j^{(\alpha_s+1)}(St_{\alpha_k}) = 0$ для $k = 1, \ldots, s-1$, так как после подстановки буква x_{α_s+1} встретится дважды в стандартном многочлене, который мы альтернировали. Таким образом, действие $\varphi_j^{(\alpha_s+1)}$ может быть ограничено только последним сомножителем $St_{\alpha_s}^{\beta_s}$. Другими словами, когда $z_1 = x_{\alpha_s+1}$

$$g_\lambda^{(j)}[X_j, X_{\alpha_s+2}] = \beta_s x_{2m+3} St_{\alpha_1}^{\beta_1} \ldots St_{\alpha_{s-1}}^{\beta_{s-1}} St_{\alpha_s}^{\beta_s - 1} (\varphi_j^{(\alpha_s+1)}(St_{\alpha_s}))[X_j, X_{\alpha_s+2}].$$

Пользуясь (13) получаем, что $\mathbf{M}$ удовлетворяет следующему тождеству

$$\beta_s x_{2m+3} St_{\alpha_1}^{\beta_1} \ldots St_{\alpha_s}^{\beta_s - 1} \left(St_{\alpha_s}[X_{\alpha_s+1}, X_{\alpha_s+2}] - \sum_{j=1}^{\alpha_s} \varphi_j^{(\alpha_s+1)}(St_{\alpha_s})[X_j, X_{\alpha_s+2}] \right) \equiv 0.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что выражение, заключенное во внутренние скобки, равно St_{α_s+2}. Таким образом, в $\mathbf{M}$ выполнено тождество $g_\mu \equiv 0$, где диаграмма Юнга, соответствующая разбиению $\mu \vdash 2m+2$ получается приклеиванием к левому из самых коротких столбцов диаграммы λ двух клеток. Понятно, что "приклеивание" таким образом столбиков высоты два, позволяет получить прямоугольную диаграмму Юнга.

Шаг 3. Возможность "приклеивания" "руки" и "ноги".

Предположим теперь, что $\mathbf{M}$ удовлетворяет тождеству $g_\lambda \equiv 0$, где последняя строка разбиения λ длины q, а последний столбец длины $2r$. Покажем, что приклеив к диаграмме Юнга λ произвольную "ногу" ширины не более q и произвольную "руку" высоты не более $2r$, получим такую диаграмму μ, что соответствующее тождество $g_\mu \equiv 0$ выполняется в $\mathbf{M}$.

Пусть $\lambda = (p^{2r}, \lambda_{2r+1}, \ldots, \lambda_{2(r+s)}, q^{2l})$ — разбиение $2m$ со столбцами четной длины, а

$$\mu = (p+\alpha_1, \ldots, p+\alpha_{2r}, \lambda_{2r+1}, \ldots, \lambda_{2(r+s)}, q^{2l}, \mu_{2(r+s+l)+1}, \mu_{2(r+s+l)+2}, \ldots)$$

— разбиение N. Тогда тождество $g_\mu \equiv 0$ является следствием тождества $g_\lambda \equiv 0$. Доказательство этого утверждения проведем в два этапа. Сначала приклеим "ногу". Пусть $\nu = (p^{2r}, \lambda_{2r+1}, \ldots, \lambda_{2(r+s)}, q^{2l}, \mu_{2(r+s+l)+1}, \mu_{2(r+s+l)+2}, \ldots)$ — разбиение M. Покажем, что тождество $g_\nu \equiv 0$ следует из тождества $g_\lambda \equiv 0$. Пусть $T = T_\lambda$ — стандартная таблица Юнга, в которой числа $1, 2, \ldots$ записаны последовательно в первый столбец, во второй и так далее. Пусть $e_T = R_T C_T$ обозначает соответствующий квази-идемпотент в ΦS_{2m}. Так как $R_T C_T R_T C_T = \gamma R_T C_T$, где $\gamma \neq 0$, делаем вывод, что $C_T R_T C_T$ - ненулевой элемент в ΦS_{2m}. Обозначим соответствующий полилинейный элемент свободной алгебры многообразия ${}_3\mathbf{N}$

$$\tilde{g}_\lambda = x_{2m+1}\tilde{f}_\lambda = x_{2m+1} C_T R_T C_T([X_1, X_2]\cdots[X_{2m-1}, X_{2m}]).$$

Понятно, что этот элемент кососимметричен относительно каждого множества образующих, индексы которых записаны в один и тот же столбец таблицы T_λ. Заметим также, что тождества $g_\lambda \equiv 0$ и $\tilde{g}_\lambda \equiv 0$ эквивалентны. Переобозначим для удобства образующие и будем считать, что $\tilde{f}_\lambda = \tilde{f}_\lambda(X_1, Y_1, \ldots, X_m, Y_m)$. Пусть $t = r+s+l$, тогда $2t$ - длина первых q столбцов диаграммы λ. По построению $\tilde{g}_\lambda$ косо-симметричен относительно каждого из следующих q множеств образующих $A_i = \{x_{(i-1)t+1}, y_{(i-1)t+1}, \ldots, x_{it}, y_{it}\}$, где $i = 1, \ldots, q$. Более того $\tilde{g}_\lambda$ кососимметричен относительно каждого из следующих множеств образующих A_i, где $i = q+1, \ldots, p$. Заметим, что $|A_i| = \lambda'_i$ — длина i-го столбца диаграммы λ. Пусть $\tau \vdash M - 2m$ "нога", то есть $\tau = (\mu_{2(r+s+l)+1}, \mu_{2(r+s+l)+2}, \ldots)$. В частности, $\tau_1 = q$. Построим полилинейный элемент

$$\tilde{f}_\tau = \tilde{f}_\tau(X_1^{(1)}, Y_1^{(1)}, \ldots Z^{(1)}, \ \ldots \ X_q^{(q)}, Y_q^{(q)}, \ldots Z^{(q)}),$$

где $Z^{(i)} = X_{k+1}^{(i)}$, если $\tau'_i = 2k+1$, или $Z^{(i)} = Y_k^{(i)}$, если $\tau'_i = 2k$. Значит $\tilde{f}_\tau$ кососимметричен относительно каждого из следующих множеств образующих

$$B_i = \{X_1^{(i)}, Y_1^{(i)}, \ldots, Z^{(i)}\}, \ i = 1, \ldots, q, \ .$$

Отметим, что $|B_i| = \tau'_i$ — длина i-ого столбца диаграммы τ. Рассмотрим элемент $x_{M+1}\tilde{f}_\lambda \tilde{f}_\tau$ и в нем произведем альтернирование по каждому из q множеств образующих $C_i = A_i \cup B_i$, $i = 1, \dots, q$. Заметим, что это альтернирование соответствует первым q столбцам диаграммы ν. Формально это означает следующее: возьмем множество $C_i = A_i \cup B_i$, пусть $S(C_i)$ будет симметрической группой на этом множестве. Обозначим $C_{\lambda,\mu} = S(C_1) \times \dots \times S(C_q)$,

$$C^-_{\lambda,\mu} = \sum_{\pi \in C_{\lambda,\mu}} (-1)^\pi \pi,$$

и рассмотрим $C^-_{\lambda,\mu}(x_{M+1}\tilde{f}_\lambda \tilde{f}_\tau)$. По построению тождество $C^-_{\lambda,\mu}(x_{M+1}\tilde{f}_\lambda \tilde{f}_\tau) \equiv 0$ является следствием тождества $g_\lambda \equiv 0$. Заметим, что полученный элемент не равен нулю в пространстве $Q^{(M+1)}_{M+1}$. Для доказательства этого достаточно подставить вместо образующих следующие элементы алгебры $\widetilde{H}^M : x_{M+1} = f$, $f \in T_M$, $x_i = b_i$, $y_i = a_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, $x^{(r)}_j = b_{m+k_1+\dots+k_{r-1}+j}$, $y^{(r)}_j = a_{m+k_1+\dots+k_{r-1}+j}$, $j = 1, \dots, k_r$, $r = 1, \dots, q$, причем $\tau'_s = 2k_s$ или $\tau'_s = 2k_s - 1$ в зависимости от четности длины s-ого столбца диаграммы τ. Исследуем разложение на неприводимые подмодули ненулевого модуля, порожденного элементом $C^-_{\lambda,\mu}(x_{M+1}\tilde{f}_\lambda \tilde{f}_\tau)$ в пространстве $Q^{(M+1)}_{M+1}$. По правилу Литтлвуда-Ричардсона диаграммы Юнга, соответствующие этим неприводимым модулям должны содержать диаграммы λ и τ. Учитывая кососимметризации, получаем, что единственной такой диаграммой является диаграмма ν, что завершает первый этап доказательства. Теперь приклеим "руку" τ к диаграмме ν. Пусть $\tau = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2r})$ и так как $f_\mu = f_\nu \cdot f_\tau$, то получаем, что тождество $g_\mu \equiv 0$ следует из тождества $g_\nu \equiv 0$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 2. Отметим, что S_n-модуль $P_n(\mathbf{M})$ индуцирован с S_{n-1}-модуля $Q^{(n)}_n(\mathbf{M})$. Так как характер (10) S_{n-1}-модуля $Q^{(n)}_n(\mathbf{M})$ расположен в некотором крюке, то такое же утверждение верно и для характера (3). Пусть крюк имеет высоту и ширину равную d, другими словами, если $\mu_{d+1} > d$, то кратность m_μ в сумме (3) равна нулю. Так как согласно результатам статьи [4] кратность для многообразия ${}_3\mathbf{N}$ равна числу угловых клеток соответствующей диаграммы Юнга, то получаем, что не зависимо от числа n для кратностей в сумме (3) выполняются неравенства $m_\lambda \leqslant 2d$. Число различных диаграмм Юнга, расположенных в таком крюке не превосходит числа n^{2d}, а, как хорошо известно, размерности соответствующих неприводимых модулей ограничены экспоненциальной функцией $(2d)^n$. В итоге получаем, что для кодлины и коразмерностей выполняются неравенства

$$l_n(\mathbf{M}) < 2d \cdot n^{2d}, \ \ c_n(\mathbf{M}) < 2d \cdot n^{2d} \cdot (2d)^n.$$

Таким образом, многообразие $\mathbf{M}$ имеет рост не выше экспоненциального, рост его кодлины не выше полиномиального, а кратности ограничены константой, не зависящей от числа n. Теорема доказана. □

Из этой теоремы и описанных выше результатов о многообразии ${}_3\mathbf{N}$ получаем ряд следствий об экстремальных свойствах многообразия ${}_3\mathbf{N}$.

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{M}$ *собственное подмногообразие многообразия* ${}_3\mathbf{N}$. *Тогда существуют такие константы* c_1, r_1, *что для любого* n *выполнено следующее неравенство* $c_n(\mathbf{M}) < c_1 r_1^n$.

Таким образом, многообразие ${}_3\mathbf{N}$ *является многообразием почти экспоненциального роста.*

Следствие 2. *Пусть* $\mathbf{M}$ *собственное подмногообразие многообразия* ${}_3\mathbf{N}$. *Тогда существуют такие константы* c_2, r_2, *что для любого* n *выполнено следующее неравенство* $l_n(\mathbf{M}) < c_2 n^{r_2}$.

Таким образом, многообразие ${}_3\mathbf{N}$ *является многообразием с почти полиномиальным ростом кодлины.*

Следствие 3. *Пусть* $\mathbf{M}$ *собственное подмногообразие многообразия* ${}_3\mathbf{N}$. *Тогда существует такая константа* r_2, *что* $m_\lambda < c_3$.

Таким образом, многообразие ${}_3\mathbf{N}$ *имеет почти конечные кратности.*

А также, как говорят, кохарактер его любого собственного подмногообразия лежит в крюке. Любое собственное подмногообразие многообразия ${}_3\mathbf{N}$ является многообразием ассоциативного типа, то есть многообразие ${}_3\mathbf{N}$ является многообразием почти ассоциативного типа.

Отметим, что полученные результаты аналогичны результатам статьи [13], то есть по своим свойствам многообразие алгебр Лейбница ${}_3\mathbf{N}$ похоже на многообразие алгебр Ли $\mathbf{AN}_2$, которое определяется тождеством

$$(x_1x_2x_3)(x_4x_5x_6) \equiv 0.$$

4. Об экспонентах подмногообразий многообразия ${}_3$N алгебр Лейбница

В данном разделе рассматривается рост собственных подмногообразий многообразия ${}_3\mathbf{N}$. Из приведенных выше рассуждений следует, что их рост является экспоненциальным. В работе [14] приведено краткое доказательство этого факта. Рассмотрим данный вопрос более подробно.

Пусть $\mathbf{V}$ — собственное подмногообразие многообразия ${}_3\mathbf{N}$. Пусть $Q_{n+1}^{(n+1)} = Q_n \subseteq P_{n+1}$, то есть:

$$Q_n = \langle x_{n+1}x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n)} | \sigma \in S_n \rangle.$$

На пространство Q_n, аналогично рассмотренному ранее относительно пространства P_n, естественным образом вводится действие перестановок и определяется структура ΦS_n-модуля. Последовательность размерностей пространства Q_n обозначим через $d_n(\mathbf{V}) = dim Q_n$. В случае существования верхнего и нижнего пределов последовательности $\sqrt[n]{d_n(\mathbf{V})}$ введем следующие обозначения:

$$\overline{Exp}(Q_n) = \overline{lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{d_n(\mathbf{V})},$$

$$\underline{Exp}(Q_n) = \underline{lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{d_n(\mathbf{V})}.$$

Кроме того, если $Exp(P_n)$ существует, то будем записывать $Exp(\mathbf{V}) = Exp(P_n)$. Тогда для введенного пространства Q_n справедлива следующая лемма:

Лемма 4. *Пусть $\boldsymbol{V}$ — собственное подмногообразие многообразия ${}_3\boldsymbol{N}$. Тогда $\overline{Exp}(Q_n) = \overline{Exp}(\boldsymbol{V})$ и $\underline{Exp}(Q_n) = \underline{Exp}(\boldsymbol{V})$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{V}$ — собственное подмногообразие многообразия ${}_3\mathbf{N}$. Как уже упоминалось ранее, согласно следствию 1 всякое собственное подмногообразие многообразия ${}_3\mathbf{N}$ имеет экспоненциальный рост. Это означает, что для $\mathbf{V}$ четко определены верхний и нижний пределы последовательностей $\sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}$. Поскольку $Q_n \subseteq P_{n+1}$, то очевидно, что для любого натурального n выполняется неравенство $d_n \leqslant c_{n+1}$. С другой стороны, все полилинейные многочлены от переменных $x_1, ..., x_n$ могут быть записаны в виде линейной комбинации левонормированных мономов, начиная с x_i, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Поэтому $c_n \geqslant nd_n$. Два полученных неравенства приводят нас к выводу, что рост последовательности d_n является экспоненциальным. Поэтому мы можем считать, что $d_n \sim nd_n$. Следовательно,

$$\overline{lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})} = \overline{lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{d_n(\mathbf{V})},$$

$$\underline{lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})} = \underline{lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{d_n(\mathbf{V})}.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы. $\square$

Рассмотрим относительно свободную алгебру F многообразия ${}_3\mathbf{N}$ от счетного множества образующих $X = \{x_1, x_2, ...\}$. Полилинейные элементы от $n+1$ переменной с фиксированным первым элементом x_{n+1} этой алгебры лежат в пространстве Q_n. Для таких элементов алгебры F имеет место следующее свойство.

Лемма 5. *Пусть для некоторого целого M и некоторых $x_1, ..., x_{n+1} \in F$ выполняется тождество $x_{n+1}\overline{St}_{2k+1}^M \equiv 0$ $(2k+1 \leqslant n)$. Тогда для этих элементов также верно тождество*

$$x_{n+1}\overline{St}_{2k}^{2kM} \equiv 0.$$

Доказательство. Пусть для элементов $x_1, ..., x_{n+1}$ относительно свободной алгебры от счетного множества образующих многообразия ${}_3\mathbf{N}$ верно тождество $x_{n+1}\overline{St}_{2k+1}^M \equiv 0$ $(2k+1 \leqslant n)$. Рассмотрим случай, когда $M = 1$. Тогда для указанных элементов выполняется тождество

$$x_{n+1}\overline{St}_{2k+1}(X_1, ..., X_{2k}, X_{2k+1}) \equiv 0.$$

Заменим в данном тождестве переменную x_{2k+1} на пару uv, то есть оператор X_{2k+1} на UV. Поскольку пара UV входит в кососимметрический набор в стандартном полиноме $\overline{St}_{2k+1}$, то она может стоять на $2k+1$ месте. Так как в элементе $x_n\overline{St}_{2k+1}$ первое место фиксировано занимает элемент x_{n+1}, то пару UV

мы можем ставить на любое место, исключая первое, учитывая, что знак стандартного полинома меняется на противоположный при перемене местами двух соседних кососимметрических переменных. Эти рассуждения приводят нас к выводу, что элемент из левой части рассматриваемого тождества мы можем преобразовать следующим образом:

$$x_{n+1}\overline{St}_{2k+1}(X_1,...,X_{2k},(UV)) \equiv (2k+1)x_{n+1}(UV)\overline{St}_{2k}(X_1,...,X_{2k}).$$

Рассмотрим теперь случай, когда $M=2$. Аналогичные рассуждения, применяемые к тождеству $x_{n+1}\overline{St}^2_{2k+1}(X_1,...,X_{2k},X_{2k+1}) \equiv 0$, позволяют нам получить следующее:

$$x_{n+1}\overline{St}^2_{2k+1}(X_1,...,X_{2k},(UV)) \equiv (2k+1)^2x_{n+1}(UV)\overline{St}_{2k}(UV)\widetilde{St}_{2k}.$$

Рассмотрим более подробно элемент $x_{n+1}(UV)\overline{X_1}...\overline{X}_{2k}(UV)$. Применим к нему тождество Лейбница:

$$x_{n+1}(UV)\overline{X_1}...\overline{X}_{2k}(UV) \equiv x_{n+1}(UV)\overline{X_1}...\overline{X}_{2k-1}(UV)\overline{X}_{2k}+$$

$$+x_{n+1}(UV)\overline{X_1}...\overline{X}_{2k-1}(\overline{X}_{2k}(UV)).$$

Второе слагаемое из получившейся в правой части тождества суммы равно нулю в силу тождества $x(y(zt)) \equiv 0$. Следовательно, пару, не входящую в альтернированный набор, мы также можем двигать на любое место, исключая первое. Тогда переместим ее на второе место. Получим следующий вывод:

$$x_{n+1}\overline{St}^2_{2k+1}(X_1,...,X_{2k},(UV)) \equiv (2k+1)^2x_{n+1}(UV)^2\overline{St}^2_{2k}(X_1,...,X_{2k}),$$

или

$$(2k+1)^2x_{n+1}(UV)^2\overline{St}^2_{2k}(X_1,...,X_{2k}) \equiv 0.$$

В случае, если $M>2$, проведенные рассуждения обобщаются и мы получаем следующее тождество:

$$(2k+1)^Mx_{n+1}(UV)^M\overline{St}^M_{2k}(X_1,...,X_{2k}) \equiv 0.$$

Таким образом, тождество $x_{n+1}\overline{St}^M_{2k+1} \equiv 0$ имеет следствие

$$x_{n+1}(UV)^M\overline{St}^M_{2k} \equiv 0,$$

и для некоторого многочлена A от переменных x_i $(i=1,...,2k)$ также имеет место тождество

$$x_{n+1}A(UV)^M\overline{St}^M_{2k} \equiv 0.$$

Теперь обозначим через $u_1,...,u_q$ все различные пары (x_ix_j), $1 \leqslant i < j \leqslant 2k$, то есть через $U_1,...,U_q$ все различные пары (X_iX_j). Тогда $q=k(2k-1)$ и St_{2k} — однородный многочлен от операторов $U_1,...,U_q$ степени k. Пусть $N=(2k-1)M$, тогда St_{2k}^N — однородный многочлен от операторов $U_1, ..., U_q$ степени $Nk = qM$. Так как каждый оператор U_i является парой, то его также можно переставлять, начиная со второго места. Тогда $x_{n+1}St_{2k}^N$ — сумма произведений вида $x_nAU_i^M$, где A — некоторый многочлен от переменных U_i. Следовательно,

$$x_{n+1}St_{2k}^{N+M} \equiv x_{n+1}St_{2k}^{(2k-1)M+M} \equiv x_{n+1}St_{2k}^{2kM} \equiv 0.$$

Лемма доказана. □

Рассматриваемое пространство Q_n как ΦS_n-модуль раскладывается в прямую сумму неприводимых подмодулей:

$$Q_n = \oplus_{\lambda \vdash n} m_\lambda^Q(\mathbf{V}) M_\lambda. \tag{14}$$

Рассмотрим произвольный ΦS_n-модуль T_λ из разложения (14). Этот модуль соответствует некоторой диаграмме Юнга. Пусть эта диаграмма отвечает разбиению $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$. Рассмотрим сопряженное к λ разбиение $\lambda' = (\lambda_1', \lambda_2', ..., \lambda_m')$. Построим элемент, соответствующий разбиению λ'. Такой элемент будет содержать альтернированные наборы, соответствующие столбцам диаграммы Юнга длин $\lambda_1', \lambda_2', ..., \lambda_m'$. Другими словами, искомый элемент будет содержать альтернированные наборы, содержащие $\lambda_1', \lambda_2', ..., \lambda_m'$ переменных. Для построения описанного элемента воспользуемся обозначениями, введенными нами ранее. Разбиению λ' отвечает следующий элемент:

$$g_{\lambda'} = x_{n+1}\overline{St}_{\lambda_1'}\widetilde{St}_{\lambda_2'}...\widehat{St}_{\lambda_m'}. \tag{15}$$

Для рассматриваемого ΦS_n-модуля и построенного элемента g_λ справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Всякий неприводимый ΦS_n-модуль T_λ в разложении (14) порожден с помощью $Lin(g_{\lambda'})$, элемент $g_{\lambda'}$ определяется равенством (15) и $Lin(f)$ означает полную линеаризацию полинома f.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный неприводимый ΦS_n-модуль T_λ из разложения (14), соответствующий разбиению λ. Докажем, что этот ΦS_n-модуль порожден линеаризацией элемента $g_{\lambda'}$. Покажем, что элемент $g_{\lambda'}$ отличен от нуля в многообразии ${}_3\mathbf{N}$. Для этого проверим, что элемент $g_{\lambda'}$ является ненулевым в некоторой алгебре многообразия ${}_3\mathbf{N}$. Используем для этого алгебру H^s, построенную в начале данной главы. Пусть $\lambda \vdash n$, где $\lambda_1' = s$. Обозначим операторы умножения справа на элементы a_i, b_i и c через A_i, B_i и C соответственно. Теперь выразим элемент $x_{n+1}\overline{St}_m$, введя следующую замену: $x_{2i-1} = a_i$ и $x_{2i} = b_i$ $(i = 1, ..., [\frac{m}{2}] + 1)$, $x_n = f(t_1, ..., t_s)$. Тогда мы получим:

$$f(t_1, ..., t_s)\overline{St}_{2s}(A_1, B_2, ..., A_s, B_s) = f(t_1, ..., t_s)\overline{A}_1\overline{B}_1...\overline{A}_s\overline{B}_s,$$

если λ_1' — четно, и

$$f(t_1, ..., t_s)\overline{St}_{2s-1}(A_1, B_2, ..., A_{s-1}, B_{s-1}, A_s) = f(t_1, ..., t_s)\overline{A}_1\overline{B}_1...\overline{A}_{s-1}\overline{B}_{s-1}\overline{A}_s,$$

если λ'_1 — нечетно.

Как описывалось ранее, переменные кососимметрического набора, стоящие не на первом месте, можно объединять в пары, вынося для каждой из пар коэффициент $\frac{1}{2}$. Тогда

$$f(t_1,...,t_s)\overline{St}_{2s}(A_1,B_2,...,A_s,B_s)=\frac{1}{2^s}f(t_1,...,t_s)(\overline{A}_1\overline{B}_1)...(\overline{A}_s\overline{B}_s),$$

и

$$f(t_1,...,t_s)\overline{St}_{2s-1}(A_1,B_2,...,A_{s-1},B_{s-1},A_s)=$$
$$=\frac{1}{2^{s-1}}f(t_1,...,t_s)(\overline{A}_1\overline{B}_1)...(\overline{A}_{s-1}\overline{B}_{s-1})\overline{A}_s.$$

Поскольку $a_ib_i=c$ и $fc=f$, то $A_iB_i=C$ и $fC=f$. Следовательно, мы получаем следующие равенства:

$$f(t_1,...,t_s)\overline{St}_{2s}(A_1,B_2,...,A_s,B_s)=\frac{1}{2^s}f(t_1,...,t_s)C^s=\frac{1}{2^s}f(t_1,...,t_s),$$

и

$$f(t_1,...,t_s)\overline{St}_{2s-1}(A_1,B_2,...,A_{s-1},B_{s-1},A_s)=$$
$$=\frac{1}{2^{s-1}}f(t_1,...,t_s)C^{s-1}\overline{A}_s=\frac{1}{2^{s-1}}f'_{t_s}(t_1,...,t_s).$$

Полином $f(t_1,...,t_s)$ мы можем выбрать таким образом, чтобы его частная производная по переменной t_s была отлична от нуля. Следовательно, в результате подстановки мы получили ненулевой элемент алгебры H^s. Поскольку справедлива и обратная замена, то элемент $g_{\lambda'}$ не является тождеством в многообразии $\mathbf{V}$.

Теперь введем следующие обозначения: $N_1=\{1,...,\lambda'_1\}$, $N_2=\{\lambda'_1+1,...,\lambda'_1+...+\lambda'_2\}$,..., $N_m=\{\lambda'_1+...+\lambda'_{m-1}+1,...,n\}$, где $m=\lambda_1$. Построим стандартную таблицу Юнга $d=d_\lambda$, соответствующую разбиению λ с номером N_i в i-ом столбце. Обозначим через $e_d=e_d(X_1,...,X_n)$ квазиидемпотент группового кольца ΦS_n, соответствующего таблице Юнга d. Согласно монографии [1] элемент e_d можно представить в следующем виде:

$$e_d(X_1,...,X_n)=\sum_{\rho\in R_d,\sigma\in C_d}\varepsilon_\sigma\rho\sigma(X_1,...,X_n),$$

где ρ - перестановка, принадлежащая строчному стабилизатору R_d; σ - перестановка, принадлежащая столбцовому стабилизатору C_d; ε_σ - четность перестановки σ. Рассмотрим элемент $x_ne_d(X_1,...,X_n)$ более подробно:

$$x_ne_d(X_1,...,X_n)=x_n(\sum_{\rho\in R_d,\sigma\in C_d}\varepsilon_\sigma\rho\sigma(X_1,...,X_n))=$$

$$=x_nX_{\rho(1)}X_{\rho(2)}...X_{\rho(\lambda'_1)}...X_{\rho(\lambda'_1+...+\lambda'_{m-1}+1)}...X_{\rho(n)}-$$

$$-x_n X_{\rho(2)} X_{\rho(1)} ... X_{\rho(\lambda'_1)} ... X_{\rho(\lambda'_1+...+\lambda'_{m-1}+1)} ... X_{\rho(n)} + ...$$
$$... - y X_{\rho(1)} X_{\rho(2)} ... X_{\rho(\lambda'_1)} ... X_{\rho(\lambda'_1+...+\lambda'_{m-1}+2)} X_{\rho(\lambda'_1+...+\lambda'_{m-1}+1)} ... X_{\rho(n)} +$$
$$+ x_n X_{\rho(2)} X_{\rho(1)} ... X_{\rho(\lambda'_1)} ... X_{\rho(\lambda'_1+...+\lambda'_{m-1}+2)} X_{\rho(\lambda'_1+...+\lambda'_{m-1}+1)} ... X_{\rho(n)} + ...$$

Дальнейшее разложение полученной суммы по перестановке ρ приведет нас к полной линеаризации элемента $x_n g_\lambda$, введенного ранее. Таким образом, мы получаем, что
$$Lin(x_n g_\lambda) = x_n e_d(X_1, ..., X_n).$$
Согласно монографии [1] элемент
$$x_n e_d(X_1, ..., X_n) = Lin(y g_\lambda)$$
порождает в Q_n неприводимый ΦS_n-модуль, изоморфный T_λ. Лемма доказана. □

Вернемся к рассмотрению разложения пространства Q_n в прямую сумму неприводимых подмодулей в виде (14). В случае, если $\mathbf{V} ={}_3 \mathbf{N}$, в работе [6] доказано, что кратности $m^Q_\lambda(\mathbf{V})$ равны единицам. Тогда для всякого собственного подмногообразия $\mathbf{V}$ многообразия левонильпотентных ступени не выше трех алгебр Лейбница указанные кратности не превосходят единицу.

Лемма 7. *Если $\boldsymbol{V}$ — собственное подмногообразие многообразия ${}_3\boldsymbol{N}$, то кратности $m^Q_\lambda(\boldsymbol{V})$ в разложении (14) пространства Q_n в прямую сумму ΦS_n-модулей равны единицам.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{V}$ — собственное подмногообразие многообразия ${}_3\mathbf{N}$. Рассмотрим некоторое разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ числа n и сопряженное к нему разбиение $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, ..., \lambda'_m)$. Построим всевозможные элементы, соответствующие разбиению λ'. Следуя рассуждениям, приведенным ранее, мы приходим к выводу, что искомые элементы будут содержать альтернированные наборы, содержащие $\lambda'_1, \lambda'_2, ..., \lambda'_m$ переменных. Такие элементы могут отличаться друг от друга только порядком следования альтернированных наборов. Таким образом, разбиению λ' отвечают следующие элементы:
$$g_1(\lambda') = x_{n+1} \overline{St}_{\lambda'_1} \widetilde{St}_{\lambda'_2} ... \widehat{St}_{\lambda'_m},$$
$$g_2(\lambda') = x_{n+1} \overline{St}_{\lambda'_2} \widetilde{St}_{\lambda'_1} ... \widehat{St}_{\lambda'_m},$$
$$...$$
$$g_{\lambda'_m}(\lambda') = x_{n+1} \overline{St}_{\lambda'_m} \widetilde{St}_{\lambda'_1} ... \widehat{St}_{\lambda'_{m-1}}.$$
Так как кратности неприводимых ΦS_n-модулей в разложении (14) не превосходят единицы, то элементы $g_1(\lambda'), g_2(\lambda'), ..., g_{\lambda'_m}(\lambda')$ либо эквивалентны, либо являются нулевыми. Из доказательства леммы 6 следует, что элемент $g_1(\lambda')$

отличен от нуля. Следовательно, элементы $g_2(\lambda'), ..., g_{\lambda'_m}(\lambda')$ эквивалентны элементу $g_1(\lambda')$. Таким образом, каждой диаграмме Юнга соответствует ненулевой элемент $g_1(\lambda')$. Линеаризация этого элемента порождает соответствующий подмодуль полилинейной части многообразия $\mathbf{V}$. Тем самым мы получаем, что всякому разбиению λ числа n соответствует единственный ненулевой элемент. Другими словами, все кратности $m_\lambda^Q(\mathbf{V})$ в разложении (14) равны единицам для любых разбиений λ числа n. Лемма доказана. □

Как уже упоминалось ранее, рост всякого собственного подмногообразия многообразия левонильпотентных ступени не выше трех алгебр Лейбница является экспоненциальным. Поэтому существуют верхняя и нижняя границы последовательности размерностей пространства его полилинейной части, которые мы договорились обозначать $\overline{Exp}(\mathbf{V})$ и $\underline{Exp}(\mathbf{V})$ соответственно. В лемме 4 было доказано, что верхние и нижние границы последовательностей размерностей пространств P_n и Q_n совпадают. Поэтому дальнейшее рассмотрение мы будем вести относительно пространства Q_n.

Теорема 3. *Пусть $\boldsymbol{V}$ — собственное подмногообразие многообразия ${}_3\boldsymbol{N}$ и пространство $Q_n = Q_n(\boldsymbol{V})$ определяется как линейная оболочка элементов*

$$Q_n = \langle x_{n+1}x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n)}|\sigma \in S_n\rangle.$$

Тогда если нижняя граница последовательности размерностей пространства Q_n меньше некоторого числа k, то верхняя граница этой последовательности не превосходит $k-1$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{V}$ — собственное подмногообразие многообразия левонильпотентных ступени не выше трех алгебр Лейбница и $Q_n = Q_n(\mathbf{V})$. Согласно теореме 2 многообразие ${}_3\mathbf{N}$ является многообразием почти ассоциативного типа и с почти конечными кратностями. Тогда всякая диаграмма, соответствующая неприводимому подмодулю пространства Q_n, лежит в крюке, и кратности $m_\lambda^Q(\mathbf{V})$ в разложении $\Sigma_{\lambda\vdash n} m_\lambda^Q(\mathbf{V})\chi_\lambda^Q = \chi_n^Q(\mathbf{V})$ являются натуральными числами. Поэтому мы можем рассмотреть произвольную диаграмму, лежащую в крюке $H(s,s)$. В такой диаграмме длины строк и столбцов с номерами, большими s, не превосходят s. То есть, если $t \geqslant s$, тогда $\lambda_t \leqslant s$ и $\lambda'_t \leqslant s$. Подобные рассуждения имеют место для всех диаграмм, лежащих в крюке. Складывая полученные неравенства, мы получим $\lambda_t + \lambda'_t \leqslant 2s$. Таким образом, мы получаем, что для всех диаграмм кохарактера $\chi^Q(\mathbf{V})$ верно следующее неравенство: $\lambda_t + \lambda'_t \leqslant 2s$.

Для каждого разбиения $\lambda \vdash n$ с ненулевыми кратностями $m_\lambda^Q(\mathbf{V})$ для $t \geqslant s$ обозначим:

$$p_n(t) = max\{\lambda_t + \lambda'_t\}.$$

Тогда поскольку для всех $t > s$ верно $\lambda_t + \lambda'_t \leqslant 2s$, то для элементов полученной последовательности также верно неравенство $p_n(t) \leqslant 2s$ для любого натурального числа n. Поскольку все элементы последовательности не превосходят числа $2s$, то эта последовательность ограничена сверху числом, не превосходящим числа $2s$. Для каждого $t > s$ и всех натуральных чисел n обозначим наибольшее значение $p_n(t)$ через $p(t)$:

$$p(t) = maxp_n(t).$$

Определим характер монотонности последовательности $p(t)$. Пусть λ_i^* и $\lambda_i^{'*}$ — наибольшие значения длин строк и столбцов соответственно диаграмм Юнга, отвечающих всевозможным разбиениям λ любых натуральных чисел n, лежащих в крюке $H(s,s)$. Тогда для всех $i > s$ верны неравенства $\lambda_i^* \leqslant s$ и $\lambda_i^{'*} \leqslant s$. Поэтому для некоторого числа $t+1 > s$ найдутся ϑ_{t+1} и ϑ'_{t+1} такие, что $\lambda_{t+1}^* \leqslant \vartheta_{t+1}$ и $\lambda_{t+1}^{'*} \leqslant \vartheta'_{t+1}$, а для некоторого $t \geqslant$ найдутся ϑ_t и ϑ'_t для которых $\lambda_t^* \leqslant \vartheta_t$ и $\lambda_t^{'*} \leqslant \vartheta'_t$. Причем, если $\vartheta_t + \vartheta'_t < \vartheta_{t+1} + \vartheta'_{t+1}$, то найдется диаграмма, для которой $\lambda_t < \lambda_{t+1}$ и $\lambda'_t < \lambda'_{t+1}$, чего не может быть. То есть последовательность $p(t)$ не может возрастать. Таким образом, мы получаем, что $p(t)$ — не возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, ограниченная сверху числом $2s$. Такая последовательность стабилизируется, то найдется такое натуральное число T, что для всех $t > T$ члены последовательности $p(t)$ будут равны некоторому натуральному числу. Следовательно, существует предел последовательности $p(t)$, который мы обозначим следующим образом:

$$p = lim_{t\to\infty} p(t).$$

Существование этого предела говорит о том, что для любого разбиения $\lambda \vdash n$ найдется такое число t_0, что для всех $t \geqslant t_0$ $\lambda_t + \lambda'_t = p$.

Рассмотрим теперь произвольное целое число n и некоторое его разбиение μ, которому соответствует неприводимый подмодуль из разложения пространства Q_n в прямую сумму подпространств. В силу доказанного выше для данного разбиения μ имеет место неравенство $\mu_{t_0}+\mu'_{t_0} \leqslant p$. Отсюда мы можем сделать вывод о том, что μ лежит в объединении квадрата $t_0 \times t_0$ и крюка $H(i,j)$ для некоторых $i + j = p$. Каждой из таких диаграмм отвечает некоторый элемент g_μ, полная линеаризация которого порождает по лемме 6 неприводимый ΦS_n-подмодуль из разложения (14). Рассмотрим наибольшую из описанных диаграмм и обозначим ее μ^*. Отметим, что, используя лемму 7, мы можем из диаграммы μ^* получить любую диаграмму, удовлетворяющую указанным условиям. Найдем размерность неприводимого ΦS_n-модуля, соответствующего диаграмме μ^*, по формуле крюков:

$$dim\mu^* = \frac{n!}{\prod_{ij}|h_{ij}|}.$$

Среди множителей выражения правой части полученного равенства разделим множители, соответствующие крюкам, содержащим клетки квадрата $t_0 \times t_0$, и множители, соответствующие крюкам, не содержащим клетки этого квадрата. Тогда размерность неприводимого ΦS_n-модуля, соответствующего диаграмме μ^*, выразится следующим образом:

$$dim\mu^* = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-t_0^2+1)}{\prod_{ij}|h^*_{ij}|}\cdot\frac{(n-t_0^2)!}{\prod_{ij}|h'_{ij}|},$$

где h_{ij}^* — крюки, хотя бы одна клетка которых лежит в квадрате $t_0 \times t_0$, а h'_{ij} — остальные крюки. Поскольку внутри квадрата $t_0 \times t_0$ может содержаться только конечное число клеток, то множитель

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n - t_0^2 + 1)}{\prod_{ij} |h_{ij}^*|}$$

можно заменить на дробно-рациональную функцию, следуя, например, работе [15]. Поэтому далее мы будем исследовать множитель

$$\frac{(n - t_0^2)!}{\prod_{ij} |h'_{ij}|}.$$

Для этого обозначим $n - t_0^2 = n_0$ и соответствующее "разбиение" этого числа как $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_k)$. В этих обозначениях размерность неприводимого ΦS_n-модуля, соответствующего диаграмме μ^*, можно выразить следующей формулой:

$$dim\mu^* \geqslant \frac{f(n)}{g(n)} \cdot \frac{n_0!}{\nu_1! \nu_2! ... \nu_k!}.$$

Применим формулу Стирлинга

$$m! = \sqrt{2\pi m} \frac{m^m}{e^m} e^{\frac{\theta_m}{12m}},$$

где $0 < \theta_k < 1$, ко второму множителю получившегося произведения:

$$\frac{n_0!}{\nu_1! \nu_2! ... \nu_k!} = \frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{2^k \pi^k \nu_1 \nu_2 ... \nu_k}} e^{\frac{\theta_{n_0}}{12 n_0} - \frac{\theta_{\nu_1}}{12\nu_1} - \frac{\theta_{\nu_2}}{12\nu_2} - ... - \frac{\theta_{\nu_k}}{12\nu_k} - n_0 + \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_k} \cdot \frac{n_0^{n_0}}{\nu_1^{\nu_1} \nu_2^{\nu_2} ... \nu_k^{\nu_k}}.$$

Множитель $e^{-n_0 + \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_k}$ равен единице, так как $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_k = n_0$. Поскольку каждое из θ_i — положительное число, меньшее единицы, то каждая дробь $\frac{\theta_i}{12i}$ также меньше единицы, то есть $1 < e^{\frac{\theta_i}{12i}} < 3$. Более того, так как

$$\frac{\theta_{n_0}}{12 n_0} - \frac{\theta_{\nu_1}}{12\nu_1} - \frac{\theta_{\nu_2}}{12\nu_2} - ... - \frac{\theta_{\nu_k}}{12\nu_k} < 0,$$

то

$$0 < e^{\frac{\theta_{n_0}}{12 n_0} - \frac{\theta_{\nu_1}}{12\nu_1} - \frac{\theta_{\nu_2}}{12\nu_2} - ... - \frac{\theta_{\nu_k}}{12\nu_k}} < 1.$$

Для дроби $\frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{2^k \pi^k \nu_1 \nu_2 ... \nu_k}}$ верны следующие неравенства:

$$\frac{1}{2\pi n} < \frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{2^k \pi^k \nu_1 \nu_2 ... \nu_k}} < n.$$

Проведенная оценка множителей показывает, что они не влияют на рост последовательности размерностей пространства полилинейных элементов неприводимого ΦS_n-модуля, соответствующего диаграмме μ^*. Поэтому мы обозначим из через $\gamma(\nu)$. Тогда

$$\gamma(\nu) = \frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{2^k \pi^k \nu_1 \nu_2 ... \nu_k}} e^{\frac{\theta_{n_0}}{12 n_0} - \frac{\theta_{\nu_1}}{12\nu_1} - \frac{\theta_{\nu_2}}{12\nu_2} - ... - \frac{\theta_{\nu_k}}{12\nu_k}}$$

и

$$dim\mu^* \geqslant \frac{f(n)}{g(n)} \cdot \gamma(\nu) \cdot \frac{n_0^{n_0}}{\nu_1^{\nu_1}\nu_2^{\nu_2}...\nu_k^{\nu_k}}.$$

Рассмотрим теперь множитель

$$\frac{n_0^{n_0}}{\nu_1^{\nu_1}\nu_2^{\nu_2}...\nu_k^{\nu_k}}.$$

Поскольку

$$n_0^{\frac{\nu_1}{n_0}+\frac{\nu_2}{n_0}+...+\frac{\nu_k}{n_0}} = n_0,$$

то данную дробь можно представить следующим образом:

$$\sqrt[n_0]{\frac{1}{(\frac{\nu_1}{n_0})^{\frac{\nu_1}{n_0}}(\frac{\nu_2}{n_0})^{\frac{\nu_2}{n_0}}...(\frac{\nu_k}{n_0})^{\frac{\nu_k}{n_0}}}}.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t_1, t_2, ..., t_k)$ от действительных переменных, удовлетворяющих условиям $t_1, t_2, ..., t_k > 0$ и $t_1 + t_2 + ... + t_k = 1$, которая определяется следующим равенством:

$$\varphi(t_1, t_2, ..., t_k) = \frac{1}{t_1^{t_1}t_2^{t_2}...t_k^{t_k}}.$$

Поскольку для разбиения $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_k)$ числа n_0 выполняются условия $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant ... \geqslant \nu_k > 0$ и $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_k = n_0$, то для действительных чисел $\frac{\nu_1}{n_0}, \frac{\nu_2}{n_0}, ..., \frac{\nu_k}{n_0}$ выполняются условия, наложенные на переменные $t_1, t_2, ..., t_k$ функции $\varphi(t_1, t_2, ..., t_k)$. Поэтому мы можем определить $\varphi(\nu)$, зависящее от разбиения от $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_k) \vdash n_0$ следующим образом:

$$\varphi(\nu) = \frac{1}{(\frac{\nu_1}{n_0})^{\frac{\nu_1}{n_0}}(\frac{\nu_2}{n_0})^{\frac{\nu_2}{n_0}}...(\frac{\nu_k}{n_0})^{\frac{\nu_k}{n_0}}}.$$

Проведенные рассуждения позволяют размерность неприводимого ΦS_n-модуля, соответствующего диаграмме μ^*, выразить следующим равенством:

$$dim\mu^* \geqslant \frac{f(n)}{g(n)} \cdot \gamma(\nu) \cdot (\varphi(\nu))^{n_0} = \frac{f_1(n)}{g_1(n)} \cdot \binom{n_0}{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_{k-1}}.$$

Отсюда

$$dim\mu^* \geqslant \frac{f_1(x)}{g_1(x)} p^{n_0}$$

и

$$lim_{n\longrightarrow\infty} inf(d_n(\mathbf{V})) \geqslant p^{n_0}.$$

Если $p \geqslant k$, то существует подпоследовательность последовательности $p(t)$, нижний предел которой тоже не меньше k, то есть $\underline{Exp}(Q_n) \geqslant k$, что противоречит условию. Поэтому p не может быть только больше k. Но тогда наибольший частичный предел последовательности $p(t)$ тоже не больше k, то есть $\overline{Exp}(Q_n) \leqslant k$. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 3 приводит нас к выводу о том, что верхняя и нижняя экспоненты всякого собственного подмногообразия $\mathbf{V}$ многообразия левонильпотентных ступени не выше трех алгебр Лейбница совпадают. Поэтому можно говорить об экспоненте многообразия $\mathbf{V}$. Далее мы будем рассматривать вопрос принадлежности экспоненты многообразия $\mathbf{V}$ множеству целых чисел.

Вопрос о целочисленности экспонент конкретных многообразий изучали различные авторы. Так, в ассоциативном случае для многих примеров доказано совпадение верхней и нижней экспонент, причем во всех случаях это число оказалось целым (см., например, работы [16], [17]). Известны примеры многообразий алгебр Ли с дробным экспоненциальным ростом [18]. Поэтому доказательство целочисленности экспоненты всякого подмногообразия многообразия левонильпотентных ступени не выше трех алгебр Лейбница является важным и актуальным.

Теорема 4. *Всякое собственное подмногообразие многообразия ${}_3\boldsymbol{N}$ имеет целую экспоненту.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{V}$ — собственное подмногообразие многообразия левонильпотентных ступени не выше трех алгебр Лейбница. Предположим, что экспонента многообразия $\mathbf{V}$ не является целым числом и равна, например, $\frac{a}{b}$. Рассмотрим целое число $m = [\frac{a}{b}] + 1$. Для этого числа выполняется условие $\underline{Exp}(Q_n) < m$. Тогда согласно теореме 4.1 $\overline{Exp}(Q_n) \leqslant m-1$. Поскольку верхняя экспонента меньше числа $m-1$, то она меньше $\frac{a}{b}$. Тогда экспонента многообразия $\mathbf{V}$ также меньше числа $\frac{a}{b}$. Это противоречит предположению. Теорема доказана. □

Работа частично поддержана грантом РФФИ (14-01-31084).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.

2. Блох А. М. Об одном обощении понятия алгебры Ли // Доклады академии наук СССР. 1965. Вып. 18, №3. С.471–473.

3. Мальцев А. И. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями // Мат. сб., 1950. Т. 26, №1. С. 19–33.

4. Abanina, L. E., Mishchenko S. P. The variety of Leibniz algebras defined by the identity $x(y(zt)) \equiv 0$ // Sedrica Math. J. 2003. №3. P.291–300.

5. Абанина Л. Е., Рацеев С. М. Многообразие алгебр Лейбница, связанное со стандартными тождествами // Вестник Самарского государственного университета. 2005. №6. С. 36–50.

6. Абанина Л. Е., Мищенко С. П. Некоторые многообразия алгебр Лейбница // Математические методы и приложения: труды девятых математических чтений. МГСУ. М.: "Союз" , 2002. С.95–99.

7. Мищенко С. П., Шишкина Т. В. О многообразиях алгебр Лейбница почти полиномиального роста с тождеством $x(y(zt)) \equiv 0$ // Вестник Московского государственного университета. Сер. 1, Математика. Механика. 2010. №3. С. 18-23.

8. Higgins P. J. Lie rings satisfying the Engel condition // Proc. Cambr. Philos. Soc. 1954. Vol. 50, №1. P. 8–15.

9. Мищенко С. П. Цветные диаграммы Юнга // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. №1. С. 90–91.

10. Мищенко С. П., Череватенко О. И. Необходимые и достаточные условия полиномиальности роста многообразия алгебр Лейбница // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Вып. 12, № 8. С.207–215.

11. Фролова Ю. Ю. Проблемы бернсайдовского типа для алгебр Лейбница: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ульяновск, 2011. 85 с.

12. Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A. Poisson PI algebras // Transactions of the American Mathematical Society. 2007. Vol. 359, №10. P.4669–4694.

13. Зайцев М. В., Мищенко С. П. Новое экстремальное свойство многообразия алгебр Ли $\mathbf{AN}_2$ // Веcтвник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1999. №5. С.18–23.

14. Шишкина Т. В. О целочисленности экспоненты подмногообразий многообразия $_3\mathbf{N}$ // Ученые записки Ульяновского Гос. Ун-та. Сер. Математика и информационные технологии. 2011. С. 18–23.

15. Giambruno A., Mishchenko S. , Zaicev M. Codimensions of Algebras and Growth Functions // Advances of mathematics. 2008. №217. P.1027–1052.

16. Giambruno A., Zaicev M. V. Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate // Adv. Math. 1999. Vol. 142. P.221–243.

17. Giambruno A., Zaicev M. V. On codimension growth of finitely generated associative algebras // Adv. Math. 1998. Vol. 140. P.145–155.

18. Mishchenko, S. P., Zaicev M. V. An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent // Algebra, 11. J. Math. Sci. New York, 1993. №6. P.977–982.

REFERENCES

1. Bahturin Yu. A. Identities in Lie algebras. M.: "Nauka" 1985.

2. Blokh A. M. A generalization of the concept of a Lie algebra // Sov. MAth. Dokl. M.:"Nauka" 1965. №3. P.471–473.

3. Malcev A. . On algebras defined by identieties // Mat. Sb. 1950, Vol. 26, №1, P. 19–33.

4. Abanina L. E., Mishchenko S.P. The variety of Leibniz algebras defined by the identity $x(y(zt)) \equiv 0$ // Sedrica Math. J. 2003. №3. P.291-300.

5. Abanina L.E., Ratssev S. M. A Leibniz variety connected with standart identities // Vestnik of Samara state University, natural scientific series, 2005. №6. P. 36–50.

6. Abanina L. E., Mishchenko S. P. Some varieties of Leibniz algebras // mathematical methods and applications. proceedings of the ninth mathematical conference of MSSU. 2002. P.95–99.

7. Mishchenko S. P., Shishkina T. V. On almost polynomial growth varieties of Leibniz algebras with the identity $x(y(zt)) \equiv 0$ // Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. 2010. №3. P. 18–23.

8. Higgins P. J. Lie rings satisfying the Engel condition // Proc. Cambr. Philos. Soc. 1954. Vol. 50, №1. V. 8-15.

9. Mishchenko S. P. Colored Young diagrams // Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. 1993. №1. P.90–91.

10. Mishchenko S. P., Cherevatenko O. I. Necessary and succient conditions for a variety of Leibniz algebras to have polynomial growth // Fundam. Prikl. Mat. 2006. Vol. 12, № 8. P.207–215.

11. Frolova Yu. Yu. Burnside type problems for Leibniz algebras: dis. ... candidate of physical and mathematical sciences. Ulyanovsk, 2011. 85p.

12. Mishchenko S. P., Petrogradsky V .M., Regev A. Poisson PI algebras // Transactions of the American Mathematical Society. 2007. Vol. 359, №10. P.4669-4694.

13. Zaicev M. V., Mishchenko S. P. A new extremal property of the variety $\mathbf{AN}_2$ of Lie algebras // Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. 1999. №5. P.18–23.

14. Shishkina, T. V. About integrality of exponent subvarieties of variety ${}_3\mathbf{N}$ // Scientific notes of the Ulyanovsk state university. Series of the mathematic and information technologies. 2011. P. 18–23.

15. Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Codimensions of Algebras and Growth Functions // Advances of mathematics. 2008. №217. P.1027–1052.

16. Giambruno A., Zaicev M. V. Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate // Adv. Math. 1999. Vol. 142. P.221–243.

17. Giambruno A., Zaicev M. V. On codimension growth of finitely generated associative algebras // Adv. Math. 1998. Vol. 140. P.145–155.

18. Mishchenko S. P., Zaicev M.V. An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent // Algebra, 11. J. Math. Sci. New York, 1993. №6. P.977–982.

Ульяновский государственный университет
Получено 2.03.2014